

M0047M-2020-08-19

19 okt. 2026, 12 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2020-08-19 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_200819.pdf, m0047m_200819sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: Taylorutveckling av $\ln(1+x)$ med restterm, approximation av $\ln 2$ och hur hög ordning som krävs
- Uppgift 2: tre gränsvärden, $\frac{\ln(e^{2x} + 4x^2)}{3x+5}$ i oändligheten, en derivata av $\arctan$ som gränsvärde och ett rationellt uttryck med ensidiga gränsvärden
- Uppgift 3: definitionsmängd och derivata för inversen till $\frac{t - \sin t}{1 - \cos t}$
- Uppgift 4: induktionsbevis för $\frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$
- Uppgift 5: nollställen, extremvärden, konvexitet och asymptoter för $\frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$
- Uppgift 6: kulstötning, implicit derivering av kastvidden och maximal kastvidd

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Taylorutveckling av $\ln(1+x)$

Låt

$$f(x) = \ln(1+x).$$

(a) Finn Taylorutvecklingen (inklusive felterm) av ordning 4 kring punkten $x = 0$ av $f(x)$. (2p)

(b) Använd taylorpolynomet P_4 för att beräkna ett närmevärde till $\ln 2$. Ge en uppskattning av felet som görs med denna approximation. (2p)

(c) Vilken är den lägsta ordning n av Taylorpolynom kring $x = 0$ av $f(x)$ som krävs för att man ska kunna garantera att det absoluta felet vid approximation av $\ln 2$ är mindre än $1/100$? Motivera! (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Taylor's formel med Lagranges restterm.

Ledtråd 2

$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ och $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} x^{n+1}$ för något s mellan 0 och x . Hitta ett allmänt uttryck för $f^{(n)}(x)$.

Ledtråd 3

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}. \text{ För } x = 1 \text{ ligger } s \text{ i } (0, 1), \text{ så } \frac{1}{(1+s)^{n+1}} < 1.$$

Lösning

(a) Derivatorna är

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

och allmänt $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. I $x = 0$: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$, $f^{(4)}(0) = -6$. Alltså

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + E_4(x), \quad E_4(x) = \frac{f^{(5)}(s)}{5!} x^5 = \frac{x^5}{5(1+s)^5}$$

för något s mellan 0 och x .

(b)

$$\ln 2 = f(1) \approx P_4(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12 - 6 + 4 - 3}{12} = \boxed{\frac{7}{12}}$$

Felet är $E_4(1) = \frac{1}{5(1+s)^5}$ för något $s \in (0, 1)$. Funktionen $\frac{1}{(1+s)^5}$ är avtagande, så

$$\frac{1}{160} = \frac{1}{5 \cdot 2^5} < E_4(1) < \frac{1}{5} \implies \boxed{|E_4(1)| < \frac{1}{5}}$$

Felet är positivt, så $\frac{7}{12}$ är en underskattning och

$$\frac{7}{12} < \ln 2 < \frac{7}{12} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$$

(Det verkliga felet är $\ln 2 - \frac{7}{12} \approx 0,110$.)

(c) Med den allmänna derivatan blir resttermen i $x = 1$

$$E_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!(1+s)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+s)^{n+1}}, \quad 0 < s < 1$$

så $|E_n(1)| < \frac{1}{n+1}$. Uppskattningen kan inte göras bättre utan att veta mer om s , eftersom $\frac{1}{(1+s)^{n+1}}$ kan ligga godtyckligt nära 1. För att garantera $|E_n(1)| < \frac{1}{100}$ krävs $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{100}$, dvs.

$$\boxed{n = 99}$$

Anmärkning: $P_n(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ är delsummor av den alternerande harmoniska serien, som konvergerar mycket långsamt. Räknar man ut felet numeriskt räcker faktiskt $n = 50$, men det kan inte garanteras med Lagranges restterm.

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{2x} + 4x^2)}{3x + 5}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan(1+h) - \frac{\pi}{4}}{h}.$$

Ledning: Derivata av arctan. (2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}.$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är ett **gränsvärde** i oändligheten med **logaritmlagar**; (b) är en **derivatans definition** i förklädning; (c) kräver **faktorisering** och ensidiga **oegentliga gränsvärden**.

Ledtråd 2

(a) Bryt ut den dominerande termen e^{2x} inuti logaritmen. (b) $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$. (c) Faktorisera täljare och nämnare och förkorta.

Ledtråd 3

(a) $\ln(e^{2x}(1 + \frac{4x^2}{e^{2x}})) = 2x + \ln(1 + \frac{4x^2}{e^{2x}})$. (b) Gränsvärdet är $\frac{d}{dx} \arctan x$ i $x = 1$. (c) Uttrycket blir $\frac{x+2}{x-2}$; jämför $x \rightarrow 2^+$ och $x \rightarrow 2^-$.

Lösning

(a) Bryt ut e^{2x} i logaritmen:

$$\frac{\ln(e^{2x} + 4x^2)}{3x + 5} = \frac{2x + \ln(1 + \frac{4x^2}{e^{2x}})}{3x + 5} = \frac{2 + \frac{1}{x} \ln(1 + \frac{4x^2}{e^{2x}})}{3 + \frac{5}{x}}$$

Standardgränsvärdet $\frac{x^2}{e^{2x}} \rightarrow 0$ ger $\ln(1 + \frac{4x^2}{e^{2x}}) \rightarrow \ln 1 = 0$, så

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{2x} + 4x^2)}{3x + 5} = \frac{2 + 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}$$

(b) Eftersom $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ är uttrycket en differenskvot för $\arctan$ i punkten 1:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan(1+h) - \arctan 1}{h} = \frac{d}{dx} \arctan x \Big|_{x=1} = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

(c) Faktorisering ger, för $x \neq 2$,

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{x+2}{x-2}$$

Täljaren går mot 4 och nämnaren mot 0, med olika tecken från olika håll:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-2} = -\infty$$

gränsvärdet existerar inte

Kontrollerat mot facit.

3. Inversen till $\frac{t - \sin t}{1 - \cos t}$

Man kan med viss möda visa att funktionen

$$f(t) = \frac{t - \sin t}{1 - \cos t}$$

är strängt växande och därmed 1-1 på intervallet $(0, 2\pi)$. Därmed har den invers f^{-1} .

(a) Bestäm inversens definitionsmängd. Motivera! (2p)

(b) Beräkna $(f^{-1})'(\frac{\pi}{2})$. (3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Invers funktion: inversens definitionsmängd är f 's värdemängd. Derivatan fås med **Inversa funktioners derivata**.

Ledtråd 2

(a) En kontinuerlig, strängt växande funktion på $(0, 2\pi)$ har värdemängden $(\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t), \lim_{t \rightarrow 2\pi^-} f(t))$. (b) $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(b)}$ där $f(b) = a$.

Ledtråd 3

(a) Vid $t \rightarrow 0^+$ hjälper **Taylorutveckling**: täljaren är $\frac{t^3}{6} + \dots$ och nämnaren $\frac{t^2}{2} + \dots$. (b) Prova $b = \pi$.

Lösning

(a) f är kontinuerlig och strängt växande på $(0, 2\pi)$, så värdemängden är intervallet mellan de ensidiga gränsvärdena i ändpunkterna.

Vid $t \rightarrow 0^+$. Med $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + t^5 B_1(t)$ och $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^4 B_2(t)$, där B_1, B_2 är begränsade nära 0:

$$\frac{t - \sin t}{1 - \cos t} = \frac{\frac{t^3}{6} - t^5 B_1(t)}{\frac{t^2}{2} - t^4 B_2(t)} = \frac{\frac{t}{6} - t^3 B_1(t)}{\frac{1}{2} - t^2 B_2(t)} \rightarrow \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$$

Vid $t \rightarrow 2\pi^-$. Täljaren går mot $2\pi - 0 = 2\pi > 0$ och nämnaren $1 - \cos t$ mot 0 genom positiva värden, så $f(t) \rightarrow +\infty$.

Inversens definitionsmängd är f 's värdemängd:

$$D_{f^{-1}} = (0, \infty)$$

(b) Först behövs $b = f^{-1}(\frac{\pi}{2})$, dvs. lösningen till $f(b) = \frac{\pi}{2}$. Man ser att

$$f(\pi) = \frac{\pi - \sin \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{\pi - 0}{1 - (-1)} = \frac{\pi}{2}$$

och eftersom f är injektiv är $b = \pi$ den enda lösningen. Kvotregeln ger

$$f'(t) = \frac{(1 - \cos t)(1 - \cos t) - (t - \sin t) \sin t}{(1 - \cos t)^2}$$

så

$$f'(\pi) = \frac{2 \cdot 2 - (\pi - 0) \cdot 0}{2^2} = 1$$

Formeln för inversens derivata (som fås genom att derivera $f(f^{-1}(t)) = t$ implicit):

$$(f^{-1})' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\frac{\pi}{2}))} = \frac{1}{f'(\pi)} = \boxed{1}$$

Kontrollerat mot facit.

4. Högre derivator av $\sin x$ genom induktion

Visa att

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin x) = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$$

för varje heltal $n = 1, 2, 3, \dots (5p)$

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ett bevis med **induktion** över derivatans ordning.

Ledtråd 2

Basfallet är $n = 1$. I induktionssteget är $\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} \sin x = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^p}{dx^p} \sin x \right)$.

Ledtråd 3

Nyckeln är identiteten $\cos u = \sin \left(u + \frac{\pi}{2} \right)$, som följer av additionsformeln för sinus med $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ och $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

 Lösning

Hjälpresultat. För varje reellt u ger additionsformeln (Trigonometri)

$$\sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \sin u \cos \frac{\pi}{2} + \cos u \sin \frac{\pi}{2} = \sin u \cdot 0 + \cos u \cdot 1 = \cos u$$

Basfall. För $n = 1$ är

$$VL = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = HL$$

enligt hjälpresultatet med $u = x$.

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för något heltal $n = p \geq 1$, dvs.

$$\frac{d^p}{dx^p} \sin x = \sin\left(x + \frac{p\pi}{2}\right) \quad (\text{induktionsantagandet})$$

Då är, med kedjeregeln och hjälpresultatet med $u = x + \frac{p\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} \sin x &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^p}{dx^p} \sin x \right) = \frac{d}{dx} \sin\left(x + \frac{p\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{p\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + \frac{p\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(p+1)\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$.

Enligt induktionsprincipen gäller

$$\boxed{\frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ för alla heltal } n \geq 1}$$

Kontroll: för $n = 2$ ger formeln $\sin(x + \pi) = -\sin x$ och för $n = 4$ ger den $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, som det ska vara.

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $\frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$

Bestäm nollställena, lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan

$$y = f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}.$$

Skissera kurvan samt ange i vilka intervall funktionen är växande/avtagande respektive konvex/konkav. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning av en rationell funktion: polynomdivision för asymptoter, teckenschema för derivatan och andraderivatan för konvexitet.

Ledtråd 2

Faktorisera täljaren för nollställena. Polynomdivision ger $f(x) = kx + m + \frac{r}{x-2}$, och då är $y = kx + m$ en sned asymptot. Nämnarens nollställe ger en lodrät asymptot.

Ledtråd 3

$$f(x) = x + 3 + \frac{4}{x-2}, \text{ så } f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-2)^2} \text{ och } f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}.$$

Lösning

Nollställena. $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, så

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x-2}, \quad \boxed{\text{nollställena } x = 1 \text{ och } x = -2}$$

Kurvan skär y-axeln i $f(0) = \frac{-2}{-2} = 1$.

Asymptoter. Polynomdivision:

$$f(x) = \frac{x(x-2) + 3(x-2) + 4}{x-2} = x + 3 + \frac{4}{x-2}$$

Eftersom $\frac{4}{x-2} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \pm\infty$ är $y = x + 3$ en sned asymptot åt båda hållen. Vid $x = 2$ går täljaren $(x-1)(x+2) \rightarrow 4$ och nämnaren mot 0:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$\boxed{\text{lodrät asymptot } x = 2, \quad \text{sned asymptot } y = x + 3 \text{ då } x \rightarrow \pm\infty}$

Någon vågrät asymptot finns inte, och f saknar globala extremvärden.

Derivata.

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 4}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

Kritiska punkter: $x = 0$ och $x = 4$.

	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x < 4$	4
x	–	0	+	+	+	+
$x - 4$	–	–	–	–	–	0
$(x - 2)^2$	+	+	+	0	+	+
$f'(x)$	+	0	–	odef.	–	0
$f(x)$	↗	lok. max	↘	asymptot	↘	lok.

$$\text{lok. max } f(0) = 1, \quad \text{lok. min } f(4) = \frac{16 + 4 - 2}{2} = 9$$

f är **växande** på $(-\infty, 0]$ och $[4, \infty)$ och **avtagande** på $[0, 2)$ och $(2, 4]$.

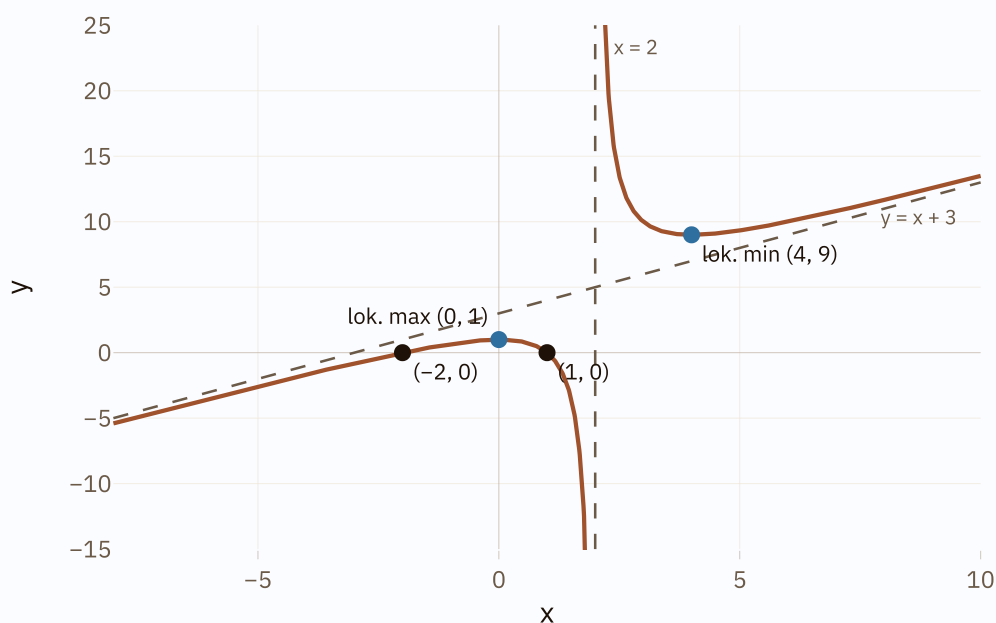
Andraderivata.

$$f''(x) = \frac{d}{dx} (1 - 4(x-2)^{-2}) = \frac{8}{(x-2)^3}$$

f'' är aldrig noll och byter tecken bara vid $x = 2$, som inte hör till definitionsmängden. Alltså är f **konkav** på $(-\infty, 2)$ och **konvex** på $(2, \infty)$, och

kurvan saknar inflexionspunkter

Skiss. Den vänstra grenen kommer underifrån längs asymptoten $y = x + 3$, går genom $(-2, 0)$, vänder i maximipunkten $(0, 1)$ och störtar mot $-\infty$ vid $x = 2$ efter att ha passerat $(1, 0)$. Den högra grenen kommer från $+\infty$ vid $x = 2$, vänder i minimipunkten $(4, 9)$ och närmar sig sedan asymptoten $y = x + 3$ ovanifrån. Kurvan är symmetrisk kring asymptoternas skärningspunkt $(2, 5)$.



Kontrollerat mot facit.

6. Kulstötning

Det resultat som en kulstötare uppnår beror bland annat på elevationsvinkeln θ och höjden h kulan lämnar handen.

Kastparabelns ekvation är

$$y = h + x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v^2} (1 + \tan^2 \theta)$$

där v är utgångsfarten och g tyngdaccelerationen. *Ledning:* Kulan träffar marken i punkten $(x, y) = (R, 0)$.

(a) Bilda kastvidden R som implicit funktion av $z = \tan \theta$. Bestäm $\frac{dR}{dz}$ genom implicit derivering. (2p)

(b) Hur långt kan han maximalt stöta? (2p)

(c) Hur ska θ väljas för att han ska stöta så långt som möjligt? (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Implicit derivering följd av en optimering: största kastvidden ligger där $\frac{dR}{dz} = 0$.

Ledtråd 2

Sätt in $(x, y) = (R, 0)$ och $\tan \theta = z$: $0 = h + Rz - \frac{gR^2}{2v^2}(1 + z^2)$. Derivera båda leden med avseende på z , med $R = R(z)$.

Ledtråd 3

$R' = 0$ ger $R - \frac{gR^2z}{v^2} = 0$, dvs. $z = \frac{v^2}{gR}$. Sätt tillbaka detta i sambandet och lös ut R .

Lösning

(a) Med $z = \tan \theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, och nedslagspunkten $(R, 0)$ bestäms $R = R(z)$ implicit av

$$-h = Rz - \frac{gR^2}{2v^2}(1 + z^2)$$

Derivera båda leden med avseende på z (produktregeln och kedjeregeln, $R = R(z)$):

$$0 = R'z + R - \frac{g}{2v^2}(2RR'(1 + z^2) + R^2 \cdot 2z)$$

Samla termerna med R' :

$$R - \frac{gR^2z}{v^2} = R' \left(\frac{gR}{v^2}(1 + z^2) - z \right)$$

$$\boxed{\frac{dR}{dz} = \frac{R - \frac{gR^2z}{v^2}}{\frac{gR}{v^2}(1 + z^2) - z}}$$

(b) När θ går mot $\pm \frac{\pi}{2}$ går kastvidden mot 0 (kulan kastas rakt upp eller rakt ned), så den största kastvidden antas i en inre punkt där $R'(z) = 0$. Täljaren måste då vara noll, och eftersom $R > 0$:

$$R - \frac{gR^2z}{v^2} = 0 \iff z = \frac{v^2}{gR}$$

Insättning i sambandet från (a):

$$-h = R \cdot \frac{v^2}{gR} - \frac{gR^2}{2v^2} \left(1 + \frac{v^4}{g^2 R^2}\right) = \frac{v^2}{g} - \frac{gR^2}{2v^2} - \frac{v^2}{2g}$$

$$\frac{gR^2}{2v^2} = h + \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2 + 2gh}{2g} \iff R^2 = \frac{v^2(v^2 + 2gh)}{g^2}$$

$$R_{\max} = \frac{v\sqrt{v^2 + 2gh}}{g}$$

(c) Den optimala vinkeln ges av $\tan \theta = z = \frac{v^2}{gR_{\max}}$:

$$\theta = \arctan \frac{v}{\sqrt{v^2 + 2gh}}$$

Eftersom $\frac{v}{\sqrt{v^2 + 2gh}} < 1$ när $h > 0$ är den optimala vinkeln något mindre än 45° . För $h = 0$ får man de välkända värdena $R_{\max} = \frac{v^2}{g}$ och $\theta = 45^\circ$.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Taylors formel](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Oegentliga gränsvärden](#)
- [Derivata](#)
- [Funktioner och invers](#)
- [Inversa funktioners derivata](#)
- [Gränsvärdesberäkning med Taylor](#)
- [Matematisk induktion](#)
- [Trigonometri](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)
- [Extremvärden](#)
- [Andraderivata och konvexitet](#)
- [Implicit derivering](#)