

M0047M-2020-04-02

19 okt. 2026, 11 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2020-04-02 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_200402.pdf, m0047m_200402sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för n :te derivatan av xe^{-x} och en binomialsumma
- Uppgift 2: tre gränsvärden, $\frac{\sin 2x}{3x}$ i oändligheten, x^{x^2} och en differens av bråk
- Uppgift 3: injektivitet, invers, definitionsmängd och värdemängd för $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$
- Uppgift 4: approximation av $\sqrt{2}$ med linjärisering och Newton–Raphsons metod
- Uppgift 5: nollställen, extremvärden, inflexionspunkt och asymptoter för $\frac{x^2+x-2}{x^2}$
- Uppgift 6: optimering, den mest ekonomiska hastigheten för en lastbilstransport

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Derivator av xe^{-x} och en binomialsumma

(a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal n gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n}(xe^{-x}) = (-1)^n(x-n)e^{-x}.$$

(4p)

(b) Visa, exempelvis med hjälp av binomialsatsen, att

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k = (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är ett bevis med **induktion** där induktionssteget är en derivering (**produktregeln**). (b) är en direkt tillämpning av binomialsatsen (**Talföljder och summor**).

Ledtråd 2

(a) Basfallet är $n = 1$. Anta att formeln gäller för $n = p$ och derivera båda leden en gång till:

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} = \frac{d}{dx} \frac{d^p}{dx^p}. \quad (b) \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Ledtråd 3

$$(a) \quad \frac{d}{dx} ((x - p)e^{-x}) = (p + 1 - x)e^{-x}. \quad (b) \quad \text{Välj } a = 1 \text{ och } b = -2.$$

Lösning

(a) Basfall. För $n = 1$ ger produktregeln

$$\frac{d}{dx} (xe^{-x}) = 1 \cdot e^{-x} - xe^{-x} = -(x - 1)e^{-x} = (-1)^1 (x - 1)e^{-x}$$

så formeln gäller.

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för något heltal $p \geq 1$ (induktionsantagandet):

$$\frac{d^p}{dx^p} (xe^{-x}) = (-1)^p (x - p)e^{-x}$$

Då är

$$\begin{aligned}\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}(xe^{-x}) &= \frac{d}{dx}((-1)^p(x-p)e^{-x}) = (-1)^p(1 \cdot e^{-x} - (x-p)e^{-x}) \\ &= (-1)^p(p+1-x)e^{-x} = (-1)^{p+1}(x-(p+1))e^{-x}\end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$. Enligt induktionsprincipen gäller

$$\boxed{\frac{d^n}{dx^n}(xe^{-x}) = (-1)^n(x-n)e^{-x} \text{ för alla heltal } n \geq 1}$$

(b) Binomialsatsen med $a = 1$ och $b = -2$ ger

$$(-1)^n = (1-2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-2)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k$$

vilket gäller för alla $n = 0, 1, 2, \dots$ (för $n = 0$ är båda leden 1).

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k = (-1)^n}$$

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Bestäm följande gränsvärden, om de existerar:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{3x}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^2}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right).$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden: (a) instängning, (b) skriv om potensen med **exponentialfunktionen**, (c) gemensam nämnare.

Ledtråd 2

(a) $-1 \leq \sin 2x \leq 1$. (b) $x^{x^2} = e^{x^2 \ln x}$ och e^t är kontinuerlig. (c) $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Ledtråd 3

(b) Standardgränsvärdet $x^a \ln x \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0^+$ för $a > 0$. (c) Täljaren blir $x - 2$, som kan förkortas bort.

Lösning

(a) För $x > 0$ gäller $-1 \leq \sin 2x \leq 1$, så

$$-\frac{1}{3x} \leq \frac{\sin 2x}{3x} \leq \frac{1}{3x}$$

Båda ytterleden går mot 0 då $x \rightarrow \infty$, och instängningssatsen ger

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{3x} = 0$$

(b) För $x > 0$ är $x^{x^2} = e^{\ln x^{x^2}} = e^{x^2 \ln x}$. Standardgränsvärdet ger $x^2 \ln x \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0^+$, och eftersom exponentialfunktionen är kontinuerlig är

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x} = e^0 = \boxed{1}$$

(c) Med gemensam nämnare $(x - 2)(x + 2)$:

$$\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = \frac{(x+2)-4}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x+2}, \quad x \neq \pm 2$$

så

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Inversen till $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad -2 < x < 2.$$

- (a) Visa att f är 1-1 (injektiv). (2p)
- (b) Finn inversen $f^{-1}(x)$. (2p)
- (c) Bestäm inversens definitionsmängd och värdemängd. (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Funktioner och invers: en strängt monoton funktion är injektiv, och inversen fås genom att lösa ut y ur $x = f(y)$.

Ledtråd 2

- (a) Visa att $f'(x) > 0$ på hela intervallet (**Derivata**). (b) Kvadrera $x = \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}$ och lös ut y^2 .
- (c) Inversens definitionsmängd är f 's värdemängd och tvärtom.

Ledtråd 3

- (a) $f'(x) = \frac{4}{(4-x^2)^{3/2}}$. (b) $y^2 = \frac{4x^2}{1+x^2}$; tecknet väljs så att x och y har samma tecken.
- (c) Undersök $f(x)$ då $x \rightarrow \pm 2$ (**Oegentliga gränsvärden**).

Lösning

(a) Med kvotregeln:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{4-x^2} - x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = \frac{(4-x^2) + x^2}{(4-x^2)^{3/2}} = \frac{4}{(4-x^2)^{3/2}} > 0$$

för $-2 < x < 2$. Alltså är f strängt växande på intervallet och därmed

f är injektiv

(b) Sätt $y = f^{-1}(x)$, dvs. $x = f(y) = \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}$. Kvadrering ger

$$x^2 = \frac{y^2}{4-y^2} \iff x^2(4-y^2) = y^2 \iff y^2(1+x^2) = 4x^2 \iff y = \pm \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Kvadreringen kan ha infört en falsk rot. Eftersom $\sqrt{4-y^2} > 0$ har $x = f(y)$ och y alltid samma tecken, så plustecknet gäller:

$$f^{-1}(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{Kontroll: } f\left(\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{2x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{4-\frac{4x^2}{1+x^2}}} = \frac{2x/\sqrt{1+x^2}}{2/\sqrt{1+x^2}} = x.$$

(c) f är kontinuerlig och strängt växande på $(-2, 2)$, och

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty$$

eftersom täljaren går mot ∓ 2 och nämnaren mot 0^+ . Alltså är $V_f = \mathbb{R}$, och

$$D_{f^{-1}} = V_f = \mathbb{R}, \quad V_{f^{-1}} = D_f = (-2, 2)$$

Det stämmer med formeln: $\left| \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \right| < \frac{2|x|}{|x|} = 2$ och $\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow \pm 2$ då $x \rightarrow \pm\infty$.

Kontrollerat mot facit.

4. Två approximationer av $\sqrt{2}$

Finn en enkel approximation av $\sqrt{2}$ på två olika sätt genom att:

(a) Linearisera funktionen $y = \sqrt{x}$ kring $a = \frac{9}{4}$. (2p)

(b) **(M0047M)**: Skriv kod/kommandon i MATLAB som utför två iterationer med Newton-Raphsons metod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

på funktionen $f(x) = x^2 - 2$ med startvärde $x_0 = 1$. (1p)

(b) **(M0029M)**: Utföra två iterationer med Newton-Raphsons metod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

på funktionen $f(x) = x^2 - 2$ med startvärde $x_0 = 1$. (1p)

(c) Förklara formeln i Newton-Raphsons metod ovan med figur och härledning. (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Linjärisering med **derivatan** (tangenten som approximation) och Newton-Raphsons metod (Ekvationslösning med derivata).

Ledtråd 2

(a) $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ och $\sqrt{2} \approx L(2)$. (b) Med $f(x) = x^2 - 2$ förenklas iterationen till $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$. (c) Tangenten i $(x_0, f(x_0))$ skär x -axeln i x_1 .

Ledtråd 3

(a) $f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{3}{2}$ och $f'\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{3}$. (b) $x_1 = \frac{3}{2}$. (c) Sätt $y = 0$ i tangentens ekvation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Lösning

(a) Med $f(x) = \sqrt{x}$ är $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, så

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{3}{2}, \quad f'\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

Linjäriseringen kring $a = \frac{9}{4}$ är

$$L(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \left(x - \frac{9}{4}\right)$$

och

$$\sqrt{2} = f(2) \approx L(2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{12} \approx 1,4167$$

(Det exakta värdet är $\sqrt{2} \approx 1,4142$.)

(b) (M0047M) Till exempel:

```
1 f = @(x) x.^2 - 2;
2 df = @(x) 2*x;
3 x0 = 1;
4 x1 = x0 - f(x0)/df(x0);
5 x2 = x1 - f(x1)/df(x1);
6 disp(x2)
```

eller med en `for`-slinga:

```
1 n = 2; % antal iterationer
2 f = @(x) x.^2 - 2;
3 df = @(x) 2*x;
4 x = 1; % startvärde
5 for k = 1:n
6     x = x - f(x)/df(x);
7 end
8 disp(x)
```

Koden skriver ut 1,4167, dvs. $\frac{17}{12}$.

(b) (M0029M) Med $f'(x) = 2x$ blir iterationen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

så

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1} \right) = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \boxed{\frac{17}{12}}$$

Samma värde som i (a).

(c) Vi söker ett nollställe r till f . Figur: grafen till $y = f(x)$ skär x -axeln i r . Från en gissning x_0 dras tangenten i punkten $(x_0, f(x_0))$; den skär x -axeln i x_1 , som ligger närmare r än x_0 .

Tangentens lutning är $f'(x_0)$, så enpunktsformeln ger

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Tangenten skär x -axeln i $(x_1, 0)$:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \iff x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

förutsatt att $f'(x_0) \neq 0$. Idén är att tangenten approximerar kurvan nära x_0 , så tangentens nollställe approximerar kurvans. Upprepas samma sak i $(x_1, f(x_1))$ fås $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, och så vidare.

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $\frac{x^2 + x - 2}{x^2}$

Bestäm nollställena, lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan

$$y = f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2}.$$

Skissera kurvan samt ange i vilka intervall funktionen är växande/avtagande respektive konvex/konkav. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: faktorisering för nollställena, gränsvärden för asymptoterna, teckenschema för derivatan och andraderivatan.

Ledtråd 2

Skriv $f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 1 + x^{-1} - 2x^{-2}$, så går både gränsvärdena och deriveringen enkelt.

Ledtråd 3

$f'(x) = \frac{4-x}{x^3}$ och $f''(x) = \frac{2(x-6)}{x^4}$. Glöm inte att $x = 0$ delar upp teckenschemat.

Lösning

Nollställen. f är definierad för $x \neq 0$ och

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2}$$

så

$$\boxed{\text{nollställen } x = -2 \text{ och } x = 1}$$

Grafen skär inte y -axeln.

Asymptoter. Med $f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$ är

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

så $y = 1$ är vågrät asymptot åt båda hållen (och då finns ingen sned asymptot). Nära 0 går täljaren mot -2 och nämnaren x^2 mot 0^+ , så

$$\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} f(x) = -\infty$$

$$\boxed{\text{asymptoter } y = 1 \text{ (vågrät, } x \rightarrow \pm\infty) \text{ och } x = 0 \text{ (lodrät)}}$$

Derivata.

$$f'(x) = -x^{-2} + 4x^{-3} = \frac{4-x}{x^3}$$

	$x < 0$	0	$0 < x < 4$	4	$x > 4$
$4 - x$	+	+	+	0	–
x^3	–	0	+	+	+
$f'(x)$	–	odef.	+	0	–
$f(x)$	↘	asymptot	↗	lok. max	↘

$$\text{lok. max } f(4) = \frac{16 + 4 - 2}{16} = \frac{9}{8}$$

f är **växande** på $(0, 4]$ och **avtagande** på $(-\infty, 0)$ och $[4, \infty)$. Några lokala minimum finns inte.

Andraderivata.

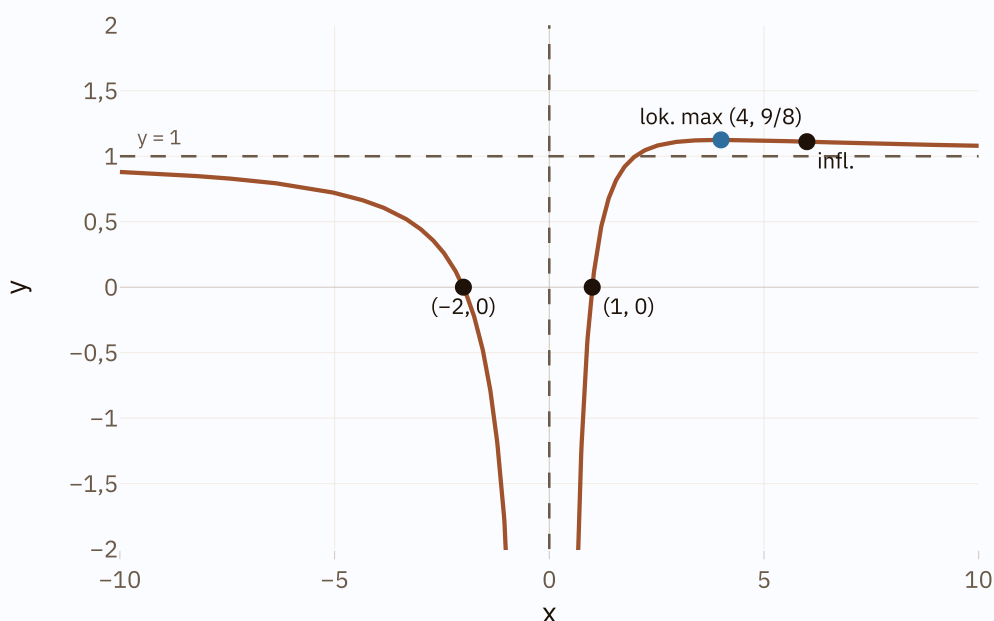
$$f''(x) = 2x^{-3} - 12x^{-4} = \frac{2x - 12}{x^4} = \frac{2(x - 6)}{x^4}$$

	$x < 0$	0	$0 < x < 6$	6	$x > 6$
$x - 6$	–	–	–	0	+
x^4	+	0	+	+	+
$f''(x)$	–	odef.	–	0	+
$f(x)$	konkav	asymptot	konkav	infl.	konvex

f är **konkav** på $(-\infty, 0)$ och $(0, 6)$ och **konvex** på $(6, \infty)$. Teckenbytet i $x = 6$ ger, med $f(6) = \frac{36 + 6 - 2}{36} = \frac{10}{9}$,

$$\text{inflexionspunkt } (6, \frac{10}{9})$$

Skiss. Till vänster kommer kurvan in under asymptoten $y = 1$ från $x = -\infty$, avtar genom nollstället $(-2, 0)$ och störtar ned mot $-\infty$ vid $x = 0$. Till höger stiger den från $-\infty$, går genom $(1, 0)$, korsar asymptoten $y = 1$ i $x = 2$ (där $\frac{1}{x} = \frac{2}{x^2}$), når maximum $(4, \frac{9}{8})$, passerar inflexionspunkten $(6, \frac{10}{9})$ och närmar sig sedan $y = 1$ ovanifrån.



Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning skriver $f''(x) = 2 \frac{x-6}{x^4}$, vilket är samma sak, men anger inte inflexionspunktens y -värde; det är $\frac{10}{9}$.

6. Den mest ekonomiska hastigheten

Teknologen Balder ska frakta en liten racerbil med lastbilstransport en sträcka på 200 kilometer. Bestäm den mest ekonomiska hastigheten och den minsta kostnaden för denna transport under följande förutsättningar: Balder kostar 320 kronor per timme och drivmedel kostar 10 kronor per liter (i landet Utopia). Vid hastigheten v kilometer/timme förbrukar lastbilen $\frac{1}{5} + v/200$ liter drivmedel per kilometer. Antag att $40 \leq v \leq 100$. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Optimering: **Extremvärden** för en kontinuerlig funktion på ett slutet, begränsat intervall.

Ledtråd 2

Restiden är $\frac{200}{v}$ timmar. Kostnaden är lönekostnad plus drivmedelskostnad, $K(v) = 320 \cdot \frac{200}{v} + 10 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{v}{200}\right) \cdot 200$. Jämför ändpunkterna och de kritiska punkterna.

Ledtråd 3

$$K(v) = \frac{64000}{v} + 400 + 10v \text{ och } K'(v) = 10 - \frac{64000}{v^2}.$$

Lösning

Vid hastigheten v km/h tar resan $T = \frac{200}{v}$ timmar. Lönekostnaden blir

$$K_1 = 320 \cdot \frac{200}{v} = \frac{64000}{v} \text{ kr}$$

och drivmedelskostnaden

$$K_2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{v}{200}\right) \cdot 200 = 400 + 10v \text{ kr}$$

Totalkostnaden är

$$K(v) = \frac{64000}{v} + 400 + 10v, \quad 40 \leq v \leq 100$$

K är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet, så ett minsta värde finns och antas i en ändpunkt, en singulär punkt eller en kritisk punkt.

- **Singulära punkter:** bara $v = 0$, som inte ligger i intervallet.
- **Kritiska punkter:** $K'(v) = 10 - \frac{64000}{v^2} = 0 \iff v^2 = 6400 \iff v = 80$ (eftersom $v > 0$).

Funktionsvärden:

$$K(40) = 1600 + 400 + 400 = 2400, \quad K(80) = 800 + 400 + 800 = 2000, \quad K(100) = \text{€}$$

Dessutom är $K''(v) = \frac{128000}{v^3} > 0$, så $v = 80$ är ett minimum. Det minsta värdet är

$v = 80 \text{ km/h}$ ger den minsta kostnaden 2000 kr

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Matematisk induktion](#)
- [Deriveringsregler](#)
- [Talföljder och summor](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Oegentliga gränsvärden](#)
- [Exponentialfunktioner och logaritmer](#)
- [Funktioner och invers](#)
- [Derivata](#)
- [Ekvationslösning med derivata](#)
- [Polynom och faktorisering](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)
- [Extremvärden](#)
- [Andraderivata och konvexitet](#)