

M0047M-2020-12-21

19 okt. 2026, 12 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2020-12-21 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_201221.pdf, m0047m_201221sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för produkten $\prod_{k=2}^n (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$ och den oändliga produkten
- Uppgift 2: tre gränsvärden, $\frac{1 - \cos h}{h^2}$, en kvot av exponentialfunktioner och en andra differenskvot för x^4
- Uppgift 3: kurvorna $y = \frac{8}{7 + 2x^2}$ och $y = 2x^2$ skär varandra under räta vinklar
- Uppgift 4: högre derivator via implicit derivering av $(y')^2 = 1 - y^2$ och taylorpolynomet P_4
- Uppgift 5: extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter för $x^3 e^{-x}$
- Uppgift 6: relaterade hastigheter, kolvens läge och hastighet i en kolvmotor

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. En teleskoperande produkt

(a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla heltal $n \geq 2$ gäller att produkten

$$\prod_{k=2}^n (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}.$$

(4p)

(b) Beräkna den oändliga produkten

$$\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

(1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ett bevis med **induktion**, och sedan ett **gränsvärde** då $n \rightarrow \infty$ (Talföljder och summor).

Ledtråd 2

Basfallet är $n = 2$. Anta att formeln gäller för $n = p$ och multiplicera båda leden med den nya faktorn $1 - \frac{1}{(p+1)^2}$.

Ledtråd 3

$$1 - \frac{1}{(p+1)^2} = \frac{(p+1)^2 - 1}{(p+1)^2} = \frac{p(p+2)}{(p+1)^2} \text{ (konjugatregeln).}$$

Lösning

(a) Basfall. För $n = 2$ är

$$V_L = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2} = H_L$$

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för något heltal $n = p \geq 2$, dvs.

$$\prod_{k=2}^p \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{p+1}{2p} \quad \text{(induktionsantagandet)}$$

Då är

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{p+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \left(\prod_{k=2}^p \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(p+1)^2}\right) = \frac{p+1}{2p} \cdot \frac{(p+1)^2 - 1}{(p+1)^2} \\ &= \frac{p+1}{2p} \cdot \frac{p(p+2)}{(p+1)^2} = \frac{p+2}{2(p+1)} = \frac{(p+1)+1}{2(p+1)}\end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$. Enligt induktionsprincipen gäller

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \text{ för alla heltal } n \geq 2$$

Alternativt bevis utan induktion. $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k}$, så produkten teleskoperar:

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

(b) Den oändliga produkten är gränsvärdet av delprodukterna:

$$\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör och motivera huruvida följande gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2}.$$

(2p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{3x+2} + e^{2x+1} - 9^{x-2}}{3^{2x-3} - 7^{x+3}}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} - \frac{x^4 - (x-h)^4}{h}}{h}.$$

(2p)

Totalpoäng: 6

Ledtråd 1

Gränsvärden med standardgränsvärden: $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$ i (a), dominerande term i (b) och binomialsatsen i (c).

Ledtråd 2

(a) Förläng med $1 + \cos h$. (b) Skriv alla potenser på formen a^x och dela täljare och nämnare med den snabbast växande, 9^x . (c) Sätt allt på ett bråkstreck, $\frac{(x+h)^4 - 2x^4 + (x-h)^4}{h^2}$.

Ledtråd 3

(a) $\frac{1 - \cos^2 h}{h^2(1 + \cos h)} = \left(\frac{\sin h}{h}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos h}$. (b) $e^2 < 9$, så $\left(\frac{e^2}{9}\right)^x \rightarrow 0$. (c) Termerna med udda potenser av h tar ut varandra.

Lösning

(a) Förläng med $1 + \cos h$:

$$\frac{1 - \cos h}{h^2} = \frac{1 - \cos^2 h}{h^2(1 + \cos h)} = \left(\frac{\sin h}{h}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos h} \rightarrow 1^2 \cdot \frac{1}{1 + 1}$$

då $h \rightarrow 0$, så

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2} = \frac{1}{2}}$$

(b) Skriv om varje term som konstant gånger a^x :

$$\frac{2^{3x+2} + e^{2x+1} - 9^{x-2}}{3^{2x-3} - 7^{x+3}} = \frac{4 \cdot 8^x + e \cdot (e^2)^x - \frac{1}{81} \cdot 9^x}{\frac{1}{27} \cdot 9^x - 343 \cdot 7^x}$$

Dela täljare och nämnare med 9^x :

$$= \frac{4\left(\frac{8}{9}\right)^x + e\left(\frac{e^2}{9}\right)^x - \frac{1}{81}}{\frac{1}{27} - 343\left(\frac{7}{9}\right)^x}$$

Eftersom $e^2 < 3^2 = 9$ ligger alla baserna $\frac{8}{9}$, $\frac{e^2}{9}$ och $\frac{7}{9}$ i $(0, 1)$, och $a^x \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$ för $0 < a < 1$. Alltså

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{3x+2} + e^{2x+1} - 9^{x-2}}{3^{2x-3} - 7^{x+3}} = \frac{-\frac{1}{81}}{\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$$

(c) Sätt på gemensamt bråkstreck och utveckla med binomialsatsen:

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^4 - 2x^4 + (x-h)^4}{h^2} &= \frac{(x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4) - 2x^4 + (x^4 - 4x^3h + 6x^2h^2 - 4xh^3 + h^4)}{h^2} \\ &= \frac{12x^2h^2 + 2h^4}{h^2} = 12x^2 + 2h^2 \end{aligned}$$

så

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} - \frac{x^4 - (x-h)^4}{h}}{h} = 12x^2$$

Anmärkning: uttrycket är en differenskvot av differenskvoter för $f(x) = x^4$, och gränsvärdet är $f''(x) = 12x^2$.

Kontrollerat mot facit.

3. Två kurvor som skär varandra vinkelrätt

Visa att kurvorna

$$y = \frac{8}{7 + 2x^2}$$

och

$$y = 2x^2$$

skär varandra under räta vinklar. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Skärningspunkter och **tangentlutningar**. Två linjer är vinkelräta om produkten av deras riktningskoefficienter är -1 .

Ledtråd 2

Bestäm först skärningspunkterna (a, b) ur $2a^2 = \frac{8}{7 + 2a^2}$, derivera sedan båda kurvorna och visa att $k_1 k_2 = -1$ där.

Ledtråd 3

Med $t = a^2$ blir villkoret $4t^2 + 14t - 8 = 0$, så $t = \frac{1}{2}$. Lutningarna är $4a$ och $-\frac{32a}{(7 + 2a^2)^2}$.

Lösning

Skärningspunkter. I en skärningspunkt (a, b) är

$$2a^2 = \frac{8}{7 + 2a^2} \iff 2a^2(7 + 2a^2) = 8 \iff 4a^4 + 14a^2 - 8 = 0$$

Med $t = a^2$: $t^2 + \frac{7}{2}t - 2 = 0$, så

$$t = -\frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} + 2} = -\frac{7}{4} \pm \frac{9}{4} \iff t = \frac{1}{2} \text{ eller } t = -4$$

Eftersom $t = a^2 \geq 0$ är bara $a^2 = \frac{1}{2}$ möjligt, och då är $b = 2a^2 = 1$. Kurvorna skär alltså varandra i

$$(a, b) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$$

Lutningar. Derivatorna är

$$\frac{d}{dx}(2x^2) = 4x, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{8}{7+2x^2}\right) = -\frac{8 \cdot 4x}{(7+2x^2)^2} = -\frac{32x}{(7+2x^2)^2}$$

så tangenternas riktningskoefficienter i skärningspunkterna är $k_1 = 4a$ och $k_2 = -\frac{32a}{(7+2a^2)^2}$.

Med $a^2 = \frac{1}{2}$:

$$k_1 k_2 = -\frac{128a^2}{(7+2a^2)^2} = -\frac{64}{(7+1)^2} = -1$$

$k_1 k_2 = -1$ i båda skärningspunkterna $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$, så kurvorna skär varandra under räta vinkel

Kontrollerat mot facit.

4. Taylorpolynom ur en differentialekvation

Antag att $y = y(x)$ är en implicit definierad icke-konstant funktion som uppfyller den icke-linjära differentialekvationen

$$(y')^2 = 1 - y^2.$$

(a) Finn y'' , y''' och $y^{(4)}$ uttryckta i y och y' . (2p)

(b) Finn taylorpolynomet $P_4(x)$ av ordning 4 till y kring 0 om vi vet att $y(0) = 1$. *Ledning: vad måste då $y'(0)$, $y''(0)$, osv. vara?* (2p)

Totalpoäng: 4

Ledtråd 1

Implicit derivering med kedjeregeln och sedan taylorpolynom.

Ledtråd 2

Derivera båda leden med avseende på x ; kom ihåg att $\frac{d}{dx}(y^2) = 2yy'$. Sätt sedan in $x = 0$ i differentialekvationen och i derivatorna.

Ledtråd 3

$2y'y'' = -2yy'$ ger $y'' = -y$. Differentialekvationen i $x = 0$ ger $y'(0)^2 = 1 - 1 = 0$.

Lösning

(a) Derivera båda leden med avseende på x :

$$2y'y'' = -2yy'$$

Eftersom y inte är konstant är y' inte identiskt noll, och division med $2y'$ ger

$$y'' = -y$$

Fortsatt derivering ger

$$y''' = \frac{d}{dx}(-y) = -y', \quad y^{(4)} = \frac{d}{dx}(-y') = -y'' = y$$

$$\boxed{y'' = -y, \quad y''' = -y', \quad y^{(4)} = y}$$

(b) Differentialekvationen i $x = 0$ ger $(y'(0))^2 = 1 - y(0)^2 = 1 - 1 = 0$, så $y'(0) = 0$. Från (a):

$$y''(0) = -y(0) = -1, \quad y'''(0) = -y'(0) = 0, \quad y^{(4)}(0) = y(0) = 1$$

Taylorpolynomet blir

$$P_4(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

$$\boxed{P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}$$

Anmärkning: lösningen är $y = \cos x$, eftersom $(-\sin x)^2 = 1 - \cos^2 x$ och $\cos 0 = 1$. Polynomet är just taylorpolynomet för $\cos x$.

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $x^3 e^{-x}$

Definiera funktionen

$$y = f(x) = x^3 e^{-x}.$$

- (a) Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Skissera kurvan. (4p)
- (b) (**M0047M**): Beskriv med kod/kommandon hur grafen till denna funktion skulle kunna plottas i MATLAB på ett sådant sätt att de intressanta delarna av grafen framträder. (1p)
- (b) (**M0029M**): Ange i vilka intervall funktionen är växande/avtagande respektive konvex/konkav. (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: gränsvärden då $x \rightarrow \pm\infty$, teckenschema för derivatan och andraderivatan för inflexionspunkter.

Ledtråd 2

Använd att $\frac{x^3}{e^x} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$ (standardgränsvärde). Undersök $\frac{f(x)}{x}$ då $x \rightarrow -\infty$ för en eventuell sned asymptot. Derivera med produktregeln och faktorisera.

Ledtråd 3

$$f'(x) = x^2(3-x)e^{-x} \text{ och } f''(x) = x(x^2 - 6x + 6)e^{-x}.$$

Lösning

(a) f är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, så det finns inga lodräta asymptoter. Eftersom $e^{-x} > 0$ har $f(x)$ samma tecken som x^3 .

Asymptoter. Då $x \rightarrow \infty$ domineras potensfunktionen av exponentialfunktionen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$$

så $y = 0$ är vågrät asymptot åt höger. Då $x \rightarrow -\infty$ går $x^3 \rightarrow -\infty$ och $e^{-x} \rightarrow \infty$, så $f(x) \rightarrow -\infty$. Vidare är

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = \infty$$

så det finns ingen sned asymptot åt vänster.

enda asymptoten är $y = 0$ då $x \rightarrow \infty$

Derivata.

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2(3-x)e^{-x}$$

Kritiska punkter: $x = 0$ och $x = 3$.

	$x < 0$	0	$0 < x < 3$	3	$x > 3$
x^2	+	0	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	0	-
e^{-x}	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗	terrass	↗	lok. max	↘

terrasspunkt $(0, 0)$, lok. max $f(3) = \frac{27}{e^3} \approx 1,34$

Maximet är också globalt. Något minimum finns inte, eftersom $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow -\infty$.

Andraderivata.

$$f''(x) = (6x - 3x^2)e^{-x} - (3x^2 - x^3)e^{-x} = x(x^2 - 6x + 6)e^{-x} = x(x - (3 - \sqrt{3}))(x - (3 + \sqrt{3}))$$

Nollställena: $x = 0$ och $x = 3 \pm \sqrt{3}$ (ungefär 1,27 och 4,73).

	$x < 0$	0	$0 < x < 3 - \sqrt{3}$	$3 - \sqrt{3}$	$3 - \sqrt{3} < x < 3 + \sqrt{3}$	$3 + \sqrt{3} < x$
x	-	0	+	+	+	+
$x - (3 - \sqrt{3})$	-	-	-	0	+	+
$x - (3 + \sqrt{3})$	-	-	-	-	-	0
e^{-x}	+	+	+	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0

	$x < 0$	0	$0 < x < 3 - \sqrt{3}$	$3 - \sqrt{3}$	$3 - \sqrt{3} < x < 3 + \sqrt{3}$	$3 + \sqrt{3}$
$f(x)$	konkav	infl.	konvex	infl.	konkav	inf.

f'' byter tecken i alla tre punkterna:

inflexionspunkter i $x = 0$, $x = 3 - \sqrt{3}$, $x = 3 + \sqrt{3}$

med $f(0) = 0$, $f(3 - \sqrt{3}) = (3 - \sqrt{3})^3 e^{\sqrt{3}-3} \approx 0,57$ och $f(3 + \sqrt{3}) = (3 + \sqrt{3})^3 e^{-3-\sqrt{3}} \approx 0,93$.

Skiss. Kurvan kommer från $-\infty$ nere till vänster, växer och planar ut i terrasspunkten $(0, 0)$ (som också är en inflexionspunkt), växer vidare till maximipunkten $(3, \frac{27}{e^3})$ och avtar sedan mot asymptoten $y = 0$ ovanifrån, med inflexionspunkter vid $x \approx 1,27$ och $x \approx 4,73$.

(b) (M0047M) Välj ett intervall som innehåller alla intressanta punkter, t.ex. $[-1, 10]$, och använd punktvisa operationer:

```
1 x = -1:0.05:10;           % intervallet med de intressanta punkterna
2 y = x.^3.*exp(-x);        % OBS! punktvis potens och produkt
3 plot(x, y)
```

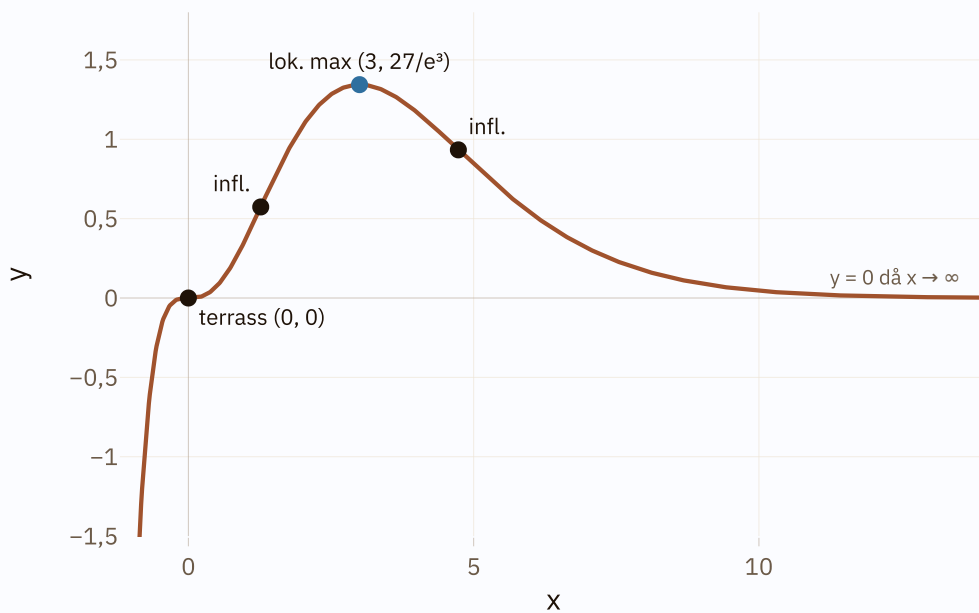
eller

```
1 f = @(x) x.^3.*exp(-x);
2 fplot(f, [-1, 10])        % bara fplot(f) ger ett ointressant intervall
```

(b) (M0029M) Ur teckenschemana:

växande på $(-\infty, 3]$, avtagande på $[3, \infty)$

konvex på $[0, 3 - \sqrt{3}]$ och $[3 + \sqrt{3}, \infty)$, konkav på $(-\infty, 0]$ och $[3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$



Kontrollerat mot facit.

6. Kolven i Ronalds motor

Chefsingenjör Ronald har konstruerat en ny kolvmotor, se nedanstående figur.

(Figuren i originalet visar ett svänghjul med radien r och centrum i vevaxeln. Vevstaken med längden d går från en punkt på hjulets rand till kolven, som rör sig fram och tillbaka längs en vågrät linje genom hjulets centrum. θ är vinkeln mellan radien till vevstakens fästpunkt och den vågräta linjen, och x är avståndet från hjulets centrum till kolven.)

Antag att vevaxeln roterar moturs med en hastighet av 6500 rpm (6500 varv per minut). På vevaxeln sitter ett svänghjul med radie $r = 3$ cm i vilket en vevstake med längd $d = 7$ cm är fäst. I andra änden av vevstaken är en rörlig kolv fäst. När vinkeln θ ändras kommer då kolven att utföra horisontell rörelse x .

(a) Vad är avståndet x vid tillfället när vinkeln $\theta = \frac{\pi}{3}$? (2p)

(b) Hjälp Ronald att beräkna kolvens hastighet när vinkeln $\theta = \frac{\pi}{3}$. (3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Relaterade hastigheter: **Implicit derivering** av ett geometriskt samband med avseende på tiden, med **cosinussatsen**.

Ledtråd 2

Triangeln har sidorna r , d och x , med vinkeln θ mellan r och x . Cosinussatsen: $d^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta$. Derivera med avseende på t ; både x och θ beror på tiden.

Ledtråd 3

(a) $x^2 - 3x - 40 = 0$. (b) $\theta' = 6500 \cdot \frac{2\pi}{60} = \frac{650\pi}{3}$ rad/s, och derivatan av sambandet är $2xx' - 6x' \cos \theta + 6x \sin \theta \cdot \theta' = 0$.

Lösning

(a) Cosinussatsen i triangeln med sidorna $r = 3$, x och $d = 7$ ger

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cos \theta \iff x^2 - 6x \cos \theta - 40 = 0$$

För $\theta = \frac{\pi}{3}$ är $\cos \theta = \frac{1}{2}$, så

$$x^2 - 3x - 40 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 40} = \frac{3}{2} \pm \frac{13}{2} \iff x = 8 \text{ eller } x = -5$$

Avståndet är positivt (det är alltid minst $d - r = 4$ cm), så

$$\boxed{x = 8 \text{ cm}}$$

(b) Både $x = x(t)$ och $\theta = \theta(t)$ beror på tiden. Derivering av $x^2 - 6x \cos \theta - 40 = 0$ med avseende på t ger

$$2xx' - 6x' \cos \theta + 6x \sin \theta \cdot \theta' = 0 \iff x' = -\frac{6x \sin \theta \cdot \theta'}{2x - 6 \cos \theta}$$

Vinkelhastigheten är

$$\theta' = 6500 \frac{\text{varv}}{\text{min}} \cdot \frac{1}{60} \frac{\text{min}}{\text{s}} \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{varv}} = \frac{650\pi}{3} \text{ rad/s}$$

Med $x = 8 \text{ cm}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ och $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$:

$$x' = -\frac{6 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{650\pi}{3}}{16 - 3} = -\frac{8 \cdot 650\sqrt{3}\pi}{13} = -400\sqrt{3}\pi \text{ cm/s}$$

$$x' = -400\sqrt{3}\pi \text{ cm/s} = -4\sqrt{3}\pi \text{ m/s} \approx -21,8 \text{ m/s}$$

Kolven rör sig alltså åt vänster (mot hjulet) med farten $4\sqrt{3}\pi \approx 21,8 \text{ m/s}$.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- M0065M
- Matematisk induktion
- Talföljder och summor
- Gränsvärden
- Polynom och faktorisering
- Derivata
- Implicit derivering
- Taylors formel
- Trigonometri
- Extremvärden
- Grafritning och asymptoter
- Andraderivata och konvexitet