

M0047M-2020-10-28

19 okt. 2026, 11 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2020-10-28 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_201028.pdf, m0047m_201028sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för summan $\sum k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ och en koefficient i binomialutvecklingen av $(3x^3 - \frac{2}{x})^5$
- Uppgift 2: tre gränsvärden: $\frac{\arcsin x}{x}$, en derivata som gränsvärde och $n^{1/\sqrt{n}}$
- Uppgift 3: injektivitet, invers och inversens definitionsmängd för $\arctan \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
- Uppgift 4: implicit derivering av ellipsen $x^2 + 2y^2 = 6$ och taylorpolynomet P_2 i $(2, 1)$
- Uppgift 5: extremvärden, monotonintervall och sned asymptot för $\frac{(x-2)^2(x+1)}{x^2+1}$
- Uppgift 6: optimering, största volymen hos en låda vikt av en pappskiva 6×16 dm

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. En summaformel genom induktion och en binomialkoefficient

(a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 1$ gäller att summan

$$\sum_{k=1}^n k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 4 - \frac{2n+4}{2^n}.$$

(3p)

(b) Bestäm koefficienten för x^3 -termen i binomialutvecklingen av

$$\left(3x^3 - \frac{2}{x}\right)^5.$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är ett bevis med **induktion** för en **summa**; (b) använder binomialsatsen och **binomialkoefficienter**.

Ledtråd 2

(a) Basfallet är $n = 1$. I induktionssteget: summan till $p + 1$ är summan till p plus termen $(p + 1)\left(\frac{1}{2}\right)^p$. (b) Den allmänna termen är $\binom{5}{k}(3x^3)^{5-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k$.

Ledtråd 3

(a) Skriv allt på nämnaren 2^p och sedan på nämnaren 2^{p+1} : målet är $4 - \frac{2(p+1)+4}{2^{p+1}} = 4 - \frac{p+3}{2^p}$. (b) Exponenten för x blir $15 - 4k$; välj k så att den blir 3.

Lösning

(a) Basfall. För $n = 1$ är vänsterledet $1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ och högerledet $4 - \frac{2+4}{2} = 4 - 3 = 1$.
Formeln gäller.

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för något heltal $p \geq 1$ (induktionsantagandet):

$$\sum_{k=1}^p k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 4 - \frac{2p+4}{2^p}$$

Då är

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p+1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} &= \sum_{k=1}^p k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + (p+1) \left(\frac{1}{2}\right)^p = 4 - \frac{2p+4}{2^p} + \frac{p+1}{2^p} \\ &= 4 - \frac{p+3}{2^p} = 4 - \frac{2(p+3)}{2^{p+1}} = 4 - \frac{2(p+1)+4}{2^{p+1}}\end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$. Enligt induktionsprincipen gäller

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 4 - \frac{2n+4}{2^n} \text{ för alla heltal } n \geq 1}$$

Alternativt bevis utan induktion. Kalla summan S_n . Då är

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{n}{2^n}$$

(geometrisk summa), så $S_n = 4 - \frac{4}{2^n} - \frac{2n}{2^n} = 4 - \frac{2n+4}{2^n}$.

(b) Enligt binomialsatsen är

$$\left(3x^3 - \frac{2}{x}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (3x^3)^{5-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 3^{5-k} (-2)^k x^{15-4k}$$

Exponenten $15 - 4k = 3$ ger $k = 3$, och termen är

$$\binom{5}{3} 3^2 (-2)^3 x^3 = 10 \cdot 9 \cdot (-8) x^3 = -720x^3$$

koefficienten är -720

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^5 - 1}{h}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/\sqrt{n}}.$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden med variabelbyte, derivatans definition (**Derivata**) och standardgränsvärden för **logaritmer**.

Ledtråd 2

(a) Sätt $t = \arcsin x$, så att $x = \sin t$. (b) Känn igen en differenskvot för $f(x) = x^5$ i punkten 1, eller utveckla med binomialsatsen. (c) Skriv $n^{1/\sqrt{n}} = e^{\ln n / \sqrt{n}}$.

Ledtråd 3

(a) $\frac{t}{\sin t} \rightarrow 1$. (b) $(1+h)^5 = 1 + 5h + 10h^2 + \dots$ (c) $\frac{\ln n}{n^{1/2}} \rightarrow 0$ och exponentialfunktionen är kontinuerlig.

Lösning

(a) Sätt $t = \arcsin x$, dvs. $x = \sin t$. Då $x \rightarrow 0$ går $t \rightarrow 0$ eftersom $\arcsin$ är kontinuerlig, och

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

(b) Med $f(x) = x^5$ är uttrycket differenskvoten $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$, så gränsvärdet är $f'(1) = 5 \cdot 1^4 = 5$. Alternativt ger binomialsatsen

$$\frac{(1+h)^5 - 1}{h} = \frac{5h + 10h^2 + 10h^3 + 5h^4 + h^5}{h} = 5 + 10h + 10h^2 + 5h^3 + h^4 \rightarrow 5$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^5 - 1}{h} = 5$$

(c) Skriv om med logaritmen:

$$n^{1/\sqrt{n}} = e^{\ln n^{1/\sqrt{n}}} = e^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}$$

Standardgränsvärdet $\frac{\ln n}{n^a} \rightarrow 0$ för $a > 0$ ger att exponenten går mot 0, och eftersom e^x är kontinuerlig är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/\sqrt{n}} = e^0 = \boxed{1}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Invers till $\arctan \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \arctan \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Visa att f är 1-1 (injektiv). (2p)
- (b) Finn inversen $f^{-1}(x)$. (2p)
- (c) Bestäm inversens definitionsmängd. (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Funktioner och invers: en strängt monoton funktion är injektiv, och inversens definitionsmängd är funktionens värdemängd. Derivatn kräver kedjeregeln och derivatan av **arctan**.

Ledtråd 2

- (a) Visa att $f'(x) > 0$ för alla x . (b) Lös $x = f(y)$ för y : ta **tan** av båda leden och sätt $t = e^y$. (c) Beräkna $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

Ledtråd 3

(a) $f'(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$. (b) $\tan x = \frac{t-1}{t+1}$ ger $t = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$. (c) Kvoten $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ går mot -1 respektive 1 .

Lösning

(a) Med kedjeregeln och kvotregeln:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2} \cdot \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2 + (e^x - 1)^2} = \frac{2e^x}{2e^{2x} + 2} = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$$

Eftersom $f'(x) > 0$ för alla x är f strängt växande på $\mathbb{R}$, och därmed

f är injektiv

Alternativt: $f(x_1) = f(x_2)$ ger (eftersom $\arctan$ är injektiv) $\frac{e^{x_1} - 1}{e^{x_1} + 1} = \frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_2} + 1}$. Korsvis multiplikation ger $e^{x_1} - e^{x_2} = e^{x_2} - e^{x_1}$, dvs. $e^{x_1} = e^{x_2}$ och $x_1 = x_2$.

(b) Sätt $y = f^{-1}(x)$, dvs. $x = f(y) = \arctan \frac{t-1}{t+1}$ med $t = e^y$. Värdena på f ligger i $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ (se (c)), där $\tan$ är definierad och $\tan x \neq 1$. Då är

$$\tan x = \frac{t-1}{t+1} \iff (t+1)\tan x = t-1 \iff t(1-\tan x) = 1+\tan x \iff e^y = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

(c) Inversens definitionsmängd är f 's värdemängd. f är kontinuerlig och strängt växande, och eftersom $\arctan$ är kontinuerlig är

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \arctan \frac{0-1}{0+1} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \arctan \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) = \arctan 1$$

Gränserna antas inte, så

$$D_{f^{-1}} = V_f = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

Det stämmer med formeln i (b): för $|x| < \frac{\pi}{4}$ är $|\tan x| < 1$, så kvoten är positiv och logaritmen definierad.

Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning skriver kvoten vid $x \rightarrow \infty$ som $\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$; nämnaren ska vara $1 + e^{-x}$, men gränsvärdet 1 och svaret blir detsamma.

4. Implicit derivering av en ellips

Antag att $y = y(x)$ är en implicit definierad funktion som uppfyller

$$x^2 + 2y^2 = 6.$$

(a) Finn y' och y'' uttryckta i x och y . (3p)

(b) Finn taylorpolynomet $P_2(x)$ av ordning 2 till y genom punkten $(2, 1)$. (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Implicit derivering följt av ett andra ordningens taylorpolynom.

Ledtråd 2

Derivera båda leden med avseende på x och kom ihåg att $\frac{d}{dx}y^2 = 2yy'$. Derivera sedan en gång till. $P_2(x) = y(2) + y'(2)(x - 2) + \frac{y''(2)}{2}(x - 2)^2$.

Ledtråd 3

$2x + 4yy' = 0$ och $2 + 4(y')^2 + 4yy'' = 0$. Använd sambandet $x^2 + 2y^2 = 6$ för att förenkla y'' .

Lösning

(a) Implicit derivering med avseende på x ger

$$2x + 4yy' = 0 \iff y' = -\frac{x}{2y}$$

En derivering till av $2x + 4yy' = 0$ ger

$$2 + 4(y')^2 + 4yy'' = 0 \iff y'' = -\frac{1 + 2(y')^2}{2y} = -\frac{1 + \frac{x^2}{2y^2}}{2y} = -\frac{2y^2 + x^2}{4y^3}$$

Eftersom $x^2 + 2y^2 = 6$ på kurvan:

$$y'' = -\frac{x^2 + 2y^2}{4y^3} = -\frac{3}{2y^3}$$

(b) Punkten ligger på kurvan: $2^2 + 2 \cdot 1^2 = 6$. I punkten är

$$y(2) = 1, \quad y'(2) = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1, \quad y''(2) = -\frac{3}{2 \cdot 1^3} = -\frac{3}{2}$$

så

$$P_2(x) = y(2) + y'(2)(x-2) + \frac{y''(2)}{2!}(x-2)^2 = 1 - (x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 = 2x - \frac{3}{4}x^2$$

Kontroll: den övre halvan av ellipsen är $y = \sqrt{\frac{6-x^2}{2}}$, och dess taylorutveckling kring $x = 2$ ger samma polynom.

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $\frac{(x-2)^2(x+1)}{x^2+1}$

Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan

$$y = f(x) = \frac{(x-2)^2(x+1)}{x^2+1}.$$

Ställ upp teckenschema över derivatan och skissera kurvan samt ange i vilka intervall funktionen är växande/avtagande. Konvexitet behöver ej beaktas.

Anmärkning: Man kan ha hjälp av $x^3 + 3x - 14 = (x-2)(x^2 + 2x + 7)$. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning för en rationell funktion: polynomdivision för sned asymptot och teckenschema för derivatan.

Ledtråd 2

Nämnaren $x^2 + 1$ är aldrig noll, så lodräta asymptoter saknas. Dividera $x^3 - 3x^2 + 4$ med $x^2 + 1$. Derivera med kvotregeln.

Ledtråd 3

$$f(x) = x - 3 + \frac{7 - x}{x^2 + 1} \text{ och täljaren i } f' \text{ blir } x^4 + 3x^2 - 14x = x(x^3 + 3x - 14).$$

Lösning

Asymptoter. Utvecklat är $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 + 1}$. Nämnaren är ≥ 1 , så f är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ och har inga lodräta asymptoter. Polynomdivision ger

$$f(x) = x - 3 + \frac{7 - x}{x^2 + 1}$$

och $\frac{7 - x}{x^2 + 1} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \pm\infty$ (täljaren har lägre grad). Alltså är

$$y = x - 3 \text{ sned asymptot då } x \rightarrow \pm\infty$$

Vågräta asymptoter saknas, eftersom $f(x) \rightarrow \pm\infty$ då $x \rightarrow \pm\infty$.

Derivata. Med kvotregeln:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 6x)(x^2 + 1) - (x^3 - 3x^2 + 4) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 - 14x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x(x - 2)(x^2 + 2x + 7)}{(x^2 + 1)^2}$$

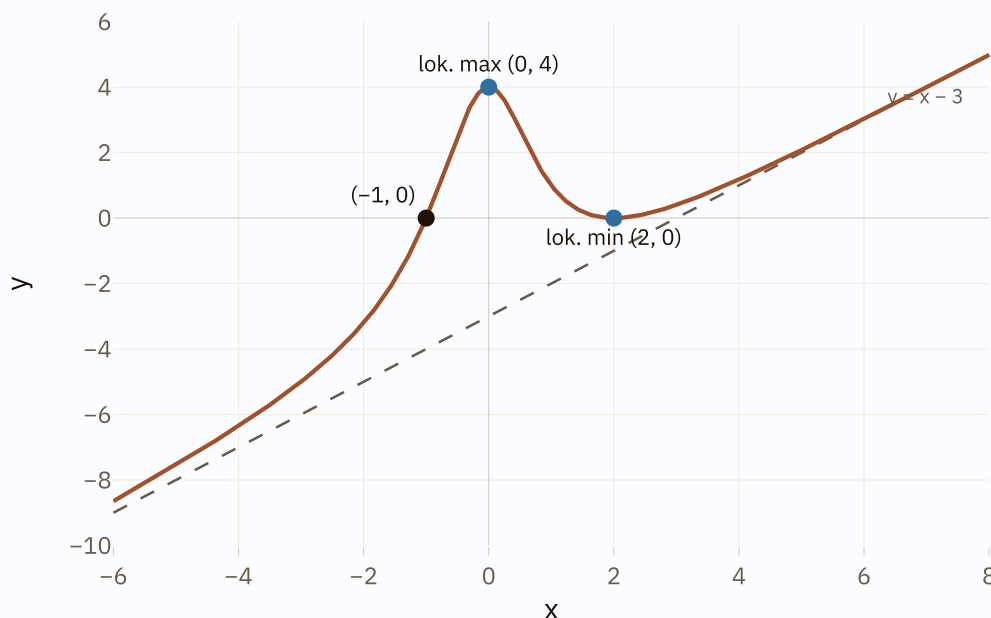
Här är $x^2 + 2x + 7 = (x + 1)^2 + 6 > 0$, så de kritiska punkterna är $x = 0$ och $x = 2$.

	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
x	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	0	+
$(x + 1)^2 + 6$	+	+	+	+	+
$(x^2 + 1)^2$	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	lok. max	↘	lok. min	↗

$$\text{lok. max } f(0) = 4, \quad \text{lok. min } f(2) = 0$$

f växande på $(-\infty, 0]$ och $[2, \infty)$, avtagande på $[0, 2]$

Skiss. Kurvan skär x -axeln i $x = -1$ och tangerar den i $x = 2$, och skär y -axeln i $(0, 4)$. Den kommer från $-\infty$ längs asymptoten $y = x - 3$, stiger till maximum $(0, 4)$, sjunker till minimum $(2, 0)$ och växer sedan längs asymptoten igen. Eftersom $\frac{7-x}{x^2+1}$ är positiv för $x < 7$ och negativ för $x > 7$ ligger kurvan över asymptoten för $x < 7$ och under den för $x > 7$.



Kontrollerat mot facit.

6. Största volymen hos en låda

Editor Persson behöver er hjälp att konstruera en låda till alla artiklar folk skrivit åt honom. Till ert förfogande har ni en pappskiva med måtten $6 \text{ dm} \times 16 \text{ dm}$. Lådan ska alltså konstrueras genom att klippa lika stora kvadrater i de fyra hörnen och sedan vika upp flikarna till sidor. Hur stor blir största möjliga volym av en sådan låda? (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Optimering: **största värdet** av en kontinuerlig funktion på ett slutet intervall.

Ledtråd 2

Låt kvadraternas sida vara x . Då blir lådan $(16 - 2x) \times (6 - 2x) \times x$, med $0 \leq x \leq 3$. Jämför värdena i kritiska punkter och ändpunkter.

Ledtråd 3

$V'(x) = 4(3x^2 - 22x + 24)$ har nollställena $x = \frac{4}{3}$ och $x = 6$; bara det första ligger i intervallet.

Lösning

Kalla kvadraternas sida x (dm). Lådans längd, bredd och höjd blir $16 - 2x$, $6 - 2x$ och x , så $0 \leq x \leq 3$ och

$$V(x) = x(16 - 2x)(6 - 2x) = 4x(8 - x)(3 - x) = 4(x^3 - 11x^2 + 24x)$$

V är kontinuerlig på det slutna intervallet $[0, 3]$ och har därför ett största värde. I ändpunkterna är $V(0) = V(3) = 0$, så maximum antas i en inre kritisk punkt:

$$V'(x) = 4(3x^2 - 22x + 24) = 0 \iff x = \frac{11}{3} \pm \sqrt{\frac{121}{9} - 8} = \frac{11 \pm 7}{3}$$

dvs. $x = 6$ eller $x = \frac{4}{3}$. Bara $x = \frac{4}{3}$ ligger i $[0, 3]$. Där är $V''(x) = 24x - 88$, så $V''(\frac{4}{3}) = -56 < 0$, vilket bekräftar maximum. Lådans mått blir $\frac{40}{3} \times \frac{10}{3} \times \frac{4}{3} \text{ dm}$ och

$$V_{\max} = V\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{40}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{1600}{27} \text{ dm}^3 \approx 59,3 \text{ dm}^3$$

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Matematisk induktion](#)
- [Talföljder och summor](#)
- [Binomialkoefficient](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Derivata](#)
- [Exponentialfunktioner och logaritmer](#)
- [Funktioner och invers](#)
- [Arcusfunktioner](#)
- [Implicit derivering](#)
- [Taylors formel](#)
- [Extremvärden](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)