

M0047M-2019-10-30

19 okt. 2026, 10 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2019-10-30 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_191030full.pdf, m0047m_191030sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för den teleskoperande summan $\sum \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ och dess gränsvärde
- Uppgift 2: tre gränsvärden, en faktorisering, ett rotkonjugat och en division med x^2
- Uppgift 3: identiteten $\arctan e^x + \arctan e^{-x} = \frac{\pi}{2}$ via derivatan, samt en MATLAB-plott
- Uppgift 4: tangenten till Pascals snigel i punkten $(1, \sqrt{3})$ med implicit derivering
- Uppgift 5: kurvundersökning av xe^{-x^2}
- Uppgift 6: relaterade hastigheter, adiabatisk expansion $pV^\gamma = C$

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. En teleskoperande summa genom induktion

Formeln

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

gäller för alla alla positiva heltal n .

(a) Bevisa detta (exempelvis med induktion). (4p)

(b) Vad kommer summan att gå mot när n går mot oändligheten? (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ett bevis med **induktion** om en ändlig summa (**Talföljder och summor**), följt av ett [[Oegentliga gränsvärden|gränsvärde då $n \rightarrow \infty$]].

Ledtråd 2

Basfallet är $n = 1$. Anta att formeln gäller för $n = p$ och skriv summan till $p + 1$ som summan till p plus termen $\frac{1}{(p+1)(p+2)}$.

Ledtråd 3

Efter induktionsantagandet ska du förenkla $\frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)}$. Täljaren blir $p(p+2) + 1 = (p+1)^2$.

Lösning

(a) **Basfall.** För $n = 1$ är

$$VL = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = HL$$

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för något heltal $p \geq 1$, dvs. att

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{p+1} \quad (\text{induktionsantagandet})$$

Då är

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^p \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} \\ &= \frac{p(p+2) + 1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{(p+1)+1} \end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$. Enligt induktionsprincipen gäller

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ för alla heltal } n \geq 1$$

Alternativt bevis utan induktion. Partialbråksuppdelningen $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ gör summan teleskopande:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \boxed{1}$$

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Bestäm följande gränsvärden, om de existerar:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x - 2}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 3x}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7x^6 \ln x - 2x \sin x}{3x^2 \cos x - x^3 e^x}.$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden av typerna $[\frac{0}{0}]$ och $[\infty - \infty]$; (a) löses med **faktorisering**, (b) med rotkonjugat och (c) med standardgränsvärden.

Ledtråd 2

(a) $x = 2$ är ett nollställe till täljaren, så $x - 2$ är en faktor. (b) Förläng med $\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - 3x}$. (c) Dividera täljare och nämnare med x^2 .

Ledtråd 3

(a) $x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1)$. (b) Täljaren blir $6x$; bryt ut $\sqrt{x^2} = |x| = x$ i nämnaren. (c) Använd $x^a \ln x \rightarrow 0$ och $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$.

Lösning

(a) Täljaren är $8 - 4 - 2 - 2 = 0$ i $x = 2$, så polynomdivision med $x - 2$ ger

$$x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1)$$

och

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 1) = 4 + 2 + 1 = \boxed{7}$$

(b) Förläng med rotkonjugatet:

$$\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 3x} = \frac{(x^2 + 3x) - (x^2 - 3x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - 3x}} = \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - 3x}}$$

För $x > 0$ är $\sqrt{x^2} = x$, så

$$\frac{6x}{x(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x}})} = \frac{6}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}} \rightarrow \frac{6}{1 + 1}$$

då $x \rightarrow \infty$, eftersom roten är kontinuerlig. Alltså

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 3x}) = 3}$$

(c) Dividera täljare och nämnare med x^2 :

$$\frac{7x^6 \ln x - 2x \sin x}{3x^2 \cos x - x^3 e^x} = \frac{7x^4 \ln x - 2 \cdot \frac{\sin x}{x}}{3 \cos x - x e^x}$$

Då $x \rightarrow 0^+$ går $x^4 \ln x \rightarrow 0$ (standardgränsvärde), $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, $\cos x \rightarrow 1$ och $x e^x \rightarrow 0$. Alltså

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7x^6 \ln x - 2x \sin x}{3x^2 \cos x - x^3 e^x} = \frac{0 - 2}{3 - 0} = -\frac{2}{3}$$

Kontrollerat mot facit.

3. En arcustangensidentitet

(a) Visa att

$$\arctan e^x + \arctan e^{-x} = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(4p)

(b) Beskriv med kod/kommandon hur denna likhet skulle kunna visas grafiskt i MATLAB. (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Derivering av **Arcusfunktioner** med kedjeregeln (**Deriveringsregler**), och sedan att en funktion med derivatan noll på ett intervall är konstant där (**Medelvärdessatsen**).

Ledtråd 2

Bilda $f(x) = \arctan e^x + \arctan e^{-x}$ och visa att $f'(x) = 0$ för alla x . Bestäm sedan konstanten genom att beräkna f i en lämplig punkt.

Ledtråd 3

Förläng $\frac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}}$ med e^{2x} : det blir $\frac{e^x}{e^{2x} + 1}$. Välj $x = 0$, där $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

 Lösning

(a) Låt $f(x) = \arctan e^x + \arctan e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Kedjeregeln ger

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{e^{-x} \cdot e^{2x}}{(1+e^{-2x}) \cdot e^{2x}} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{e^x}{e^{2x}+1} = 0$$

för alla x . Eftersom $\mathbb{R}$ är ett intervall ger medelvärdessatsen att f är konstant, $f(x) = C$. Med $x = 0$:

$$C = f(0) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Alltså

$$\arctan e^x + \arctan e^{-x} = \frac{\pi}{2} \text{ för alla } x \in \mathbb{R}$$

(b) Plotta vänsterledet över ett intervall och se att grafen är den vågräta linjen på höjden $\frac{\pi}{2} \approx 1,571$, till exempel:

```
1 x = -10:0.01:10;
2 y = atan(exp(x)) + atan(exp(-x));
3 plot(x, y, x, pi/2*ones(size(x)), '--')
4 axis([-10 10 0 2])
```

De två kurvorna sammanfaller. (Lärarens förslag är samma kod utan den streckade jämförelselinjen.)

Kontrollerat mot facit.

4. Tangent till Pascals snigel

Finn tangenten till kurvan (Pascals snigel/limaçon)

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = x^2 + y^2$$

genom punkten $(1, \sqrt{3})$. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Implicit derivering: kurvan är inte en funktionsgraf, men lokalt kring punkten är $y = y(x)$.

Ledtråd 2

Kontrollera först att punkten ligger på kurvan. Derivera båda leden med avseende på x (kedjeregeln på y^2 ger $2yy'$) och sätt in $x = 1, y = \sqrt{3}$ innan du löser ut y' .

Ledtråd 3

$2(x^2 + y^2 - 2x)(2x + 2yy' - 2) = 2x + 2yy'$. I punkten är $x^2 + y^2 - 2x = 2$, så ekvationen blir $8\sqrt{3}y' = 2 + 2\sqrt{3}y'$.

Lösning

Punkten ligger på kurvan: $(1 + 3 - 2)^2 = 4 = 1 + 3$.

Implicit derivering. Med $y = y(x)$ ger derivering av båda leden

$$2(x^2 + y^2 - 2x)(2x + 2yy' - 2) = 2x + 2yy'$$

I $(1, \sqrt{3})$ är $x^2 + y^2 - 2x = 2$ och $2x - 2 = 0$, så

$$2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3}y' = 2 + 2\sqrt{3}y' \iff 6\sqrt{3}y' = 2 \iff y' = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Tangenten. Enpunktsformeln ger

$$y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}(x - 1) \iff y = \frac{\sqrt{3}}{9}x + \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{9}(x + 8)$$

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan xe^{-x^2}

Bestäm nollställena, lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan

$$y = f(x) = xe^{-x^2}.$$

Skissera kurvan samt ange i vilka intervall funktionen är växande/avtagande respektive konvex/konkav (Eng: *concave up/concave down*). (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: symmetri, gränsvärden, teckenschema för derivatan och andraderivatan.

Ledtråd 2

Funktionen är udda, så det räcker att studera $x \geq 0$. För $x \rightarrow \infty$: sätt $t = x^2$ och använd standardgränsvärdet $\frac{t^a}{e^t} \rightarrow 0$. Derivera med produktregeln.

Ledtråd 3

$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2} \text{ och } f''(x) = (4x^3 - 6x)e^{-x^2} = 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2}.$$

Lösning

Symmetri och nollställena. $f(-x) = -xe^{-x^2} = -f(x)$, så f är udda och grafen är symmetrisk kring origo. Eftersom $e^{-x^2} > 0$ har f samma tecken som x , och

$$\boxed{\text{enda nollstället är } x = 0}$$

Asymptoter. Med $t = x^2$ (så $x = \sqrt{t}$ för $x > 0$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{1/2}}{e^t} = 0$$

enligt standardgränsvärdet, och av uddheten går $f(x) \rightarrow 0$ även då $x \rightarrow -\infty$. f är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, så det finns inga lodräta asymptoter:

$$\boxed{\text{asymptot } y = 0 \text{ då } x \rightarrow \pm\infty}$$

Derivata.

$$f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot (-2x)e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2} = -2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}$$

med nollställena $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

	$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x > \frac{1}{\sqrt{2}}$
$1 - 2x^2$	-	0	+	0	-
e^{-x^2}	+	+	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	lok. min	↗	lok. max	↘

Med $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}e} \approx 0,429$:

$$\boxed{\text{lok. max } f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}e}, \quad \text{lok. min } f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}e}}$$

Eftersom $f \rightarrow 0$ i båda ändarna är de också globala. f är växande på $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ och avtagande på $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ och $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$.

Andraderivata.

$$f''(x) = -4xe^{-x^2} + (1 - 2x^2)(-2x)e^{-x^2} = (4x^3 - 6x)e^{-x^2} = 4x\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)e^{-x^2}$$

med nollställena $x = 0$ och $x = \pm\sqrt{3/2} \approx \pm 1,225$.

	$x < -\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 0$	0	$0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$
$4x$	-	-	-	0	+	+
$x - \sqrt{\frac{3}{2}}$	-	-	-	-	-	0
$x + \sqrt{\frac{3}{2}}$	-	0	+	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0

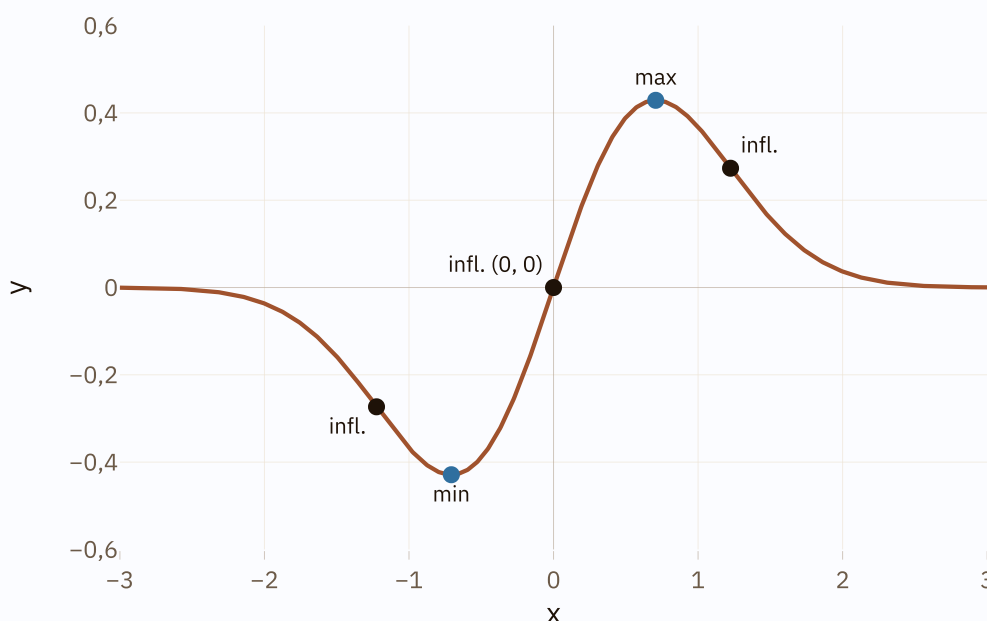
$x < -\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 0$	0	$0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$	$x > \sqrt{\frac{3}{2}}$	
$f(x)$	konkav	infl.	konvex	infl.	konkav	inf

f'' byter tecken i alla tre punkterna. Med $f(\pm\sqrt{3/2}) = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-3/2} \approx \pm 0,273$:

$$\text{inflexionspunkter } (0, 0) \text{ och } (\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-3/2})$$

f är konvex på $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$ och $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$ och konkav på $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ och $(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

Skiss. Kurvan kommer in från $y = 0$ under x -axeln långt till vänster, sjunker till minimum $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}e})$, stiger genom origo (inflexionspunkt, lutning 1) till maximum $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}e})$ och avtar sedan mot $y = 0$ ovanför x -axeln.



Kontrollerat mot facit.

6. Adiabatisk expansion

När luft expanderar adiabatiskt (dvs. utan värmeutbyte med omgivningen) uppfyller trycket p och volymen V sambandet

$$pV^\gamma = C \text{ (konstant)}, \quad \gamma = \frac{7}{5}.$$

Vid en viss tidpunkt är trycket 5 bar, volymen 28 dm³ och volymen ökande med hastigheten 2 dm³/s. Hur snabbt ändras trycket vid denna tidpunkt? (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Relaterade hastigheter: **Implicit derivering** av ett samband med avseende på tiden.

Ledtråd 2

Se $p = p(t)$ och $V = V(t)$ som funktioner av tiden och derivera $pV^\gamma = C$ med produkt- och kedjeregeln.

Ledtråd 3

$$p'V^\gamma + p\gamma V^{\gamma-1}V' = 0 \text{ ger } p' = -\gamma \frac{pV'}{V}.$$

Lösning

Med $p = p(t)$ och $V = V(t)$ ger derivering av $pV^\gamma = C$ med avseende på t :

$$p'V^\gamma + p \cdot \gamma V^{\gamma-1}V' = 0 \iff p' = -\frac{\gamma p V^{\gamma-1}V'}{V^\gamma} = -\gamma \frac{pV'}{V}$$

Vid tidpunkten är $p = 5$ bar, $V = 28$ dm³ och $V' = 2$ dm³/s:

$$p' = -\frac{7}{5} \cdot \frac{5 \cdot 2}{28} = -\frac{14}{28} = -\frac{1}{2} \text{ bar/s}$$

trycket minskar med $\frac{1}{2}$ bar/s

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
 - [Matematisk induktion](#)
 - [Talföljder och summor](#)
 - [Gränsvärden](#)
 - [Oegentliga gränsvärden](#)
 - [Polynom och faktorisering](#)
 - [Arcusfunktioner](#)
 - [Deriveringsregler](#)
 - [Medelvårdessatsen](#)
 - [Implicit derivering](#)
 - [Extremvärden](#)
 - [Grafritning och asymptoter](#)
 - [Andraderivata och konvexitet](#)
-