

M0047M-2020-05-27

19 okt. 2026, 12 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2020-05-27 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_200527.pdf, m0047m_200527sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: additionsformeln för arcustangens och en vinkel i ett rutnät
- Uppgift 2: tre gränsvärden: $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}$, en rot differens mot $-\infty$ och ett ensidigt gränsvärde med $\arctan$
- Uppgift 3: tangenten till astroiden $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ genom $(1, 3\sqrt{3})$
- Uppgift 4: relaterade hastigheter, den vertikala hastigheten i pariserhjulet London Eye
- Uppgift 5: den logistiska differentialekvationen, sigmoidens inflexionspunkt och asymptoter
- Uppgift 6: optimering, snabbaste vägen med roddbåt och till fots

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Additionsformeln för arcustangens

Antag att $-1 < x < 1$ och $-1 < y < 1$.

(a) Bevisa, exempelvis genom att derivera en lämplig funktion eller använda additionsformler, att

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

(3p)

(b) Beräkna vinkeln ψ (röd) i figuren härunder. Antag att var och en av de 6 kvadraterna (svarta) har sida 1. Kan formeln ovan användas på något sätt månnтро? (2p)

Figuren i tentan: ett rutnät av 3×2 enhetskvadrater (3 breda, 2 höga). Vinkelns spets ligger i mitten av den vänstra kanten. Därifrån går en blå sträcka till det övre högra hörnet och en grön sträcka till den nedre kantens punkt två rutor åt höger; en grön sträcka förbinder också den punkten med det övre högra hörnet. Vinkeln ψ ligger mellan den blå och den första gröna sträckan.

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) En identitet med **Arcusfunktioner**: visa att en funktion har derivatan noll och alltså är konstant (**Medelvärdessatsen**), eller använd additionsformeln för tangens (**Trigonometri**). (b) Dela upp vinkeln i två vinklar vars tangens kan läsas av i rutnätet.

Ledtråd 2

(a) Håll y fast och bilda $f(x) = \arctan \frac{x+y}{1-xy} - \arctan x$ på $-1 < x < 1$. (b) Den vågräta mittlinjen delar ψ i en vinkel ovanför och en under linjen.

Ledtråd 3

(a) $(1-xy)^2 + (x+y)^2 = (1+x^2)(1+y^2)$, och $f(0) = \arctan y$. (b) Delvinklarna är $\arctan \frac{1}{3}$ och $\arctan \frac{1}{2}$.

Lösning

(a) Håll $y \in (-1, 1)$ fast och sätt

$$f(x) = \arctan \frac{x+y}{1-xy} - \arctan x, \quad -1 < x < 1$$

Här är $|xy| < 1$, så $1-xy > 0$ och f är deriverbar på hela intervallet. Kvotregeln ger

$$\frac{d}{dx} \frac{x+y}{1-xy} = \frac{(1-xy) - (x+y)(-y)}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2}$$

så med kedjeregeln

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1+y^2}{(1-xy)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2 + (x+y)^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

Nämnaren är $1 - 2xy + x^2y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 = (1+x^2)(1+y^2)$, så

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Enligt medelvärdessatsen är f konstant på intervallet $(-1, 1)$, och konstanten är

$$f(0) = \arctan \frac{0+y}{1-0} - \arctan 0 = \arctan y$$

Alltså är $\arctan \frac{x+y}{1-xy} - \arctan x = \arctan y$, dvs.

$$\boxed{\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}, \quad -1 < x, y < 1}$$

Alternativt med additionsformler. Division av $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ med $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ (täljare och nämnare delade med $\cos \alpha \cos \beta$) ger

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Sätt $\alpha = \arctan x$ och $\beta = \arctan y$. Eftersom $-1 < x, y < 1$ är $-\frac{\pi}{4} < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4}$, så $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. På det intervallet är $\arctan$ invers till $\tan$, så $\alpha + \beta = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$.

(b) Lägg origo i vinkelns spets, mitt på den vänstra kanten. Den blå sträckan går till punkten $(3, 1)$ och den gröna till $(2, -1)$. Den vågräta mittlinjen delar $\psi = \alpha + \beta$ med

$$\alpha = \arctan \frac{1}{3}, \quad \beta = \arctan \frac{1}{2}$$

Formeln i (a) med $x = \frac{1}{3}$ och $y = \frac{1}{2}$ ger

$$\psi = \arctan \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \arctan \frac{5/6}{5/6} = \arctan 1$$

$$\boxed{\psi = \frac{\pi}{4}}$$

Alternativt geometriskt. De gröna sträckorna har längden $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ och den blå $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Eftersom $5 + 5 = 10$ är triangeln rätvinklig och likbent, så basvinkeln ψ är $\frac{\pi}{4}$.

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Bestäm följande gränsvärden (med motivering), om de existerar:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{2x}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \arctan\left(\frac{x-5}{x^2-7x+10}\right).$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden med standardgränsvärdet för e (Exponentialfunktioner och logaritmer), förlängning med konjugatet och oegentliga gränsvärden inuti en kontinuerlig funktion.

Ledtråd 2

(a) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e$. (b) Förläng med $\sqrt{x^2 + 2x} - x$ och kom ihåg att $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ när $x < 0$. (c) Faktorisera nämnaren.

Ledtråd 3

(a) Skriv uttrycket som $((1 + \frac{1}{x})^{\frac{x}{2}})$. (b) Nämnaren blir $2x$. (c) Kvoten blir $\frac{1}{x-2}$, som går mot $-\infty$ från vänster.

Lösning

(a) Med standardgränsvärdet $(1 + \frac{1}{x})^x \rightarrow e$ och kontinuiteten hos $u \mapsto u^2$:

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x} = \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^2 \rightarrow e^2$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x} = e^2}$$

(b) Förläng med rotkonjugatet (för stora negativa x är $x^2 + 2x > 0$):

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - x}{(\sqrt{x^2 + 2x} + x)(\sqrt{x^2 + 2x} - x)} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - x}{x^2 + 2x - x^2} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - x}{2x}$$

För $x < 0$ är $\sqrt{x^2 + 2x} = |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = -x \sqrt{1 + \frac{2}{x}}$, så

$$\frac{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x}{2x} = -\frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1}{2} \rightarrow -\frac{1+1}{2} = -1$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = -1}$$

(c) Nämnaren har nollställena 2 och 5, så $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$ och för $x \nearrow 5$

$$\frac{x-5}{x^2 - 7x + 10} = \frac{1}{x-2} \rightarrow -\infty \quad \text{då } x \rightarrow 2^-$$

Eftersom $\arctan u \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ då $u \rightarrow -\infty$ blir

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2^-} \arctan\left(\frac{x-5}{x^2 - 7x + 10}\right) = -\frac{\pi}{2}}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Tangent till en astroid

Finn tangenten till *astroiden*

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 4$$

genom punkten $(1, 3\sqrt{3})$. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Implicit derivering ger tangentens lutning; sedan enpunktsformeln för en rät linje.

Ledtråd 2

Kontrollera först att punkten ligger på kurvan. Betrakta $y = y(x)$ och derivera båda leden med avseende på x .

Ledtråd 3

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0 \text{ ger } y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}.$$

Lösning

Punkten ligger på kurvan: $1^{2/3} + (3\sqrt{3})^{2/3} = 1 + (3^{3/2})^{2/3} = 1 + 3 = 4$.

Lutning. Låt $y = y(x)$ nära punkten och derivera implicit:

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0 \iff y' = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$$

I punkten $(1, 3\sqrt{3})$:

$$k = -(3\sqrt{3})^{1/3} = -(3^{3/2})^{1/3} = -\sqrt{3}$$

Tangent. Enpunktsformeln ger $y - 3\sqrt{3} = -\sqrt{3}(x - 1)$, dvs.

$$y = -\sqrt{3}(x - 4) = 4\sqrt{3} - \sqrt{3}x$$

Kontrollerat mot facit.

4. Vertikal hastighet i London Eye

Pariserhjulet *London Eye* har en diameter på 120 meter och roterar ett varv på 30 minuter. Med vilken vertikal hastighet stiger man när man är 96 meter över lägsta punkten på hjulet och på väg uppåt? (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Relaterade hastigheter: uttryck höjden i vridningsvinkeln och derivera med avseende på tiden med **kedjeregeln** (Elementära funktioners derivator).

Ledtråd 2

Lägg origo i hjulets centrum. En punkt på hjulet är $(60 \cos \theta, 60 \sin \theta)$, där vinkelhastigheten är $\theta' = \frac{2\pi}{30}$ rad/min.

Ledtråd 3

$y' = 60 \cos \theta \cdot \theta' = x \theta'$. Höjden 96 m över lägsta punkten ger $y = 36$, och "på väg uppåt" (moturs rotation) ger $x = +48$.

Lösning

Lägg origo i hjulets centrum. Radien är 60 m, så centrum ligger 60 m över lägsta punkten. Låt hjulet rotera moturs (ingen inskränkning) och låt $\theta(t)$ vara vridningsvinkeln från positiva x-axeln. En gondol har då koordinaterna

$$x = 60 \cos \theta, \quad y = 60 \sin \theta$$

Ett varv på 30 minuter ger vinkelhastigheten

$$\theta'(t) = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15} \text{ rad/min}$$

Läget. 96 m över lägsta punkten betyder $y = 96 - 60 = 36$ m. Då är

$$x = \pm\sqrt{60^2 - 36^2} = \pm 12\sqrt{5^2 - 3^2} = \pm 48 \text{ m}$$

Vid moturs rotation rör sig gondolen uppåt på den högra halvan av hjulet, så $x = 48$ m.

Hastigheten. Kedjeregeln ger

$$y' = \frac{d}{dt}(60 \sin \theta) = 60 \cos \theta \cdot \theta' = x \theta' = 48 \cdot \frac{2\pi}{30}$$

$$y' = \frac{16\pi}{5} \text{ m/min} \approx 10,1 \text{ m/min}$$

Kontrollerat mot facit.

5. Den logistiska sigmoiden

I en enkel matematisk modell för antalet ackumulerade smittofall $y = y(t)$ i en typisk epidemi lyder y den *logistiska differentialekvationen*

$$\frac{dy}{dt} = ky(1 - y/L).$$

(a) Visa att *sigmoiden*

$$y(t) = \frac{L}{1 + e^{-k(t-T_0)}}$$

uppfyller differentialekvationen ovan. (2p)

(b) Låt $k = 1$, $L = 2$, $T_0 = 0$. Finn inflexionspunkter och asymptoter till sigmoiden ovan. Skissera kurvan. (3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är en kontroll med **kedjeregeln**: räkna ut båda leden. (b) är **kurvundersökning** med **andrerivat**.

Ledtråd 2

(a) Skriv $E = e^{-k(t-T_0)}$; då är $y = \frac{L}{1+E}$ och $E' = -kE$. (b) Undersök $t \rightarrow \pm\infty$ och tecknet på y'' .

Ledtråd 3

(b) Med $y = \frac{2e^t}{e^t + 1}$ blir $y' = \frac{2e^t}{(e^t + 1)^2}$ och $y'' = \frac{2e^t(1 - e^t)}{(e^t + 1)^3}$.

Lösning

(a) Sätt $E = e^{-k(t-T_0)}$, så att $E' = -kE$ och $y = \frac{L}{1+E}$. Vänsterledet:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{L}{(1+E)^2} \cdot E' = \frac{kLE}{(1+E)^2}$$

Högerledet:

$$ky\left(1 - \frac{y}{L}\right) = \frac{kL}{1+E} \left(1 - \frac{1}{1+E}\right) = \frac{kL}{1+E} \cdot \frac{E}{1+E} = \frac{kLE}{(1+E)^2}$$

Leden är lika, så $y(t)$ uppfyller $y' = ky(1 - y/L)$.

(b) Med $k = 1, L = 2, T_0 = 0$ är

$$y(t) = \frac{2}{1+e^{-t}} = \frac{2e^t}{e^t + 1}$$

Asymptoter. Eftersom $e^{-t} \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$ och $e^t \rightarrow 0$ då $t \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{2}{1+0} = 2, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \frac{0}{0+1} = 0$$

y är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, så det finns inga lodräta asymptoter, och de vågräta asymptoterna utesluter sneda:

$$y = 2 \text{ då } t \rightarrow \infty, \quad y = 0 \text{ då } t \rightarrow -\infty$$

Derivator. Kvotregeln ger

$$y'(t) = \frac{2e^t(e^t + 1) - 2e^t \cdot e^t}{(e^t + 1)^2} = \frac{2e^t}{(e^t + 1)^2} > 0$$

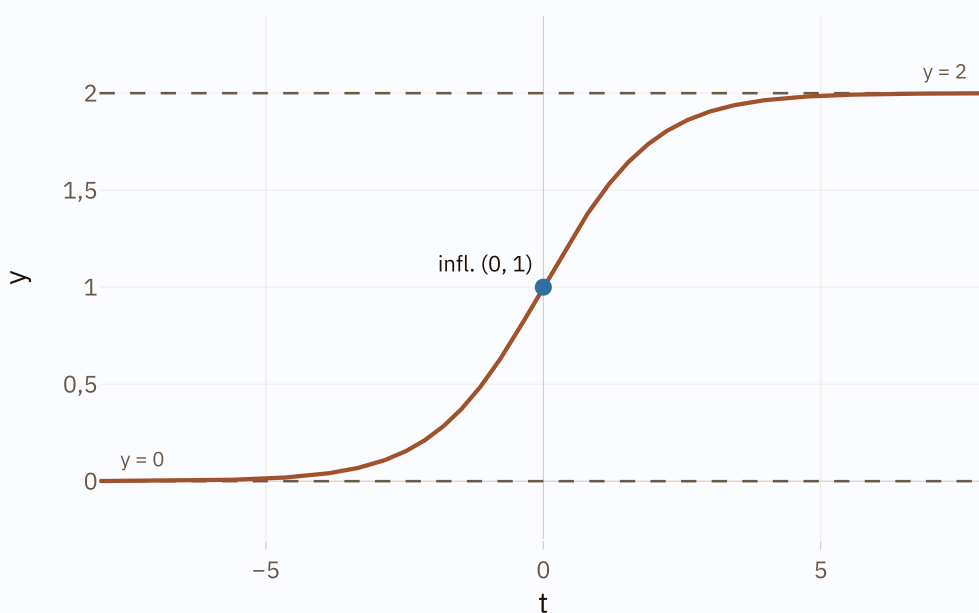
så y är strängt växande. Vidare

$$y''(t) = \frac{2e^t(e^t + 1)^2 - 2e^t \cdot 2(e^t + 1)e^t}{(e^t + 1)^4} = \frac{2e^t(1 - e^t)}{(e^t + 1)^3}$$

För $t < 0$ är $e^t < 1$ och $y'' > 0$ (konvex), för $t > 0$ är $e^t > 1$ och $y'' < 0$ (konkav). Teckenbytet i $t = 0$ och $y(0) = \frac{2}{2} = 1$ ger

inflexionspunkt $(0, 1)$

Skiss. En S-formad kurva som kommer in längs t -axeln ($y = 0$) från vänster, växer hela tiden, är brantast i inflexionspunkten $(0, 1)$ (lutning $y'(0) = \frac{1}{2}$) och närmar sig $y = 2$ åt höger. Kurvan är symmetrisk kring inflexionspunkten, eftersom $y(-t) = 2 - y(t)$.



Kontrollerat mot facit.

6. Snabbaste vägen till brasan

Teknologen Karen, kall och blöt efter ett kraftigt regnväder, befinner sig i en roddbåt R i en sjö 4 km från närmsta punkten A på den rätlinjiga stranden. Hon vill så snabbt som möjligt komma fram till den värmande brasan i vindskyddet P på stranden genom att först ro till stranden och sedan med blöta

stövlar gå den eventuellt resterande sträckan till P . Avståndet mellan A och P är 3 km. Mot vilken punkt S på stranden ska hon ro om hon rör med 4 km/h och går med 5 km/h? (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Optimering av en funktion på ett slutet intervall: jämför kritiska punkter och ändpunkter.

Ledtråd 2

Låt $x = |AS|$ med $0 \leq x \leq 3$. Den totala tiden är $T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4} + \frac{3-x}{5}$.

Ledtråd 3

$T'(x) = 0$ ger $5x = 4\sqrt{x^2 + 16}$, vars enda lösning ligger utanför intervallet. Vad säger det om tecknet på T' i $[0, 3]$?

Lösning

Låt x vara avståndet från A till S . Det lönar sig aldrig att ro till en punkt utanför sträckan AP (både rodden och promenaden blir då längre än att ro till närmaste ändpunkt), så $0 \leq x \leq 3$. Rodden är $\sqrt{x^2 + 4^2}$ km med 4 km/h och promenaden $3 - x$ km med 5 km/h:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4} + \frac{3-x}{5}, \quad 0 \leq x \leq 3$$

Ändpunkter.

$$T(0) = \frac{4}{4} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} \text{ h} = 96 \text{ min}, \quad T(3) = \frac{5}{4} + 0 = \frac{5}{4} \text{ h} = 75 \text{ min}$$

Kritiska punkter. T är deriverbar överallt och

$$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 16}} - \frac{1}{5}$$

$T'(x) = 0$ kräver $5x = 4\sqrt{x^2 + 16}$, så $x > 0$ och efter kvadrering $25x^2 = 16x^2 + 256$, dvs. $9x^2 = 256$ och $x = \frac{16}{3}$. Den punkten ligger utanför $[0, 3]$. Eftersom $5x < 4\sqrt{x^2 + 16}$ för $0 \leq x < \frac{16}{3}$ (till exempel $x = 0$ ger $0 < 16$) är $T'(x) < 0$ på hela $[0, 3]$, så T är strängt avtagande där och

minimum antas i $x = 3$:

$$S = P : \text{Karen ska ro direkt till vindskyddet, vilket tar } \frac{5}{4} \text{ h} = 1 \text{ h } 15 \text{ min}$$

Kontrollerat mot facit.

Se även

- M0065M
- Arcusfunktioner
- Trigonometri
- Medelvärdessatsen
- Gränsvärden
- Oegentliga gränsvärden
- Exponentialfunktioner och logaritmer
- Kontinuitet
- Implicit derivering
- Deriveringsregler
- Elementära funktioners derivator
- Grafritning och asymptoter
- Andraderivata och konvexitet
- Extremvärden