

M0047M-2019-12-19

19 okt. 2026, 10 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2019-12-19 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_191219full.pdf, m0047m_191219sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för en formel för n :te derivatan av xe^{2x}
- Uppgift 2: tre gränsvärden: en kvot när $x \rightarrow \infty$, en kvot med absolutbelopp och en kvot med $\sin$ och $\tan$
- Uppgift 3: Taylorpolynom av ordning 2 för e^x med Lagranges restterm och en uppskattning av $\sqrt{e}$
- Uppgift 4: lokala extremvärden och värdemängd för $x^{x \ln x}$
- Uppgift 5: inverterbarhet, inversens värde och inversens derivata för $\frac{x^3}{1+x^2}$
- Uppgift 6: största cylindern inskriven i en kon

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Högre derivator av xe^{2x} genom induktion

Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal n gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n} (xe^{2x}) = (2^n x + n \cdot 2^{n-1}) e^{2x}.$$

(5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ett bevis med **induktion**, där induktionssteget är en derivering med **produktregeln**.

Ledtråd 2

Basfallet är $n = 1$. Anta att formeln gäller för $n = p$ och derivera båda leden en gång till:

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} = \frac{d}{dx} \frac{d^p}{dx^p}.$$

Ledtråd 3

$$\frac{d}{dx} [(2^p x + p \cdot 2^{p-1}) e^{2x}] = 2^p e^{2x} + 2(2^p x + p \cdot 2^{p-1}) e^{2x}. \text{ Samla ihop och använd } 2^p + p \cdot 2^p = (p+1)2^p.$$

Lösning

Basfall. För $n = 1$ ger produktregeln

$$\frac{d}{dx} (xe^{2x}) = e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = (2x + 1)e^{2x} = (2^1 x + 1 \cdot 2^0) e^{2x}$$

så formeln gäller för $n = 1$.

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för något heltal $p \geq 1$ (induktionsantagandet):

$$\frac{d^p}{dx^p} (xe^{2x}) = (2^p x + p \cdot 2^{p-1}) e^{2x}$$

Vi vill visa att $\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} (xe^{2x}) = (2^{p+1} x + (p+1)2^p) e^{2x}$. Med induktionsantagandet och produktregeln får vi

$$\begin{aligned} \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} (xe^{2x}) &= \frac{d}{dx} [(2^p x + p \cdot 2^{p-1}) e^{2x}] = 2^p e^{2x} + (2^p x + p \cdot 2^{p-1}) \cdot 2e^{2x} \\ &= (2^p + 2^{p+1} x + p \cdot 2^p) e^{2x} = (2^{p+1} x + (p+1)2^p) e^{2x} \end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$.

Enligt induktionsprincipen gäller

$$\frac{d^n}{dx^n} (xe^{2x}) = (2^n x + n \cdot 2^{n-1}) e^{2x} \text{ för alla heltal } n \geq 1$$

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Bestäm följande gränsvärden, om de existerar:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 15x^5 e^{-x}}{4x^2 \sin x - 7x^3}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x - 2| - |2x + 2|}{x}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - 3x}{2 \tan 3x - 4x \cos x}.$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden av typerna $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ och $\left[\frac{0}{0}\right]$, med standardgränsvärden och absolutbelopp.

Ledtråd 2

(a) Bryt ut x^3 i täljare och nämnare. (b) Skriv om absolutbeloppen utan beloppstecken för x nära 0. (c) Dela täljare och nämnare med x och använd $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$.

Ledtråd 3

(a) $\frac{x^2}{e^x} \rightarrow 0$ och $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ när $x \rightarrow \infty$. (b) För $-1 < x < 1$ är $|2x - 2| = 2 - 2x$ och $|2x + 2| = 2x + 2$. (c) $\frac{2 \tan 3x}{x} = 6 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos 3x}$.

Lösning

(a) Typen är $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Utbrytning av x^3 ger

$$\frac{3x^3 - 15x^5 e^{-x}}{4x^2 \sin x - 7x^3} = \frac{3 - 15 \cdot \frac{x^2}{e^x}}{4 \cdot \frac{\sin x}{x} - 7}$$

När $x \rightarrow \infty$ går $\frac{x^2}{e^x} \rightarrow 0$ (exponentialfunktionen växer snabbare än varje potens) och $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ (eftersom $|\sin x| \leq 1$). Alltså

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 15x^5 e^{-x}}{4x^2 \sin x - 7x^3} = \frac{3 - 0}{0 - 7} = -\frac{3}{7}$$

(b) Typen är $\left[\frac{0}{0}\right]$. Eftersom $|2x - 2| = 2 - 2x$ för $x < 1$ och $|2x + 2| = 2x + 2$ för $x \geq -1$ gäller för $-1 < x < 1$, $x \neq 0$:

$$\frac{|2x - 2| - |2x + 2|}{x} = \frac{(2 - 2x) - (2x + 2)}{x} = \frac{-4x}{x} = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x - 2| - |2x + 2|}{x} = -4$$

(c) Typen är $\left[\frac{0}{0}\right]$. Division med x i täljare och nämnare ger

$$\frac{\sin 5x - 3x}{2 \tan 3x - 4x \cos x} = \frac{5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} - 3}{6 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} - 4 \cos x} \rightarrow \frac{5 \cdot 1 - 3}{6 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1} = \frac{2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - 3x}{2 \tan 3x - 4x \cos x} = 1$$

Kontrollerat mot facit.

3. Taylorpolynom för e^x och en uppskattning av $\sqrt{e}$

Låt

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestäm ett andra ordningens taylorpolynom till f kring punkten $a = 0$, inklusive Lagranges restterm. (3p)

(b) Använd detta polynom för att visa att

$$\sqrt{e} > \frac{13}{8}.$$

(1p)

(c) Använd feltermen för att bestämma det maximala värdet differensen

$$\sqrt{e} - \frac{13}{8}$$

kan få. (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Taylor's formel med Lagranges restterm.

Ledtråd 2

$f(x) = P_2(x) + E_2(x)$ med $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$ och $E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3!}x^3$ för något s mellan 0 och x . Sätt sedan $x = \frac{1}{2}$.

Ledtråd 3

Alla derivator av e^x är e^x , så $E_2(\frac{1}{2}) = \frac{e^s}{48}$ med $0 < s < \frac{1}{2}$. Detta är positivt, och $e^s < e^{1/2}$.

 Lösning

(a) $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$, så $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$. Taylors formel ger

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + E_2(x), \quad E_2(x) = \frac{e^s}{6}x^3$$

för något s mellan 0 och x .

(b) Med $x = \frac{1}{2}$ är

$$\sqrt{e} = e^{1/2} = P_2\left(\frac{1}{2}\right) + E_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{e^s}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{13}{8} + \frac{e^s}{48}$$

med $0 < s < \frac{1}{2}$. Eftersom $e^s > 0$ är resttermen positiv, så

$$\sqrt{e} > \frac{13}{8}$$

(c) Differensen är precis resttermen:

$$\sqrt{e} - \frac{13}{8} = \frac{e^s}{48}, \quad 0 < s < \frac{1}{2}$$

Eftersom e^s är växande är $e^s < e^{1/2} = \sqrt{e}$, så $\sqrt{e} - \frac{13}{8} < \frac{\sqrt{e}}{48}$. För att få en gräns utan $\sqrt{e}$ i högerledet löser vi ut $\sqrt{e}$:

$$\sqrt{e}\left(1 - \frac{1}{48}\right) < \frac{13}{8} \iff \sqrt{e} < \frac{13}{8} \cdot \frac{48}{47} = \frac{78}{47}$$

Därmed

$$0 < \sqrt{e} - \frac{13}{8} < \frac{\sqrt{e}}{48} < \frac{1}{48} \cdot \frac{78}{47} = \frac{13}{376} \approx 0,035$$

Anmärkning: en enklare men grövre gräns fås av $e < 4$, dvs. $\sqrt{e} < 2$, vilket ger $\sqrt{e} - \frac{13}{8} < \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$. Den verkliga differensen är ungefär $0,024$.

Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning formulerar (c) som att bestämma "en övre gräns" för differensen; det exakta maximum av $\frac{e^s}{48}$ antas inte, eftersom $s < \frac{1}{2}$, så svaret är en övre gräns, $\frac{13}{376}$.

4. Funktionen $x^{x \ln x}$

Bilda funktionen

$$f(x) = x^{x \ln x}, \quad x > 0.$$

Bestäm eventuella lokala extremvärden. Gör teckenstudium av derivatan, skissera kurvan i dess huvuddrag och ange funktionens värdemängd. *Ledning: skriv först om $f(x)$ som $e^{\ln f(x)}$.* (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Skriv om med **logaritmlagarna** och gör en **teckenstudie av derivatan** och **kurvundersökning**.

Ledtråd 2

$\ln f(x) = x \ln x \cdot \ln x = x(\ln x)^2$, så $f(x) = e^{x(\ln x)^2}$. Undersök gränsvärdena när $x \rightarrow 0^+$ och $x \rightarrow \infty$ och derivera med kedjeregeln.

Ledtråd 3

$f'(x) = e^{x(\ln x)^2} (\ln x + 2) \ln x$, med nollställen $x = e^{-2}$ och $x = 1$. Använd $\sqrt{x} \ln x \rightarrow 0$ när $x \rightarrow 0^+$.

Lösning

Omskrivning. $\ln f(x) = x \ln x \cdot \ln x = x(\ln x)^2$, så

$$f(x) = e^{x(\ln x)^2}, \quad x > 0$$

Eftersom exponenten är ≥ 0 är $f(x) \geq e^0 = 1$ för alla $x > 0$.

Gränsvärden i ändpunkterna. Standardgränsvärdet $\sqrt{x} \ln x \rightarrow 0$ när $x \rightarrow 0^+$ ger

$$x(\ln x)^2 = (\sqrt{x} \ln x)^2 \rightarrow 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^0 = 1$$

och eftersom $x(\ln x)^2 \rightarrow \infty$ när $x \rightarrow \infty$ är $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Derivata. Kedjeregeln och produktregeln ger

$$f'(x) = e^{x(\ln x)^2} ((\ln x)^2 + x \cdot \frac{2 \ln x}{x}) = e^{x(\ln x)^2} (\ln x + 2) \ln x$$

Kritiska punkter: $\ln x = -2$ och $\ln x = 0$, dvs. $x = e^{-2}$ och $x = 1$.

	$0 < x < e^{-2}$	e^{-2}	$e^{-2} < x < 1$	1	$x > 1$
$\ln x + 2$	–	0	+	+	+
$\ln x$	–	–	–	0	+
$e^{x(\ln x)^2}$	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	lok. max	↘	lok. min	↗

Funktionsvärdena är

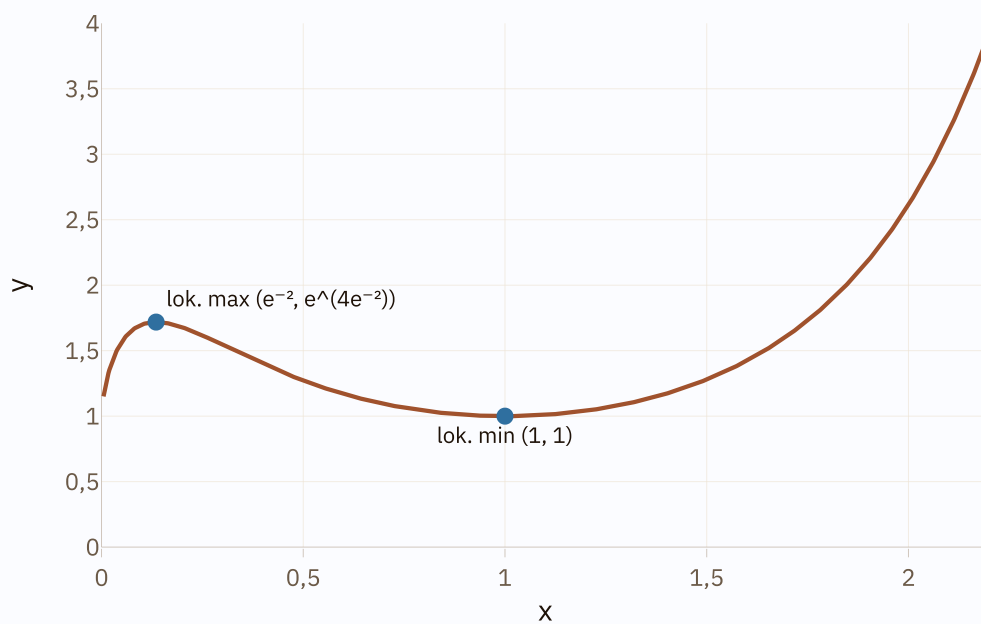
$$f(e^{-2}) = e^{e^{-2}(-2)^2} = e^{4e^{-2}} \approx 1,72, \quad f(1) = e^{1 \cdot 0^2} = 1$$

$$\boxed{\text{lok. max } f(e^{-2}) = e^{4e^{-2}}, \quad \text{lok. min } f(1) = 1}$$

Värdemängd. $f \geq 1$ med likhet i $x = 1$, och f är kontinuerlig med $f(x) \rightarrow \infty$ när $x \rightarrow \infty$. Enligt satsen om mellanliggande värden antas alla värden i $[1, \infty)$:

$$\boxed{V_f = [1, \infty)}$$

Skiss. Kurvan startar i $(0, 1)$ (utan att nå dit, eftersom $x > 0$), stiger brant till maximipunkten $(e^{-2}, e^{4e^{-2}}) \approx (0,14; 1,72)$, sjunker till minimipunkten $(1, 1)$ där den tangerar linjen $y = 1$ och växer sedan obegränsat.



Kontrollerat mot facit.

5. Inversen till $\frac{x^3}{1+x^2}$

Låt

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att funktionen är inverterbar. (2p)

(b) Finn

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

(1p)

(c) Beräkna

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right).$$

(2p)

Totalpoäng: 5

 Ledtråd 1

Inverterbarhet via monotonicitet, och Inversa funktioners derivata.

 Ledtråd 2

(a) En strängt växande funktion är injektiv. (b) Lös $f(y) = \frac{1}{2}$. (c) $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$ där $y = f^{-1}(x)$.

 Ledtråd 3

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(1 + x^2)^2}. \text{ I (b) blir ekvationen } 2y^3 - y^2 - 1 = 0; \text{ pröva } y = 1.$$

 Lösning

(a) Kvotregeln ger

$$f'(x) = \frac{3x^2(1 + x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(1 + x^2)^2}$$

Alltså är $f'(x) > 0$ för $x \neq 0$ och $f'(0) = 0$. Eftersom derivatan är positiv utom i en enda punkt är f strängt växande på $\mathbb{R}$ (man ser också direkt att $f(x) < 0 = f(0)$ för $x < 0$ och $f(x) > 0$ för $x > 0$). En strängt växande funktion är injektiv, så

 f är inverterbar(b) $y = f^{-1}(\frac{1}{2})$ betyder $f(y) = \frac{1}{2}$:

$$\frac{y^3}{1 + y^2} = \frac{1}{2} \iff 2y^3 = 1 + y^2 \iff 2y^3 - y^2 - 1 = 0$$

$y = 1$ är en rot, och faktorisering ger $(y - 1)(2y^2 + y + 1) = 0$. Andragradsfaktorn har diskriminanten $1 - 8 < 0$ och saknar reella rötter (vilket också följer av att f är injektiv). Alltså

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

(c) Implicit derivering av $x = f(y)$ med avseende på x ger $1 = f'(y)y'$, dvs.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{(1+y^2)^2}{y^2(y^2+3)}$$

I punkten $x = \frac{1}{2}$ är $y = 1$ och $f'(1) = \frac{1 \cdot 4}{2^2} = 1 \neq 0$, så

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(1)} = 1$$

Kontrollerat mot facit.

6. Största cylindern i en kon

Bestäm den maximala volymen av en rak cirkulär cylinder inskriven i en cirkulär kon med höjden 12 cm och basradien 4 cm. Vi förutsätter att symmetriaxlarna till cylindern och konen sammanfaller. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

En optimeringsuppgift: **Extremvärden** för en funktion av en variabel på ett slutet intervall.

Ledtråd 2

Låt cylindern ha radien r och höjden h , så $V = \pi r^2 h$. Likformiga trianglar i ett snitt genom symmetriaxeln ger sambandet mellan r och h .

Ledtråd 3

$$\frac{r}{12-h} = \frac{4}{12}, \text{ dvs. } h = 3(4-r), \text{ så } V(r) = 3\pi r^2(4-r) \text{ för } 0 \leq r \leq 4.$$

 Lösning

Låt cylindern ha radien r och höjden h . Dess volym är $V = \pi r^2 h$. Cylinderns övre kant ligger på konens mantel. I ett snitt genom symmetriaxeln ger likformiga trianglar (konens radie på höjden h är r , avståndet till spetsen är $12 - h$):

$$\frac{r}{12 - h} = \frac{4}{12} \iff 12 - h = 3r \iff h = 3(4 - r)$$

Alltså

$$V(r) = 3\pi r^2(4 - r) = 3\pi(4r^2 - r^3), \quad 0 \leq r \leq 4$$

I ändpunkterna är $V(0) = V(4) = 0$. Derivatans är

$$V'(r) = 3\pi(8r - 3r^2) = 3\pi r(8 - 3r)$$

med nollställena $r = 0$ och $r = \frac{8}{3} \in (0, 4)$. V' är positiv på $(0, \frac{8}{3})$ och negativ på $(\frac{8}{3}, 4)$, så $r = \frac{8}{3}$ ger maximum (alternativt $V''(\frac{8}{3}) = 3\pi(8 - 6 \cdot \frac{8}{3}) = -24\pi < 0$). Då är $h = 3(4 - \frac{8}{3}) = 4$ och

$$V\left(\frac{8}{3}\right) = 3\pi\left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{256\pi}{9}$$

$$V_{\max} = \frac{256\pi}{9} \text{ cm}^3 \approx 89,4 \text{ cm}^3 \quad (r = \frac{8}{3} \text{ cm}, h = 4 \text{ cm})$$

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Matematisk induktion](#)
- [Deriveringsregler](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Taylors formel](#)
- [Exponentialfunktioner och logaritmer](#)
- [Extremvärden](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)
- [Funktioner och invers](#)
- [Inversa funktioners derivata](#)