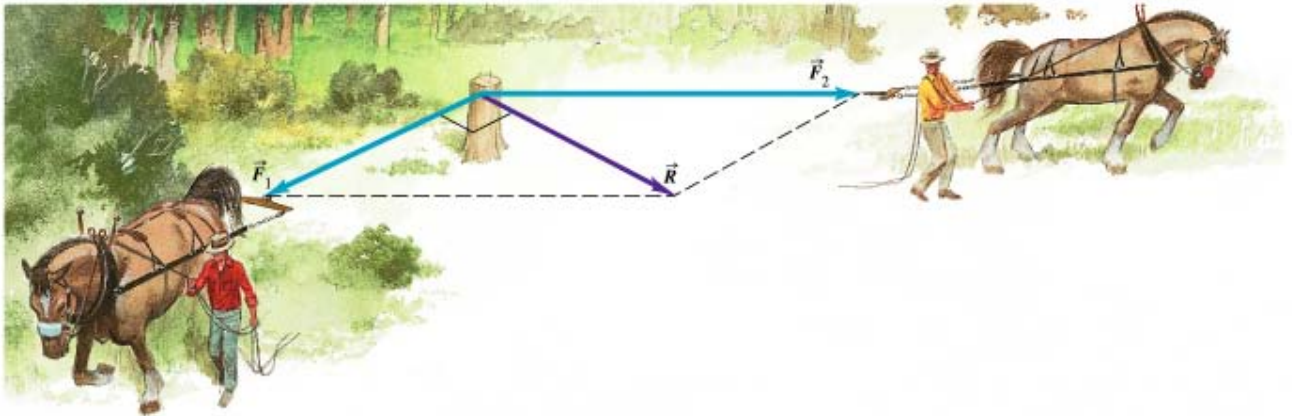


---

KOMPLETTERINGAR I

# Mekanik

---



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

ANDERS WÅHLIN

Uppdaterat av Nils Almqvist

Juni 2012

INSTITUTIONEN FÖR TILLÄMPAD FYSIK,  
MASKIN- OCH MATERIALTEKNIK

LULEÅ  
TEKNISKA  
UNIVERSITET



## Förord

Detta kompendium i mekanik är tänkt att komplettera Young-Freedman: "University Physics" med några mer ingenjörinriktade avsnitt som exempelvis krafter i sammansatta konstruktioner, icke konstant acceleration, tröghetsmoment och rotationsrörelse.

Luleå, aug 2002

Anders Wåhlin

Nödgdad att skriva komplettering om virtuella arbetets princip samt komplettera med ett par övriga saker.

Luleå, aug 2009

och

Luleå, juni 2012

Nils Almqvist

© 2002 Anders Wåhlin

Mångfaldigandet av innehållet i detta material helt eller delvis är enligt lagen om upphovsrätt av den 30 december 1960 förbjudet utan medgivande av författaren. Förbudet gäller varje form av mångfaldigande genom tryckning, kopiering, bandinspelning etc.

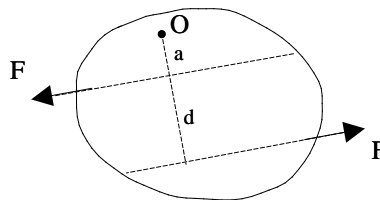
# Innehåll

KAPITEL M1	KRAFTPAR, TVÅKRAFTSDEL, UPPDELNING I DELSYSTEM .....	5
M1.1	Kraftpar .....	5
M1.2	Tvåkraftsdel .....	6
M1.3	Uppdelning i delsystem.....	6
KAPITEL M2	POLÄRA KOORDINATER.....	21
KAPITEL M3	INELASTISK STÖT.....	27
KAPITEL M4	MASSCENTRUM.....	33
M4.1	Partikelsystem, kroppar (utbredd massfördelning).....	33
M4.2	Sammansatta kroppar.....	35
KAPITEL M5	ICKE KONSTANT ACCELERATION .....	45
M5.1	Accelerationen är en funktion av tiden .....	45
M5.2	Accelerationen är en funktion av koordinaten.....	45
M5.3	Accelerationen är en funktion av hastigheten.....	46
KAPITEL M6	TRÖGHETS RADIE, SAMMANSATTA KROPPAR, TUNNA SKIVOR.....	51
M6.1	Tröghetsradie .....	51
M6.2	Sammansatta kroppar .....	52
M6.3	Tunna skivor .....	53
KAPITEL M7	ROTATION KRING FIX AXEL, LAGERKRAFTER .....	59
M7.1	Lagerkrafter.....	59
M7.2	Momentancentrum .....	60
KAPITEL M8	VIRTUELLT ARBETE, VIRTUELLA ARBETETS PRINCIP .....	69
M8.1	Arbete, virtuell förflyttning och virtuellt arbete.....	69
M8.2	Virtuella arbetets princip.....	71
M8.3	Virtuellt arbete uträttat av ett kraftpar (moment).....	74
M8.4	Virtuellt arbete för system av sammansatta stela kroppar....	75
M8.5	Lösningsmetodik .....	75

# Kapitel M1

## Kraftpar, tvåkraftsdel, uppdelning i delsystem

### M1.1 Kraftpar



Figur 1.1 Kraftpar

Två lika stora men motriktade krafter som inte har samma verkningslinjer bildar ett *kraftpar*. Resulterande kraft är noll, men kraftparet ger upphov till ett resulterande *moment*.

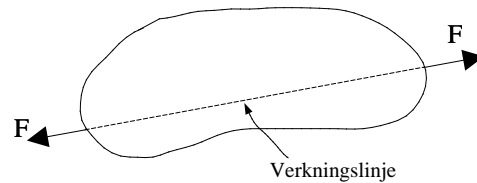
Momentet med avseende på en godtyckligt belägen punkt O i figuren ovan blir:

$$\tau_O = F(a + d) - Fa = Fd$$

dvs. momentet beror enbart på krafternas belopp och avståndet mellan deras verkningslinjer, oberoende av var momentpunkten ligger. Ett kraftpar ger således upphov till ett *rent moment*, vilket betecknas med någon av symbolerna nedan:



## M1.2 Tvåkraftsdel



Figur 1.2 Tvåkraftsdel

Om krafter angriper endast i två punkter på en kropp måste, för att kroppen skall vara i jämvikt, gälla att:

- Krafterna är lika stora men motriktade
- Krafterna har gemensam verkningslinje

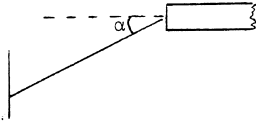
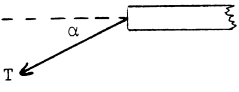
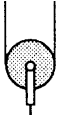

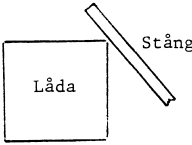
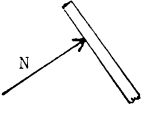
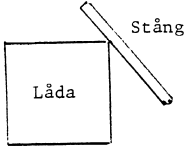
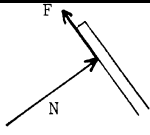
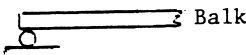
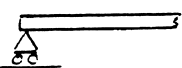
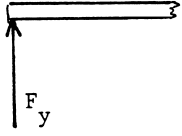
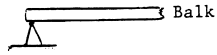
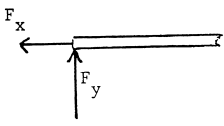
Om krafterna inte har samma verkningslinje, kommer krafterna att bilda ett kraftpar, som ger upphov till ett rent moment, och kroppen kan inte vara i jämvikt.

## M1.3 Uppdelning i delsystem

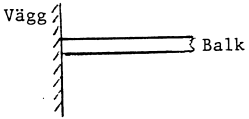
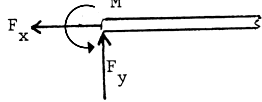
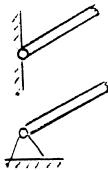
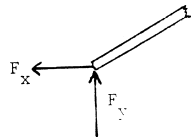
I Young-Freedman "University Physics" behandlar kapitlet om jämvikt endast föremål som betraktas som stela kroppar utsatta för utifrån påverkande krafter. Många system utgörs emellertid av två eller flera kroppar som är förenade med varandra. Då räcker det inte alltid med att behandla systemet som en enda enhet. Detta kan leda till ett statiskt obestämt system, dvs samtliga obekanta storheter kan inte bestämmas ur jämviktsekvationerna. Man måste i sådana fall dela upp systemet i delsystem och formulera jämviktsvillkoren för varje sådant för sig.

Tekniska konstruktioner består av ett system av delar hopbyggda för att på ett säkert sätt bära upp laster eller överföra krafter. Därför är det viktigt att kunna beräkna krafter internt i konstruktionen. En sådan kraftanalys kräver att konstruktionen delas upp i delsystem på vilka jämviktsvillkoren anbringas var för sig. I konstruktioner av detta slag är, om inte annat sägs, massan för själva konstruktionen försumbar i förhållande till de krafter den utsätts för.

Det är alltså viktigt att kunna frilägga. Figur 1.2 är en sammanställning av kontaktkrafter vid friläggning i några vanliga situationer.

Typ av kontakt	Kraftsituation på den kropp som frilägges
<p><b>1. Snöre, rep, lina eller kedja (masslöst).</b></p> 	 <p>Kraften <math>T</math> är riktad från kroppen längs linan (Man kan inte trycka med en lina).</p>
<p><b>2. Friktionsfri trissa</b></p> 	 <p>Kraften <math>T</math> är lika stor i båda snörändarna.</p>
<p><b>3. Glatt yta</b></p> 	 <p>Kraften är vinkelrät mot kontaktytan.</p>
<p><b>4. Sträv yta</b></p> 	 <p>När vi har friktion är det lämpligt att dela upp kontaktkraften i en komponent vinkelrät mot kontaktytan (normalkraften <math>N</math>) och en komponent tangentiellt längs kontaktytan (friktionskraften <math>F</math>).</p>
<p><b>5. Rullager eller rullstöd</b></p>  	 <p>Tänk dig att balken utsätts för en kraft i x-led. Då skulle rullstödet inte kunna "hålla kvar" balken. Man säger att rullstödet bara kan ta upp krafter i y-led.</p>
<p><b>6. Fast lager</b></p> 	 <p>Ett fast lager kan ta upp krafter i både x- och y-led.</p>

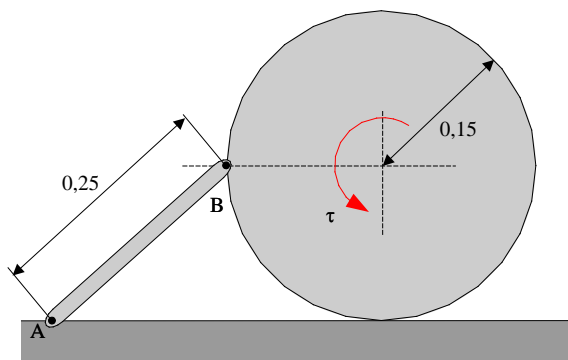
Figur 1.2 Kontaktkrafter vid olika kraftsituationer (forts på nästa sida).

<p><b>7. Fast inspänning</b></p> 	 <p>En fast inspänning kan även ta upp moment.</p>
<p><b>8. Friktionsfri led</b></p> 	 <p>En friktionsfri led kan ta upp krafter i både x- och y-led.</p>

Figur 1.2 Kontaktkrafter vid olika kraftsituationer (forts från föregående sida).

## Exempel

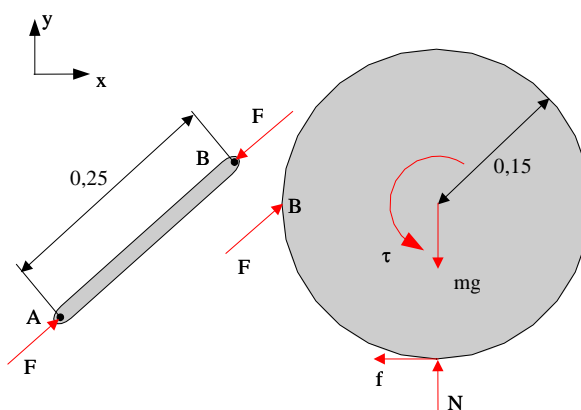
1.



Stötten AB, vars massa är försumbar, är med friktionsfria leder fästad dels vid ett horisontellt golv i A, dels vid ett homogent hjul, med massan 25 kg, vid B. Beräkna det minsta moment  $\tau$  som måste anbringas på hjulet för att det skall börja glida. Den statiska friktionskoefficienten mellan hjul och yta är 0,40.

*Lösning:*

Frilägg stötta och hjul var för sig.



Stötten är en tvåkraftsdel, vilket ger krafterna  $F$  vid A och B på stötten. Newtons tredje lag ger belopp och riktning för kraften från stötten på hjulet vid B.

Jämviktsekvationer för hjulet:

Börja med

$$\sum \tau_B = 0$$

där den sökta storheten  $\tau$  ingår. Då ser man vilka andra storheter som behöver bestämmas. Man får:

$$\tau - mg \cdot r + N \cdot r - f \cdot r = 0 \quad (1)$$

På gränsen till glidning:

$$f = \mu_s N \quad (2)$$

Ekvation (2) i (1):

$$\tau = mg \cdot r - N \cdot r + \mu_s N \cdot r = mg \cdot r - N(1 - \mu_s)r \quad (3)$$

$$\sum F_x = 0 \text{ ger:}$$

$$F \cos \theta - f = 0$$

Med ekvation (2) insatt:

$$F \cos \theta - \mu_s N = 0$$

$$F = \frac{\mu_s N}{\cos \theta} \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0 \text{ ger:}$$

$$-mg + N + F \sin \theta = 0 \quad (5)$$

Ekvation (4) i (5):

$$-mg + N + \mu_s N \tan \theta = 0$$

$$N = \frac{mg}{1 + \mu_s \tan \theta} \quad (6)$$

Ekvation (6) i (3):

$$\tau = mg \cdot r - \frac{mg}{1 + \mu_s \tan \theta} (1 - \mu_s) \cdot r \quad (7)$$

Förenkling ger:

$$\tau = mgr \frac{\mu_s (1 + \tan \theta)}{1 + \mu_s \tan \theta}$$

Numeriskt:

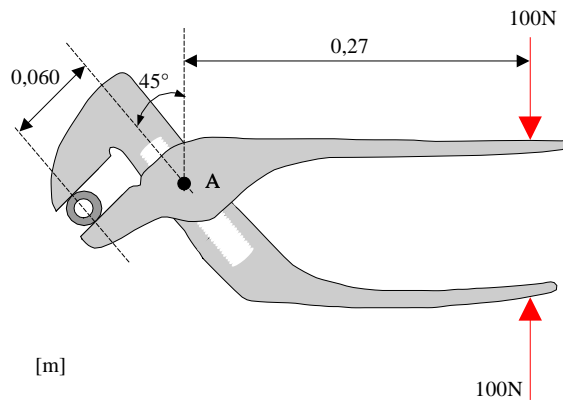
$$m=25 \text{ kg}; r=0,15 \text{ m}; \mu_s=0,40; \theta = \arcsin \frac{0,15}{0,25} = 36,9^\circ.$$

Insättning och uträkning ger:  $\tau = 19,81 \text{ N} \cdot \text{m}$

Svar: 20 N·m



2.

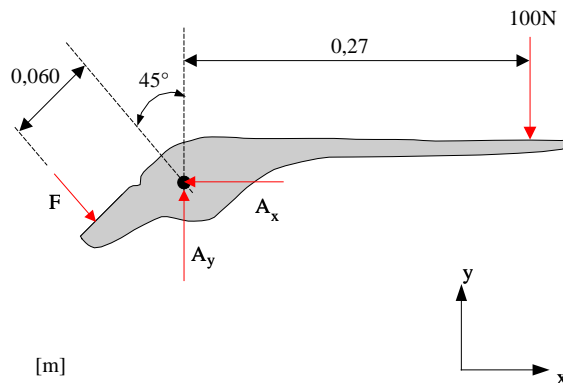


Polygripens handtag pressas ihop med kraften 100 N enligt figur.

- Hur stor blir kraften på brickan?
- Hur stor blir kraften på leden vid A?

*Lösning:*

- Frilägg en av skänklarna.



Jämviktsekvation:

Momentekvationen med avseende på A:

$$\sum \tau_A = 0 \text{ ger:}$$

$$F \cdot 0,060 - 100 \cdot 0,27 = 0$$

$$F = 450\text{N}$$

Detta är brickans kraft på skänkeln. Enligt Newtons tredje lag är kraften från skänkeln på brickan lika stor men motriktad.

- Jämviktsekvationer:

$$\sum F_x = 0 \text{ ger:}$$

$$F \sin 45^\circ - A_x = 0$$

$$A_x = F \sin 45^\circ = 450 \frac{\sqrt{2}}{2} = 318,2 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \text{ ger:}$$

$$A_y - F \cos 45^\circ - 100 = 0$$

$$A_y = 100 + F \cos 45^\circ = 100 + 450 \frac{\sqrt{2}}{2} = 418,2 \text{ N}$$

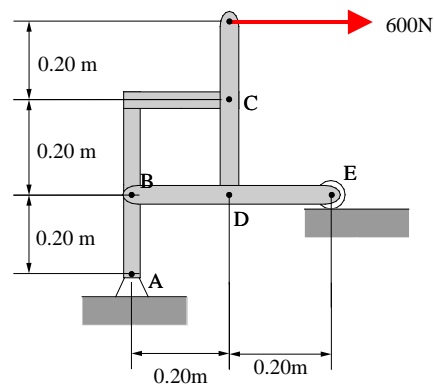
Totala kraften från leden

$$F_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{318,2^2 + 418,2^2} = 524,49 \text{ N}$$

Detta är kraften från leden på skänkeln. Enligt Newtons tredje lag är kraften från skänkeln på leden lika stor men motriktad.

Svar: a) 0,45 kN; b) 0,52 kN

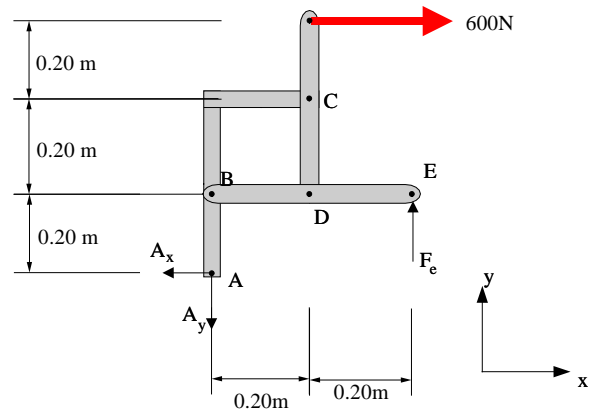
3.



Beräkna beloppet av kraften vid leden C i den belastade ramstruktur som visas i figuren. (Leder ritade på detta sätt skall enligt konvention tolkas som att de är friktionsfria om inget annat sägs).

Lösning:

Frilägg hela ramen



Jämviktsekvationer:

$$\sum \tau_A = 0 \text{ ger:}$$

$$F_E \cdot 0,4 - 600 \cdot 0,6 = 0$$

$$F_E = 900 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \text{ ger:}$$

$$600 - A_x = 0$$

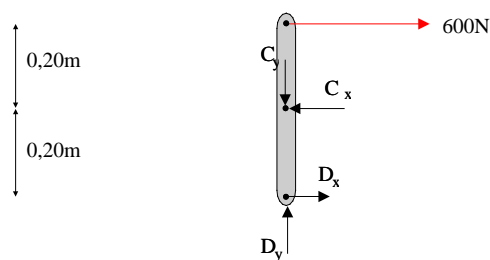
$$A_x = 600 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \text{ ger:}$$

$$F_E - A_y = 0$$

$$A_y = F_E = 900 \text{ N}$$

Frilägg delen CD.



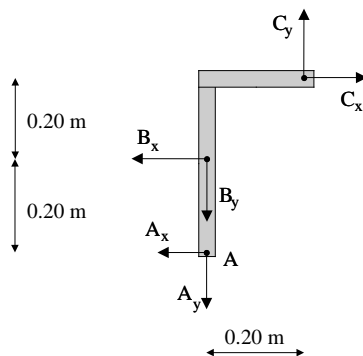
Jämviktsekvation:

$$\sum \tau_D = 0 \text{ ger:}$$

$$C_x \cdot 0,2 - 600 \cdot 0,4 = 0$$

$$C_x = 1200 \text{ N}$$

Frilägg delen ABC:



$$\sum \tau_B = 0 \text{ ger:}$$

$$C_y \cdot 0,2 - C_x \cdot 0,2 - A_x \cdot 0,2 = 0$$

$$C_y = 1800 \text{ N}$$

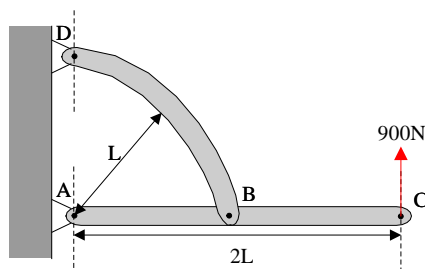
Totala kraften i C

$$F_C = \sqrt{(C_x)^2 + (C_y)^2} = \sqrt{1200^2 + 1800^2} = 2160 \text{ N}$$

Svar: 2,2 kN

## Uppgifter

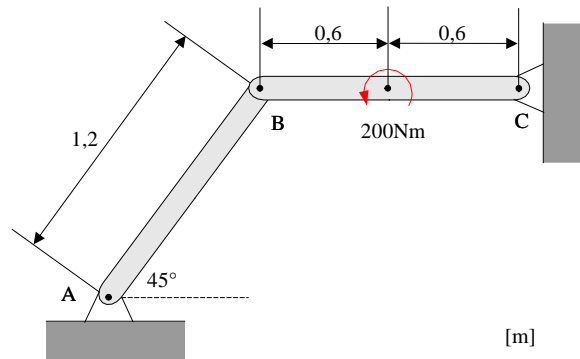
M1.1



Beräkna beloppet av kraften vid leden A för den belastade ramen i figuren.

Svar: 2,0 kN

## M1.2

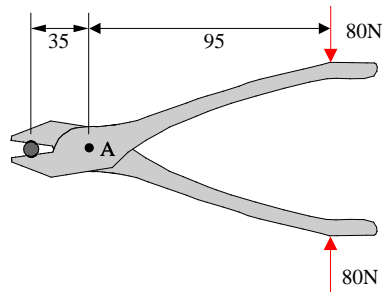


Beräkna beloppet av kraften vid leden C.

Svar: 0,24 kN

## M1.3

[mm]

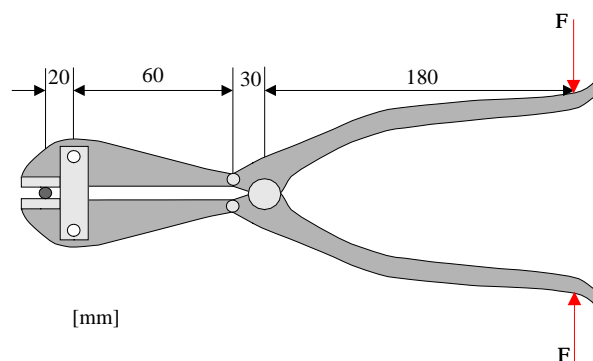


a) Hur stor blir kraften på stängen i tångens käft då man nyper åt tångens skänklar med kraften 80 N enligt figur.

b) Beräkna kraften från leden vid A.

Svar: a) 0,22 kN; b) 0,30 kN

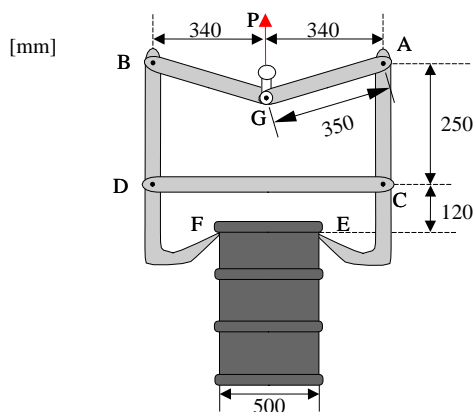
## M1.4



En tång för att klippa av t.ex. ståltråd och bultar visas i figuren. För en handkraft  $F=120$  N, hur stor blir kraften på bulten?

Svar: 2,2 kN

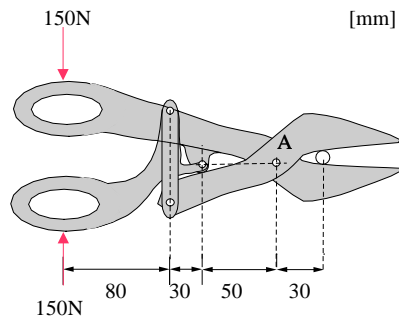
## M1.5



En lyftanordning för att transportera tunnor med massan 135 kg visas i figuren. Beräkna beloppet av kraften som verkar på tunnan vid E (och även F).

Svar: 5,2 kN

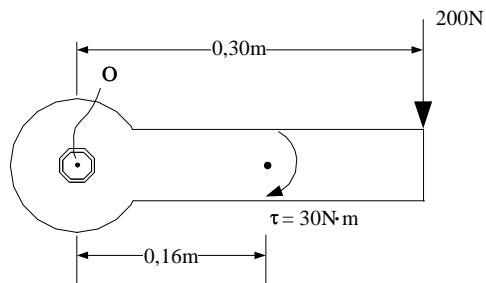
## M1.6



Plåtsaxen som visas i figuren kan även användas för att klippa av ståltråd. Om 150 N anbringas på tångens handtag, vad blir då klippkraften på ståltråden?

Svar: 1,5 kN

## M1.7

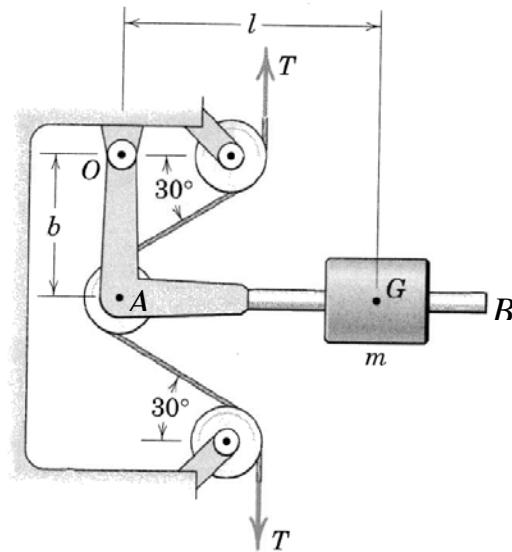


Beräkna momentet med avseende på O från enligt figur anbringad kraft och moment på skruvnyckeln.

Svar: 90 N · m, medurs

## Övriga blandade uppgifter i statik

M1.8

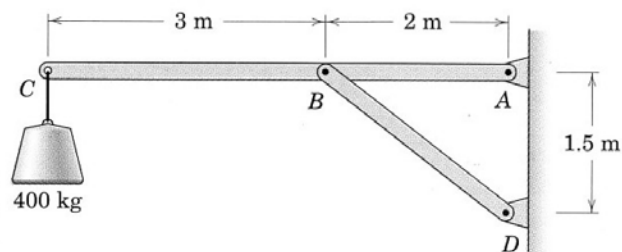


Anordningen enligt figur används för att spänna remmen som löper över de friktionsfria trissorna så att dragkraften i remmen blir  $T$ . För att få lämplig kraft  $T$  i remmen placeras vikten, med massa  $m$ , på lämpligt avstånd  $l$  från  $A$ . Remmen och alla trissorna kan anses ha försumbar massa. Även massan hos armen  $OAB$  kan försummas. Armen  $OAB$  är fäst i den friktionsfria leden i  $O$ . Det gäller att massan  $m = 8,00$  kg och avståndet  $b = 0,300$  m.

- Frilägg armen  $OAB$  (inklusive trissan i  $A$  och massan  $m$ ).
- Bestäm avståndet  $l$  så att dragkraften i remmen blir  $T = 100$  N.
- Beräkna storleken på kraften som verkar på leden i  $O$ .

Svar:a)-; b)  $l$  ska vara 66 cm; c) 190 N

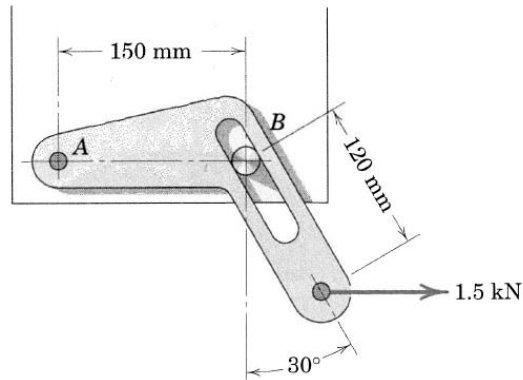
M1.9



Beräkna beloppet av kraften från den friktionsfria leden B på delen ABC i det belastade ramverket som visas i figuren. Ramverkets egenmassa är försumbar, och lederna i A, B och D är friktionsfria.

Svar:16 kN

## M1.10

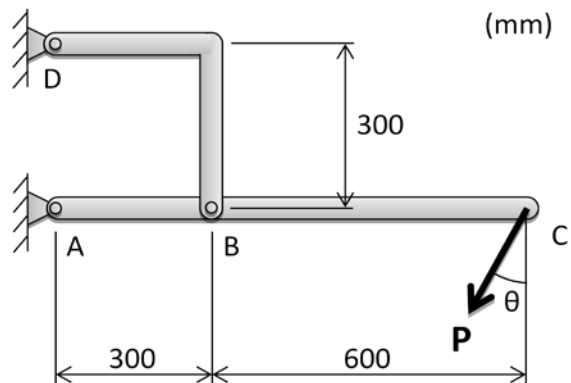


Beräkna beloppet av kraften från den friktionsfria leden A på delen ABC i det belastade ramverket som visas i figuren. Ramverkets egenmassa är försumbar, och lederna i A, B och D är friktionsfria.

Svar: 1,08 kN

## M1.11

Ramstrukturen enligt figur används för att bära upp laster. Lederna i A, B, C och D är alla friktionsfria. Tyngdkrafter pga ramens massa är försumbara i förhållande till de krafter som verkar på den. Vid ett tillfälle belastas strukturen med kraften  $P = 3,0$  kN enligt figur.



Bestäm resulterande reaktionskraft (storlek och riktning) i leden A, då vinkeln  $\theta = 30^\circ$ .

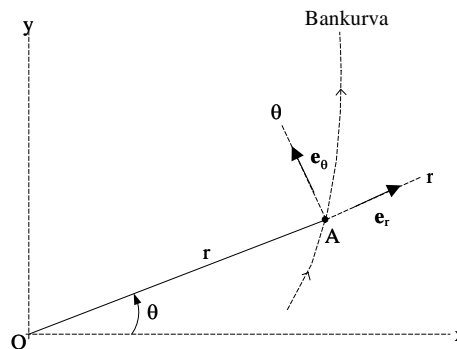
Svar: Resulterande kraft i led A är 11 kN med riktning  $29^\circ$  ner från horisontallinjen i positiv  $x$ -riktning.



# Kapitel M2

## Polära koordinater

För att beskriva en partikels rörelse i ett plan finns förutom x-y-koordinater och radiella och tangentiella (n-t-) koordinater också en tredje uppsättning koordinater, nämligen *polära* koordinater. Dessa är särskilt användbara då en partikels position bestäms genom att mäta radiella avståndet från observationspunkten (polen) och vinkeln i förhållande till en fix referenslinje. Här införs nya enhetsvektorer  $\vec{e}_r$  radiellt ut från den fixa punkten O till partikeln i fråga, och  $\vec{e}_\theta$  vinkelrät mot  $\vec{e}_r$  och positiv åt det håll vinkeln  $\theta$  räknas positiv, se figur 2.1.



Figur 2.1. Enhetsvektorer i polära koordinater

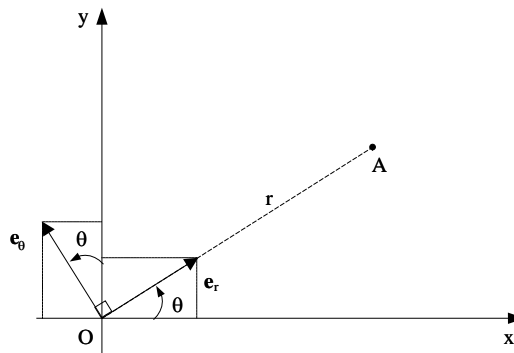
Partikeln A:s läge ges av

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \quad (2.1)$$

Partikeln A:s hastighet ges av

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r \quad (2.2)$$

Observera att enhetsvektorn  $\vec{e}_r$  ändras med tiden i och med att den ändrar riktning då partikeln rör sig längs bankurvan. Detta gäller även för  $\vec{e}_\theta$ . För att få uttrycket för hastigheten måste alltså enligt ekvation (2.2)  $\dot{\vec{e}}_r$  bestämmas.



Figur 2.2. Geometri för utveckling av enhetsvektorernas tidsderivator

Figur 2.2 ger

$$\vec{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta) \quad (2.3)$$

$$\vec{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta) \quad (2.4)$$

Derivering av detta med avseende på tiden ger:

$$\dot{\vec{e}}_r = (-\sin \theta \dot{\theta}, \cos \theta \dot{\theta}) = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad (2.5)$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = (-\cos \theta \dot{\theta}, -\sin \theta \dot{\theta}) = -\dot{\theta} \vec{e}_r \quad (2.6)$$

Insättning av ekv.(2.5) i ekv.(2.2) ger att

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad (2.7)$$

Partikelns acceleration

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\vec{e}}_\theta \quad (2.8)$$

Uttrycken för  $\dot{\vec{e}}_r$  och  $\dot{\vec{e}}_\theta$  enligt ekvation (2.5) och (2.6) insättes i (2.8).

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta \quad (2.9)$$

där

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

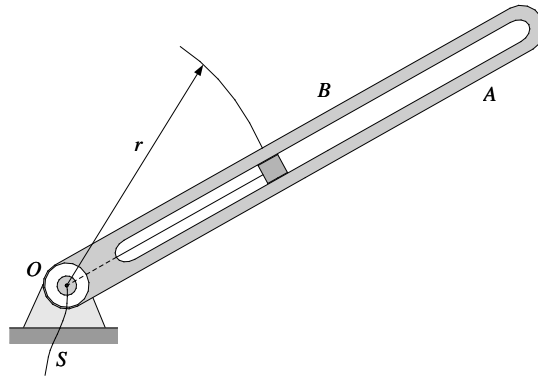
Termerna i  $a_r$  utgörs av beloppsändringen av  $v_r$ ,  $\ddot{r}$ , samt riktningsändringen för  $v_\theta$ ,  $-r\dot{\theta}^2$ .

Termerna i  $a_\theta = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$  utgörs av beloppsändringen av  $v_\theta$ ,  $r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}$  samt riktningsändringen för  $v_r$ ,  $\dot{r}\dot{\theta}$ .

Accelerationens belopp är

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} \quad (2.10)$$

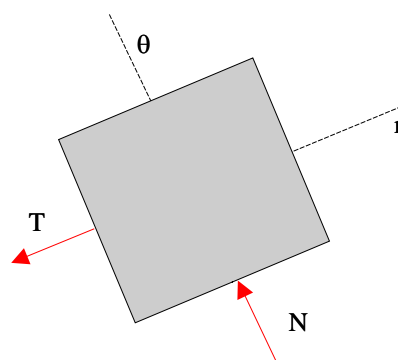
## Exempel



Armen i figuren ovan roterar i horisontalplanet kring en vertikal axel genom O. En partikel med massan 3,0 kg, som kan glida i spåret, dras med linan S mot O med den konstanta farten 0,060 m/s. I det ögonblick då  $r = 0,20$  m har armen vinkelhastigheten  $\omega = 5,0$  rad/s, moturs, och den minskar med  $2,0 \text{ rad/s}^2$ . Beräkna kraften i linan och normalkraften från armen på partikeln samt ange vilken av sidorna i spåret (A eller B) partikeln ligger an mot.

### Lösning:

Frilägg partikeln i det angivna läget. Krafter vinkelräta mot rörelsens plan ( $N$  och  $mg$ ) ritas ej ut.



Polära koordinater används. Newtons andra lag,  $r$ -komponenten

$$\sum F_r = ma_r \text{ ger :}$$

$$-T = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

Numeriskt :  $\ddot{r} = 0$ ;  $r = 0,20$  m;  $\dot{\theta} = \omega = 5,0$  rad/s;  $m = 3,0$  kg

Insättning ger:  $T = 15$  N.

$\theta$ -komponenten av Newtons andra lag

$$\sum F_{\theta} = ma_{\theta} \text{ ger :}$$

$$N = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

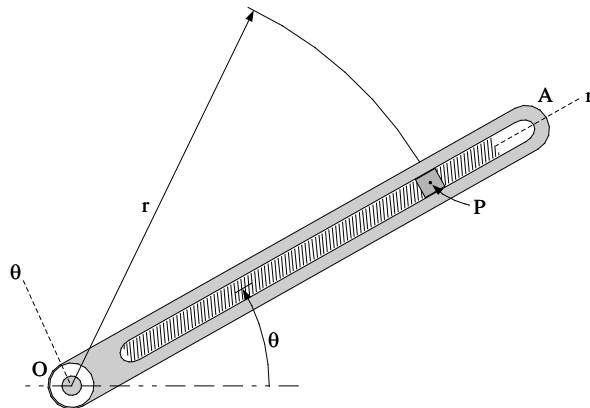
Numeriskt :  $r = 0,20$  m;  $\ddot{\theta} = -2,0$  rad/s<sup>2</sup>;  $\dot{r} = -0,060$  m/s

Insättning ger:  $N = -3,0$  N

Svar: Linkraften är 15 N; Normalkraften är 3,0 N, och partikeln ligger an mot sida B av armen.

## Uppgifter

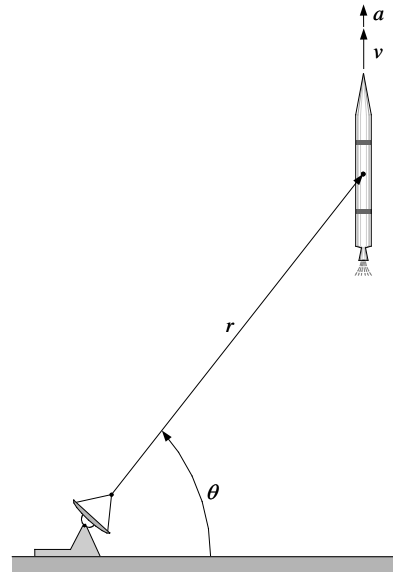
### M2.1



Läget för hylsan P i den roterande armen OA kontrolleras av en "kraftskruv", se figur. I ett visst ögonblick gäller att  $\dot{\theta} = 8,0$  rad/s och  $\ddot{\theta} = -20$  rad/s<sup>2</sup>. Vidare så är  $r = 0,20$  m,  $\dot{r} = -0,30$  m/s samt  $\ddot{r} = 0$ . Beräkna  $r$ - och  $\theta$ -komponenterna av P:s acceleration i detta ögonblick.

Svar:  $a_r = -13$  m/s<sup>2</sup>;  $a_{\theta} = -8,8$  m/s<sup>2</sup>

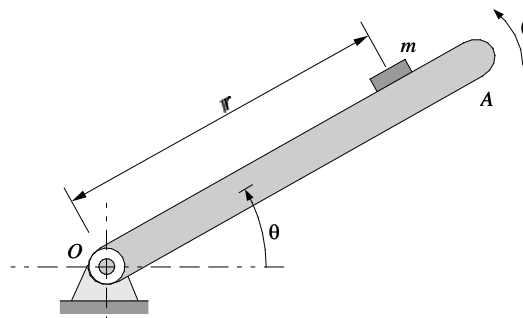
## M2.2



En raket avfyras vertikalt uppåt, och dess läge mäts med radar, se figur. Då vinkeln  $\theta = 60^\circ$ , är  $r = 9,0$  km,  $\ddot{r} = 21 \text{ m/s}^2$  och  $\dot{\theta} = 0,020$  rad/s. Beräkna beloppet av raketens hastighet respektive acceleration i detta ögonblick.

Svar:  $v = 360$  m/s;  $a = 20$  m/s<sup>2</sup>

## M2.3

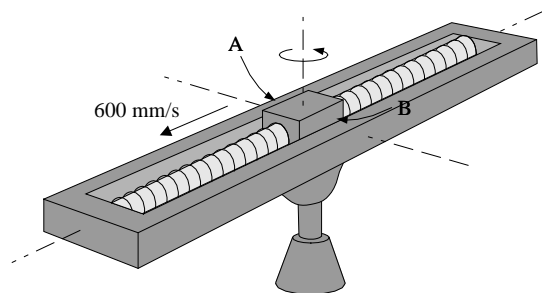


Skivan OA roterar moturs kring en horisontell axel genom O med den konstanta vinkelhastigheten  $\dot{\theta} = 3,0$  rad/s. När skivan passerar läget  $\theta = 0^\circ$  placeras en partikel med massan  $m$  på denna på avståndet  $r = 0,50$  m från O. Partikeln börjar glida vid vinkeln  $\theta = 45^\circ$ .

Beräkna statiska friktionskoefficienten mellan partikel och skiva.

Svar: 0,35

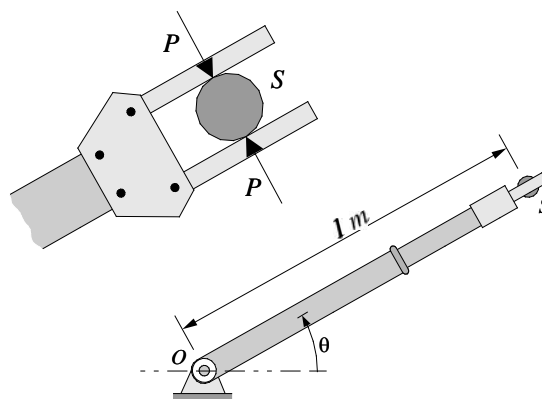
## M2.4



Den spårförsedda armen roterar moturs kring en axel genom centrum i ett horisontalplan med konstant vinkelhastighet  $\dot{\theta}=10$  rad/s. Den fjäderbelastade hylsan med massan 1,5 kg kan oscillera med försumbar friktion i spåret. Om hylsan har farten 0,60 m/s relativt armen då den passerar centrum, hur stor är då den sidokraft som armen påverkar hylsan med. Vilken av sidorna A eller B är i kontakt med hylsan?

Svar: 18 N; sida A

## M2.5



En kula med massan 2,0 kg förflyttas i ett vertikaltplan med en robotarm. Denna roterar medurs kring en fix, horisontell axel O och har vinkelhastigheten 50 grader/s, och vinkelaccelerationen 200 grader/s<sup>2</sup>, moturs, när armen bildar vinkeln  $\theta = 30^\circ$  med horisontalplanet. Dessutom förkortas den hydrauliska stängen med den konstanta farten 0,50 m/s.

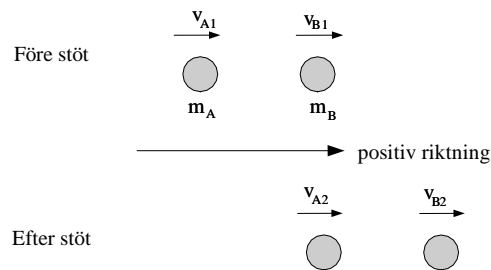
Vad måste gripkraften P minst vara i detta läge för att kulan inte skall lossna, om den statiska friktionskoefficienten mellan kula och gripklo är 0,50.

Svar: 27 N.

# Kapitel M3

## Inelastisk stöt

Young-Freedman: "University Physics" behandlar i kapitlen 8-3 och 8-4 fullständigt inelastiska kollisioner respektive elastiska kollisioner. De allra flesta fallen av kollision (eller stöt) är varken det ena eller andra utan något däremellan.



Figur 3.1. Definition av hastigheter vid ett stötförlopp

Vid en stöt mellan två partiklar gäller att rörelsemängden för systemet (de två partiklarna) bevaras.

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2} \quad (3.1)$$

För givna massor och med hastigheterna före stöt kända, så har man här två obekanta, respektive partikels hastighet efter stöten

$v_{A2}$  och  $v_{B2}$ .

Det behövs därför ytterligare ett samband för att man skall kunna beräkna dessa hastigheter.

För en elastisk stöt gäller enligt ekv.(8-19) i "University Physics" att relativa hastigheten för de två partiklarna är lika före och efter stöten. För en helt inelastisk stöt är relativa hastigheten noll efter stöten, vilket ju inte är fallet före stöten. För att karakterisera en stöt har därför storheten *stöttal* (*studscoefficient*), med beteckning  $e$  införts.  $e$  definieras som:

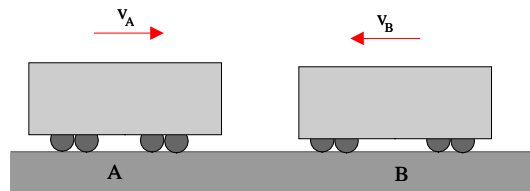
$$\frac{\text{relativhastigheten efter stöt}}{\text{relativhastigheten före stöt}} \quad (3.2)$$

Med beteckningar enligt figur 3.1 kan detta formelmässigt skrivas

$$e = \frac{v_{B2} - v_{A2}}{v_{A1} - v_{B1}} \quad (3.3)$$

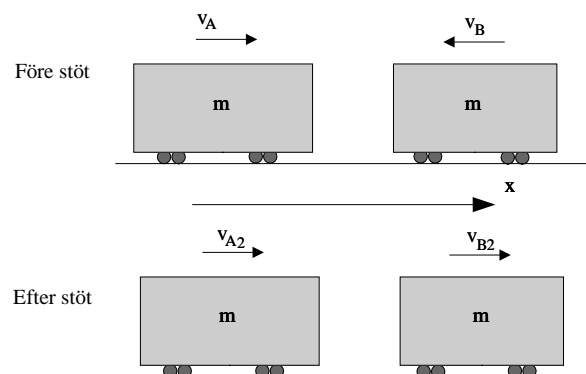
Observera att i detta samband är alla hastigheter antagna positiva åt höger. Om vid en beräkning någon av hastigheterna är eller antages riktad åt vänster, måste detta tas hänsyn till genom att förse denna med minustecken i ekvationen.

## Exempel



Två järnvägsvagnar med samma massa rullar mot varandra med hastigheterna  $v_A = 1,5$  km/h respektive  $v_B = 2,5$  km/h och kolliderar. Stöttalet mellan vagnarna är 0,20. Beräkna vardera vagnens hastighet efter stöten.

Lösning:



Yttre krafter i horisontal led på systemet de två vagnarna är försumbara under stöten, varför systemets rörelsemängd bevaras i horisontell led ( $x$ -led).

$$mv_A + m(-v_B) = mv_{A2} + mv_{B2} \quad (1)$$

Notera minustecknet för  $v_B$ . Detta kommer sig av att positiv riktning är ansatt åt höger men  $v_B$  har riktning åt vänster.  $v_{A2}$  och  $v_{B2}$  är båda antagna vara riktade åt höger.

För stötalet gäller

$$e = \frac{v_{B2} - v_{A2}}{v_A - (-v_B)} \quad (2)$$

Av samma orsak som ovan skall  $v_B$  även här ha minustecken.  $v_A$ ,  $v_B$ ,  $v_{A2}$  och  $v_{B2}$  betecknar beloppen av hastigheterna; riktningarna tas hänsyn till med tecken i ekvationerna (1) och (2).

Ekvation (2) ger:

$$v_{B2} = e(v_A + v_B) + v_{A2} \quad (3)$$

Ekvation (3) insättes i (1):

$$\begin{aligned} v_A - v_B &= v_{A2} + e(v_A + v_B) + v_{A2} \\ v_{A2} &= \frac{v_A - v_B - e(v_A + v_B)}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

Numeriskt:  $v_A = 1,5$  km/h,  $v_B = 2,5$  km/h,  $e = 0,20$ .

Insättning i (4) ger:

$$v_{A2} = -0,90 \text{ km/h.}$$

Ekvation (3) ger sedan

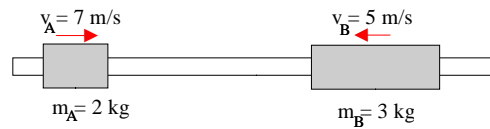
$$v_{B2} = -0,10 \text{ km/h.}$$

Observera att i ekvation (4) behöver man inte ange hastigheterna i m/s. Använder man km/h så får de sökta hastigheterna enheten km/h också, och det är ju en enhet som används.

Svar: Vagn A har hastigheten 0,90 km/h åt vänster; vagn B har hastigheten 0,10 km/h också åt vänster.

## Uppgifter

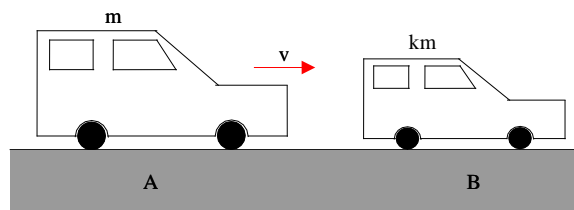
## M3.1



Två cylindrar glider med försumbar friktion mot varandra längs en stång med de hastigheter som anges i figuren. Stöttelet  $e=0,60$ . Beräkna respektive cylinders hastighet efter stöten.

Svar: Cylinder 1: 4,5 m/s åt vänster; cylinder 2: 2,7 m/s åt höger.

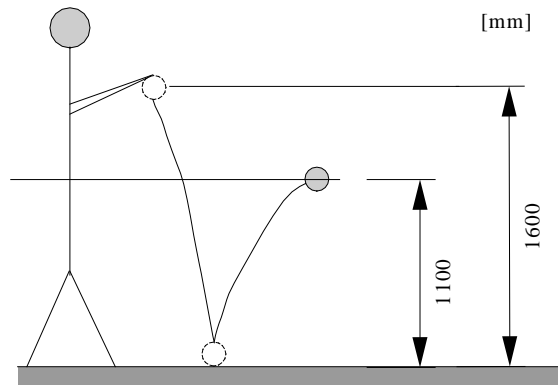
## M3.2



Bil B står stilla och blir påkörd av bil A som har hastigheten  $v$ . Bil A har massan  $m$  och bil B har massan  $km$ . Stöttelet mellan bilarna är 0,20. Bestäm hastigheterna för bilarna efter kollisionen uttryckt i storheterna  $k$  och  $v$ .

Svar:  $v_{A2} = \frac{1-0,2k}{1+k}v$ ;  $v_{B2} = \frac{1,2}{1+k}v$

## M3.3

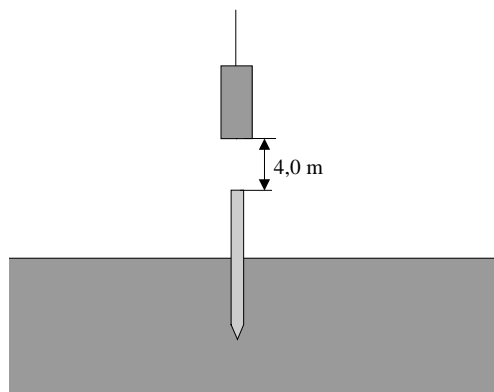


För att testa tennisbollars studsformåga, släpps de från axelhöjd, och för att duga skall de studsa upp till den höjd som anges i figuren.

Beräkna stöttalet mellan boll och golv samt hur stor procentuell del ( $n$ ) av den mekaniska energin (med detta avses kinetisk och potentiell energi) som går förlorad (övergår i andra energiformer, vilka?) vid stöten.

Svar:  $e=0,83$ ;  $n=31\%$

## M3.4

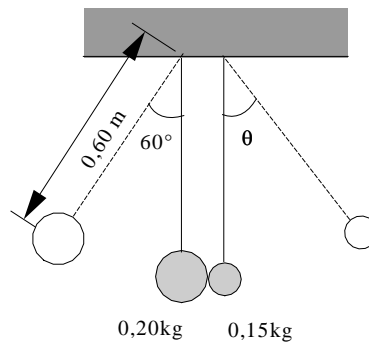


En fallhammare används för att slå ned pålar i marken. Den skall vara utformad så att den vid stöten förlorar hela sin kinetiska energi. Vid pålningen släpps hammaren 4,0 m ovanför pålen. Stöttalet mellan hammaren och pålen, som har massan 300 kg, är 0,30.

- Vilken massa skall fallhammaren ha?
- Vilken hastighet får pålen omedelbart efter stöten?
- Hur stor blir procentuella förlusten av mekanisk energi?

Svar: a) 90 kg; b) 2,7 m/s; c) 70%

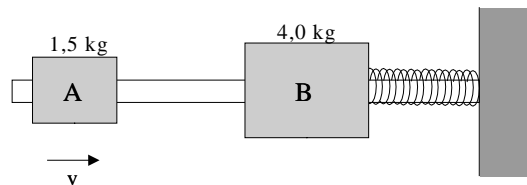
## M3.5



Två kulor A och B är upphängda som figuren visar. Kula A förs åt sidan så att linan den är upphängd i bildar vinkeln  $60^\circ$  med vertikallinjen, varefter den släpps. Beräkna utslagsvinkeln  $\theta$  för kula B efter stöten. Det aktuella stöttelet  $e=0,85$ .

Svar:  $64^\circ$

## M3.6



Två cylindrar, A och B med massorna 1,5 respektive 4,0 kg, kan glida med försumbar friktion längs en stång. B är i kontakt med en ospänd fjäder med fjäderkonstanten  $k=6,0 \text{ kN/m}$ , då cylinder A stöter emot med hastigheten  $v=5,0 \text{ m/s}$ . Stöttelet  $e = 0,50$ . Beräkna fjäderns maximala hoptryckning efter stöten.

Svar: 0,053 m

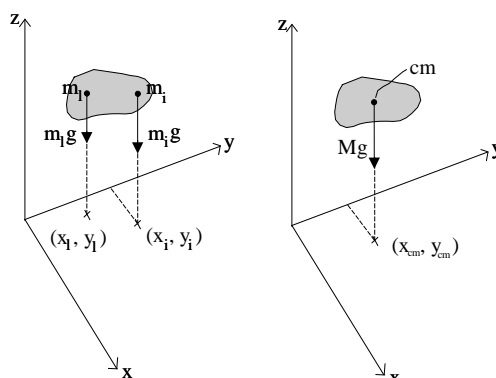
# Kapitel M4

## Masscentrum

### M4.1 Partikelsystem, kroppar (utbredd massfördelning)

Så här långt har vi behandlat krafter som om dessa verkade i en enda punkt. Emellertid existerar inte så exakt koncentrerade krafter, eftersom kontakt mellan kroppar alltid sker över en viss (om än liten) yta och motsvarande kontaktkrafter är följaktligen fördelade över den ytan. Gravitationskraften som verkar på en kropp är en kraft som är fördelad över hela kroppens volym. För kroppar som är homogena och symmetriska har vi intuitivt placerat tyngdkraften i symmetricentrum utan att reflektera över bakomliggande orsak till att man kan göra så. Vad man därmed gör, är att ersätta den utbredda gravitationskraften med dess resulterande punktkraft. Nu är emellertid långt ifrån alla kroppar homogena och symmetriska, varför det behövs allmängiltiga metoder för att beräkna belopp och angreppspunkt för resultanten till den utbredda gravitationskraften.

På kroppen till vänster i figur 4.1 verkar gravitationen på varje liten del av denna. Vi vill ersätta alla dessa ”deltyngdkrafter” med en resulterande tyngdkraft (kroppen till höger i figur 4.1). Denna resultant måste ha samma kraft- och momentverkan som alla ”deltyngdkrafter” har.



Figur 4.1 Likvärdiga kraft- och momentsystem

Lika kraftverkan fås om

$$\sum_{i=1}^n m_i g = Mg$$

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (4.1)$$

Här är antaget att tyngdaccelerationen  $g$  inte varierar över kroppens utsträckning.

Från figur 4.1 fås att resulterande kraftmoment med avseende på t.ex.  $y$ -axeln till följd av gravitationens verkan på alla masspartiklar, som kroppen kan tänkas vara sammansatt av, blir:

$$\tau_y = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + \dots + m_i g x_i + \dots + m_n g x_n = \sum_{i=1}^n m_i g x_i \quad (4.2)$$

Men detta moment skall vara identiskt med det kraftmoment med avseende på  $y$ -axeln som den resulterande tyngdkraften (högra figuren) ger:

$$\tau_y = M g x_{cm} \quad (4.3)$$

Ekv. (4.2) och (4.3) ger:

$$\sum_{i=1}^n m_i g x_i = M g x_{cm}$$

$$x_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \text{enl. ekv. (4.1)} \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \quad (4.4)$$

Då ekv. (4.4) inte innehåller  $g$  kallas  $x_{cm}$  *masscentrum* för kroppen i fråga, och detta sammanfaller med kroppens tyngdpunkt om  $g$  inte varierar över kroppens utsträckning.

Analogt fås

$$y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \quad (4.5)$$

$$z_{cm} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \quad (4.6)$$

Ekvationerna (4.4)-(4.6) kan sammanfattas i en vektorekvation:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (4.7)$$

Ekvationerna (4.4)-(4.7) är desamma som ekvationerna (11-3) - (11-4) i "University Physics".

Ekvationerna (4.4) - (4.6) och (4.7) är praktiskt användbara bara då masscentrum för ett system av diskreta partiklar skall bestämmas.

För en kropp med kontinuerlig massfördelning låter man punktmassorna i dessa ekvationer övergå i *masselement*  $dm$ . Storleken av dessa får gå mot noll, varvid antalet masselement går mot oändligheten, och summan  $\sum_i$  övergår till en integral  $\int$ .

Ekvationerna (4.4)-(4.6) blir då:

$$x_{cm} = \frac{\int x \, dm}{\int dm} \tag{4.8}$$

$$y_{cm} = \frac{\int y \, dm}{\int dm} \tag{4.9}$$

$$z_{cm} = \frac{\int z \, dm}{\int dm} \tag{4.10}$$

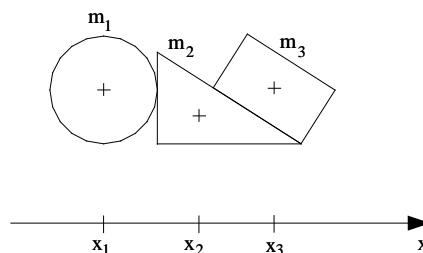
$x$ ,  $y$ ,  $z$  i respektive ekvation står för masselementets i fråga *koordinat*.

Ekvationerna (4.8)-(4.10) kan sammanfattas i en vektorekvation

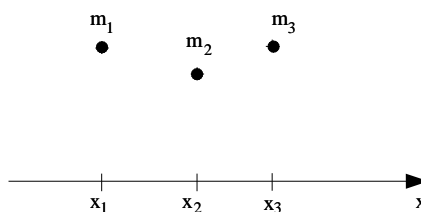
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r} \, dm}{\int dm} \tag{4.11}$$

## M4.2 Sammansatta kroppar

För en kropp som kan anses sammansatt av delar vilkas masscentra enkelt kan bestämmas, t.ex. till följd av symmetri, kan ekvationerna (4.4)-(4.6) användas för att bestämma den sammansatta kroppens masscentrum. Varje delkropp ersätts med en likvärdig punktmassa med samma koordinater som delkroppens masscentrum.



Figur 4.2a Sammansatta kroppar



Figur 4.2b Likvärdigt punktmasssystem

För t.ex. x-koordinaten för den sammansatta kroppen i figur 4.2: Ekvation (4.4) ger:

$$X_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

där  $x_i$  anger x-koordinaten för delkropp  $i$ 's masscentrum.

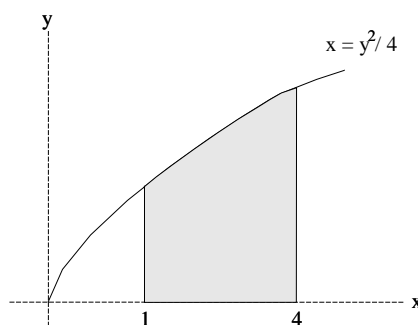
Generellt:

$$X_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \quad (4.12)$$

ger x-koordinaten för den sammansatta kroppens masscentrum. Analogt uttryck gäller för y- och z- koordinaterna.

## Exempel

1.



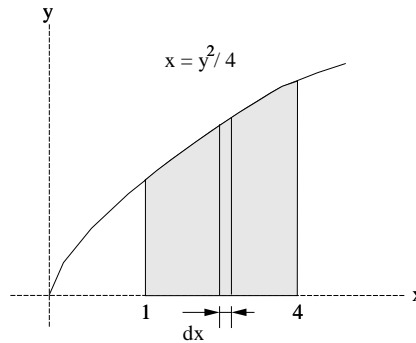
Beräkna masscentrums läge för den tunna, homogena skivan som begränsas av kurvan  $x = \frac{y^2}{4}$ , samt linjerna  $x=1$  och  $x=4$ .

Lösning:

x-koordinaten för masscentrum ges av.

$$x_{cm} = \frac{\int x \, dm}{\int dm} \tag{1}$$

Som masselement  $dm$  väljs en del av skivan för vilken x-koordinaten är konstant. En smal, vertikal remsa med bredden  $dx$  belägen vid en godtycklig koordinat  $x$  uppfyller detta villkor.



$$dm = \sigma \, dx \, y \tag{2}$$

där  $\sigma$  antages vara densiteten per areaenhet,  $dx$  är bredden och  $y$  är höjden på masselementet.

$x$  i täljarens integral betecknar x-koordinaten för masselementet i fråga.

Insättning i ekvation (1) ger:

$$x_{cm} = \frac{\int_{x=1}^{x=4} x \, \sigma \, y \, dx}{\int_{x=1}^{x=4} \sigma \, y \, dx} \tag{3}$$

Integrationsvariabeln är här  $x$ , varför funktionssambandet

$x = \frac{y^2}{4}$  används för att uttrycka  $y$  i  $x$ .

$$y = 2x^{1/2} \tag{4}$$

Ekvation (4) i (3):

$$x_{cm} = \frac{\int_1^4 x \, 2x^{1/2} \, dx}{\int_1^4 2x^{1/2} \, dx} = \frac{\int_1^4 x^{3/2} \, dx}{\int_1^4 x^{1/2} \, dx}$$

$$x_{cm} = \frac{\frac{2}{5} [x^{5/2}]_1^4}{\frac{2}{3} [x^{3/2}]_1^4} = 2,66$$

Masscentrums y-koordinat ges av:

$$y_{cm} = \frac{\int y \, dm}{\int dm} \quad (5)$$

Vi använder samma masselement som förut, dvs. det som ges av ekvation (2).  $y$  i ekvation (5) är y-koordinaten för *masselementets* masscentrum, som blir  $\frac{y}{2}$ , då detta approximeras som en rektangulär remsa med bredden  $dx$  och höjden  $y$ .

Insättning i ekvation (5):

$$y_{cm} = \frac{\int_1^4 \frac{y}{2} \sigma y \, dx}{\int_1^4 \sigma y \, dx} \quad (6)$$

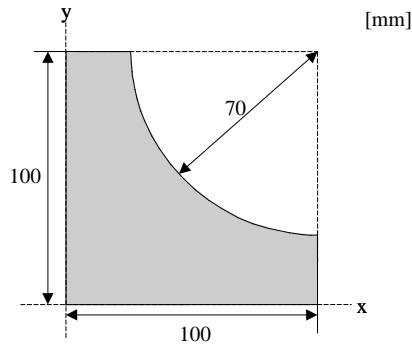
Integrationsvariabeln är även här  $x$ , varför funktionssambandet ekvation (4) används för att uttrycka  $y$  i  $x$ . Insättning i ekvation (6):

$$y_{cm} = \frac{\int_1^4 2x \, dx}{\int_1^4 2x^{1/2} \, dx} \quad (7)$$

$$y_{cm} = \frac{\frac{4}{3} [x^{3/2}]_1^4}{\frac{4}{5} [x^{5/2}]_1^4} = 1,61$$

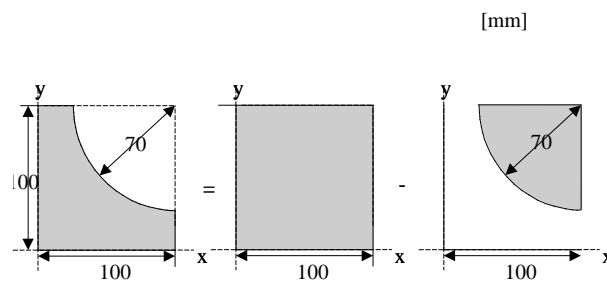
Svar: Koordinaterna för masscentrum är (2,7;1,6)

2.



Bestäm x-och y-koordinaterna för masscentrum för den tunna, homogena skivan i figuren ovan.

Lösning:



Figur. Originalskiva=kvadrat-kvartscirkel

För masscentrums koordinater gäller:

$$X_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 x_1 - m_2 x_2}{m_1 - m_2} \quad (1)$$

$$Y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 y_1 - m_2 y_2}{m_1 - m_2} \quad (2)$$

Observera minustecknet i såväl täljare som nämnare. Detta kommer sig av att del 2 skurits bort från del 1.

$m_1$  är massan för del 1 ( $\sigma$  är massan per areaenhet), och  $x_1$  är x-koordinaten för masscentrum för del 1.

Numeriskt:

$$m_1 = \sigma \cdot 0,100 \cdot 0,100$$

$$x_1 = 0,050$$

För del 2 gäller:

$$m_2 = \sigma \cdot \frac{1}{4} \pi r^2 = \sigma \frac{1}{4} \pi \cdot 0,070^2$$

$$x_2 = 0,100 - \frac{4r}{3\pi} = 0,100 - \frac{4 \cdot 0,070}{3\pi}$$

Insättning i (1) ger:

$$X_{cm} = \frac{\sigma \cdot 0,100 \cdot 0,100 \cdot 0,050 - \sigma \frac{1}{4} \pi \cdot 0,070^2 \cdot \left(0,100 - \frac{4 \cdot 0,070}{3\pi}\right)}{\sigma \cdot 0,100 \cdot 0,100 - \sigma \frac{1}{4} \pi \cdot 0,070^2}$$

$$X_{cm} = 0,0373 \text{ m}$$

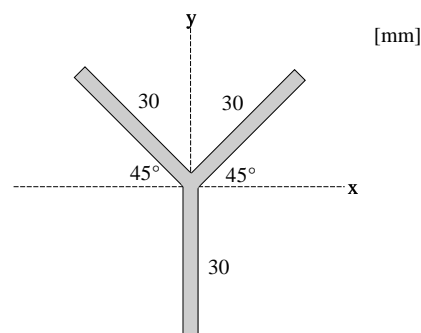
Symmetri gör att

$$Y_{cm} = X_{cm} = 0,0373 \text{ m}$$

Svar: (37;37) mm

## Uppgifter

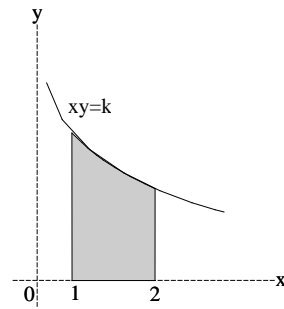
M4.1



Beräkna y-koordinaten för den Y-formade konstruktionen, som utgörs av smala, homogena, likadana stänger.

Svar: 2,1 mm

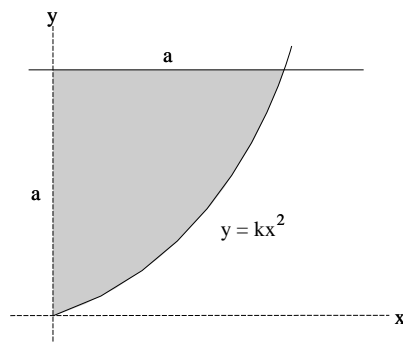
M4.2



Bestäm masscentrums koordinater (uttryckta i k) för den tunna, homogena skivan i figuren ovan.

Svar: (1,44; 0.36k)

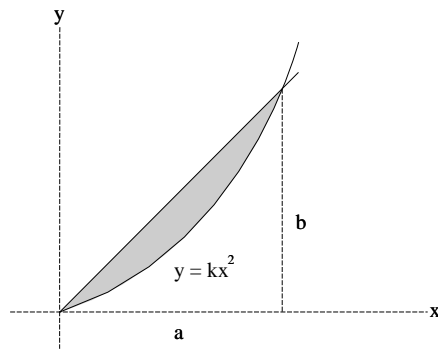
M4.3



Bestäm masscentrums koordinater (uttryckta i a) för den tunna, homogena skivan i figuren ovan. (Observera att maselementen kan väljas antingen i form av vertikala remsor eller horisontella, och att man kan ha olika element vid beräkning av x- respektive y-koordinat!).

Svar:  $\left(\frac{3a}{8}; \frac{3a}{5}\right)$

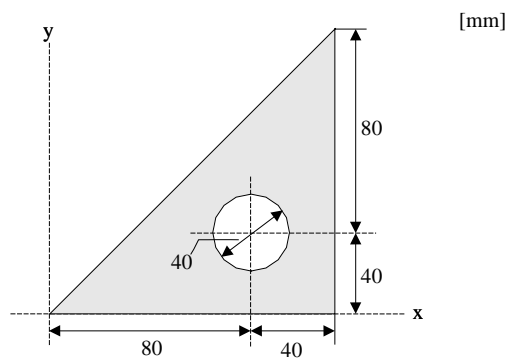
## M4.4



Bestäm masscentrums koordinater (uttryckta i a och b) för den tunna, homogena skivan i figuren ovan.

Svar:  $\left(\frac{a}{2}; \frac{2b}{5}\right)$

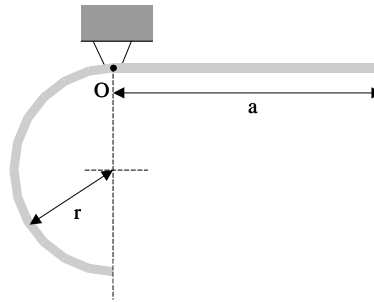
## M4.5



Beräkna masscentrums koordinater för skivan i figuren ovan.

Svar: (80;40) mm

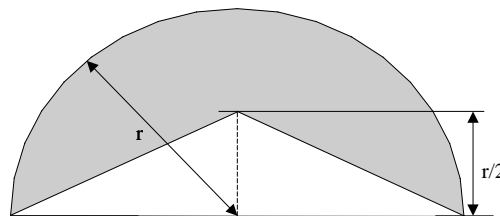
M4.6



En homogen, smal stång är böjd till den form som visas i figuren, och den är upphängd i en friktionsfri led i O. Bestäm längden  $a$ , uttryckt i  $r$ , så att stängen hänger i jämvikt i detta läge.

Svar:  $a=2r$

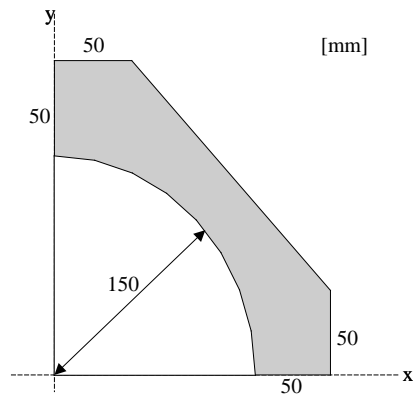
M4.7



Bestäm  $y$ -koordinaten för den homogena skivans masscentrum uttryckt i  $r$ .

Svar:  $0,54r$

## M4.8



Beräkna masscentrums koordinater för skivan i figuren ovan.

Svar: (0,11; 0,11) m

# Kapitel M5

## Icke konstant acceleration

I Fysik 1 behandlades rörelse där accelerationen är konstant, kapitel 2 i "University Physics" av Young & Freedman. I dessa fall är sambanden (2-9), (2-13) och (2-14) speciellt användbara.

Emellertid är accelerationen för en partikel eller kropp långt ifrån alltid konstant. Luftmotståndet när man t.ex. cyklar eller åker bil beror på hastigheten och ger upphov till ett bidrag till accelerationen som beror av hastigheten och alltså inte är konstant. Fjäderkraften,  $F=kx$ , som är ett exempel på elastiska krafter, varierar med fjäderförlängningen (-förkortningen), så finns det en fjäder som påverkar en kropp i rörelse, så ger fjäderkraften upphov till en acceleration som beror på kroppens läge (koordinat). Hur skall man då hantera sådana fall? Under alla omständigheter utgår man från

definitionen av acceleration  $a = \frac{dv}{dt}$ , som alltid gäller. Beroende på om accelerationen är given som funktion av tiden, hastigheten eller koordinaten, fortsätter man på olika sätt.

### M5.1 Accelerationen är en funktion av tiden

Accelerationen är given som funktion av tiden,  $a = a(t)$ . Detta fall går igenom i "University Physics" kapitel 2-7, så läsaren hänvisas dit.

### M5.2 Accelerationen är en funktion av koordinaten

Accelerationen är given som funktion av koordinaten,  $a = a(x)$ :

Enligt kedjeregeln kan uttrycket  $a = \frac{dv}{dt}$  skrivas som

$$a = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

eller om man separerar variabler

$$a dx = v dv . \tag{5.1}$$

Här sätter man nu in det uttryck man har för  $a$ , dvs  $a$  uttryckt som funktion av  $x$ ,  $a(x)$ .

Sedan integrerar man från startläget, där koordinaten är  $x_1$  och hastigheten  $v_1$ , till slutläget där koordinaten är  $x_2$  och hastigheten är  $v_2$ .

$$\int_{x_1}^{x_2} a(x) dx = \int_{v_1}^{v_2} v dv$$

Man utför integrationen, sätter in de storheter man känner och beräknar det som efterfrågas.

Till sambandet (5.1) som gäller för linjär rörelse finns ett motsvarande samband för rotationsrörelse.

$$\alpha d\theta = \omega d\omega \quad (5.2)$$

Acceleration  $a$  motsvaras vid rotationsrörelse av vinkelacceleration  $\alpha$ , hastighet  $v$  motsvaras av vinkelhastighet  $\omega$  och koordinat  $x$  av vinkelkoordinat  $\theta$ .

### M5.3 Accelerationen är en funktion av hastigheten

Accelerationen är given som funktion av hastigheten,  $a = a(v)$ : Ekvation (5.1) används även i detta fall, men eftersom accelerationen är en funktion av  $v$ , måste man dividera båda leden med  $a(v)$  så att alla termer innehållande  $v$  kommer på samma sida om likhetstecknet innan man integrerar.

$$dx = \frac{v dv}{a(v)} \quad (5.3)$$

Sedan integreras ekvation (5.3).

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{v_1}^{v_2} \frac{v dv}{a(v)}$$

### Exempel

1. En bil har i startögonblicket en acceleration som är  $5,0 \text{ m/s}^2$ , och som minskar linjärt till noll på 10 s. Hur lång tid tar det för bilen att färdas 300m?

*Lösning:*

Bilens acceleration kan skrivas

$$a = a_0 - kt$$

där  $a_0 = 5,0 \text{ m/s}^2$ , och  $k$  fås ur villkoret att  $a=0$  för  $t=t_1=10 \text{ s}$ .

$$k = \frac{a_0}{t_1} = \frac{5,0}{10} = 0,50$$

Alltså:  $a = 5,0 - 0,50t$  (1)

Hastigheten under accelerationsskedet ges då av:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

Med ekvation (1) insatt:

$$v - v_0 = \int_0^t (5,0 - 0,50t) dt$$

$$v = v_0 + 5,0t - 0,25t^2$$
 (2)

Ekvation (2) ger bilens hastighet  $v_1$  efter 10 s, då accelerationen upphört (starthastigheten  $v_0 = 0$ ):

$$v_1 = 25 \text{ m/s}$$

Tillryggalagd sträcka under accelerationsskedet ges av

$$\int_0^{s_1} ds = \int_{v_0}^{v_1} v dt = \int_0^{t_1} (5,0t - 0,25t^2) dt$$

$$s_1 = 2,5t_1^2 - \frac{0,25}{3}t_1^3 = 166,7 \text{ m}$$

Återstående sträcka  $300 - 166,7 \text{ m} = 133,3 \text{ m}$  avverkas med den konstanta hastigheten  $v_1 = 25 \text{ m/s}$ . Tiden för detta blir

$$t_2 = \frac{133,3}{25} = 5,33 \text{ s}$$

Totala tiden  $t_{tot} = t_1 + t_2 = (10 + 5,33) \text{ s} = 15,33 \text{ s}$

Svar: 15 s.

2. Pontoner skall utformas till ett flygplan som skall starta och landa på sjöar. Vid landning har planet hastigheten 160 km/h när det når vattenytan och denna hastighet skall reduceras till 30 km/h på en sträcka av 400 m. Accelerationen kan under detta skede tecknas som  $a = -Kv^2$ . Beräkna konstanten  $K$  som bestäms av storlek och form på pontonerna.

Lösning: Accelerationen är inte konstant utan given som funktion av hastigheten. Därför används sambandet

$$a dx = v dv$$
 (1)

I just detta fall gäller för accelerationen att

$$a = -Kv^2$$
 (2)

Ekvation (2) insättes i (1):

$$-Kv^2 dx = v dv$$

som skrivs om till

$$-K dx = \frac{dv}{v}$$

Integrera från startvärden för  $x$  respektive  $v$  till slutvärden.

$$\int_0^s -K dx = \int_{v_1}^{v_2} v dv$$

$$-Ks = \ln v_2 - \ln v_1 = \ln \frac{v_2}{v_1}$$

$$K = -\frac{1}{s} \ln \frac{v_2}{v_1}$$

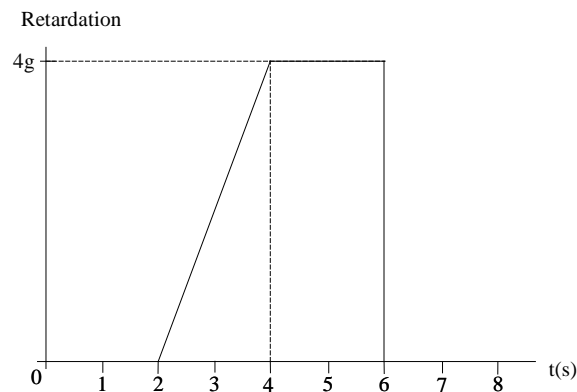
Numeriskt:  $s=400$  m;  $v_1 = \frac{160}{3,6}$  m/s;  $v_2 = \frac{30}{3,6}$  m/s .

Insättning ger:  $K = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$

Svar:  $K = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$

## Uppgifter

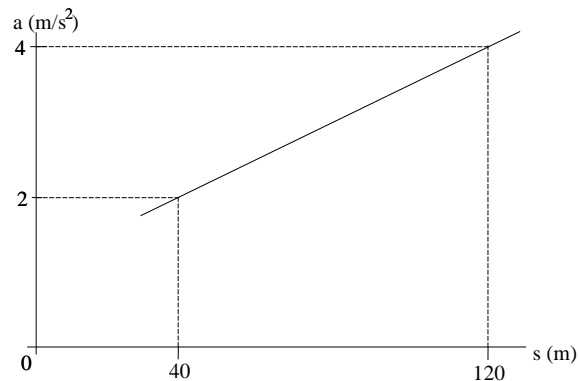
### M5.1



En bromsande kraft anbringas på en partikel vid tiden  $t=2$  s, och denna kraft ger upphov till en retardation enligt diagrammet ovan. Partikeln har från början hastigheten 100 m/s. Vilken är partikelns hastighet vid tiden  $t=4$  s respektive 6 s?

Svar: 61 m/s respektive  $-18$  m/s.

## M5.2



Ett fordon rör sig rätlinjigt med en acceleration som ökar linjärt med koordinaten ( $s$ ) enligt diagrammet. Då koordinaten  $s=40$  m är hastigheten 20 m/s. Beräkna hastigheten för  $s=120$  m.

Svar: 30 m/s

## M5.3

Luftmotståndet mot en bil i rörelse är proportionellt mot hastigheten i kvadrat. Diverse andra friktionsförluster ger en konstant inbromsande kraft, så att accelerationen för bilen då motorn frikopplats kan tecknas

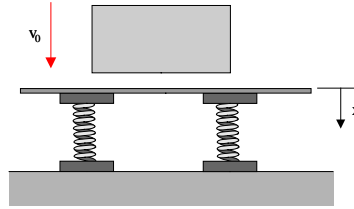
$$a = -C_1 - C_2 v^2$$

där  $C_1$  och  $C_2$  är konstanter.

Om bilen har hastigheten  $v_0$  då motorn frikopplas, hur lång sträcka  $s$  (uttryckt i givna storheter) rullar bilen innan den stannar?

Svar:  $s = \frac{1}{2C_2} \ln \left( 1 + \frac{C_2}{C_1} v_0^2 \right)$

## M5.4



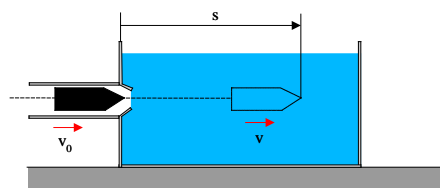
En kropp faller mot och träffar med hastigheten  $v_0$  en lätt platta festsatt ovanpå ett system av fjädrar. Kroppen följer med plattformen nedåt vid den efterföljande rörelsen och har då accelerationen

$$a = g - cx$$

där  $c$  är en konstant och  $x$  mäts från plattans ursprungliga läge. Fjädrarnas maximala hoptryckning noteras vara  $x_{\max}$ . Bestäm från detta ett uttryck för konstanten  $c$ .

Svar:  $c = \frac{v_0^2 + 2gx_{\max}}{x_{\max}^2}$

## M5.5



En projektil skjuts in med hastigheten  $v_0$  i en behållare med en viskös vätska. Vätskefriktionen ger upphov till en acceleration som kan skrivas

$$a = -kv^2$$

där  $k$  är en konstant.

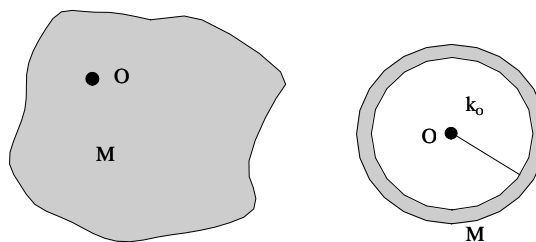
Hur lång sträcka  $s$  har projektilen tillryggalagt då hastigheten reducerats till  $\frac{v_0}{2}$ , och vad är tiden för denna hastighetsreduktion?

Svar:  $s = \frac{0,693}{k}; t = \frac{1}{kv_0}$

# Kapitel M6

## Tröghetsradie, sammansatta kroppar, tunna skivor

### M6.1 Tröghetsradie



Figur 6.1. Illustration av begreppet tröghetsradie

I stället för att ange tröghetsmomentet för en kropp ges i många fall i stället uppgift om *tröghetsradien* för kroppen.

Antag att den osymmetriska kroppen i figuren ovan har massan  $M$  och tröghetsmomentet  $I_O$  med avseende på en axel  $O$ .

Man kan nu göra tankeexperimentet att kroppens massa  $M$  fördelas jämnt i form av en tunn ring med sådan radie  $k_O$ , att ringens tröghetsmoment blir detsamma som kroppens.

Ringens tröghetsmoment kan då skrivas:

$$I_{O_{ring}} = \int r^2 dm = \int k_O^2 dm = k_O^2 \int dm = k_O^2 M$$

Men denna rings tröghetsmoment är detsamma som den ursprungliga kroppens, dvs.

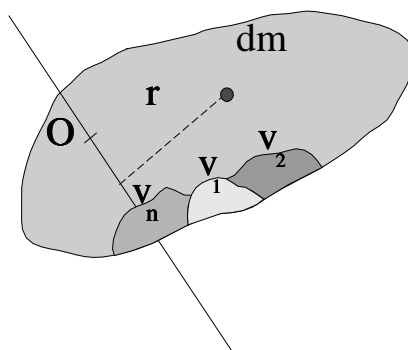
$$I_O = I_{O_{ring}} = Mk_O^2$$

Kroppens tröghetsradie med avseende på en rotationsaxel genom O definieras således:

$$k_o = \sqrt{\frac{I_o}{M}} \quad (6.1)$$

där  $I_o$  är kroppens tröghetsmoment och  $M$  dess massa.

## M6.2 Sammansatta kroppar



Figur 6.2. Uppdelning av en kropp i delkroppar

Kroppens tröghetsmoment med avseende på en axel genom O är enligt definition:

$$I_o = \int r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV \quad (6.2)$$

där  $\rho$  är densiteten och  $dV$  är masselementets volym.

Men kroppens totala volym  $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ , varför ekvation (6.2) kan skrivas:

$$I_o = \int_{V_1} r^2 \rho dV + \int_{V_2} r^2 \rho dV + \dots + \int_{V_n} r^2 \rho dV$$

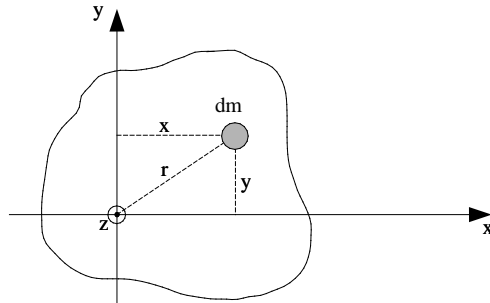
dvs.

$$I_o = I_{o1} + I_{o2} + \dots + I_{on} \quad (6.3)$$

Tröghetsmomentet för en sammansatt kropp med avseende på en viss axel är lika med summan av delarnas tröghetsmoment med avseende på axeln i fråga.

## M6.3 Tunna skivor

Den tunna skivan som visas i figur 6.3 ligger i  $xy$ -planet (saknar utsträckning i  $z$ -planet).



Figur 6.3 Tröghetsmoment för tunn skiva

Skivans tröghetsmoment med avseende på  $z$ -axeln

$$I_{zz} = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm \quad (6.4)$$

Tröghetsmomentet med avseende på  $x$ - respektive  $y$ -axlarna :

$$I_{xx} = \int y^2 dm \quad (6.5)$$

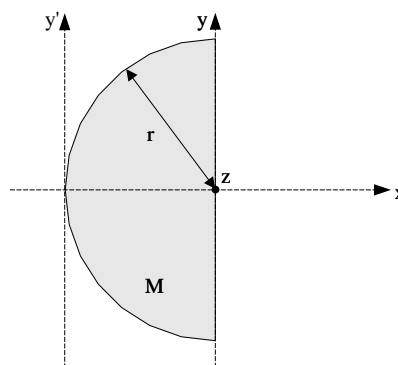
$$I_{yy} = \int x^2 dm \quad (6.6)$$

Från ekvationerna (6.4)-(6.6) inses att

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \quad (6.7)$$

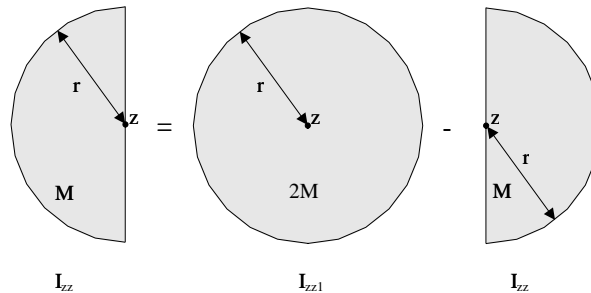
gäller för en tunn skiva som saknar utsträckning i  $z$ -led.

## Exempel



En skiva i form av en tunn, homogen halvcirkel har massan 2,0 kg och radien 0,25 m. Beräkna skivans tröghetsradie med avseende på  $z$ -,  $x$ -,  $y$ - och  $y'$ -axlarna.

Lösning:



Figur Halv cirkelskiva=hel-halv

Det gäller enligt sambandet för sammansatta kroppar att

$$I_{zz} = I_{zz1} - I_{zz}$$

$$I_{zz} = \frac{I_{zz1}}{2} \quad (1)$$

För hel cirkelskiva med massan  $2M$

$$I_{zz1} = \frac{(2M)r^2}{2} \quad (2)$$

Ekvation (2) insättes i (1):

$$I_{zz} = \frac{Mr^2}{2} \quad (3)$$

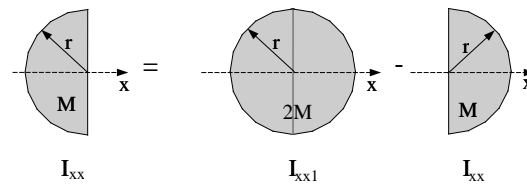
Notera att uttrycket för tröghetsmomentet för en halv cirkelskiva till formen ser likadan ut som för en hel skiva. Till beloppet är dock tröghetsmomentet för den hela skivan dubbelt så stort eftersom massan är dubbelt så stor.

Tröghetsradien

$$k_{zz} = \sqrt{\frac{I_{zz}}{M}} = \text{enligt (3)} \frac{r}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

Numeriskt:  $r=0,25$  m. Insättning i (4) ger:

$$k_{zz} = 0,177 \text{ m}$$



Det gäller

$$I_{xx} = I_{xx1} - I_{xx}$$

$$I_{xx} = \frac{I_{xx1}}{2} \quad (5)$$

Men då skivan är tunn gäller att:

$$I_{xx1} = \frac{(2M)r^2}{4} \quad (6)$$

Ekvation (6) i (5):

$$I_{xx} = \frac{Mr^2}{4} \quad (7)$$

Tröghetsradien

$$k_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{M}} = \text{enligt (7): } \frac{r}{2} = \frac{0,25}{2} = 0,125 \text{ m}$$

Skivan är tunn och saknar utsträckning i z-led. Då gäller att

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$$

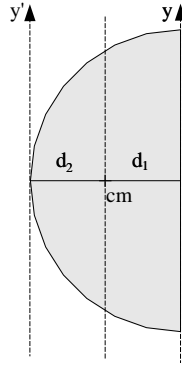
$$I_{yy} = I_{zz} - I_{xx} \quad (8)$$

Ekvation (3) och (7) insättes i (8):

$$I_{yy} = \frac{Mr^2}{2} - \frac{Mr^2}{4} = \frac{Mr^2}{4} \quad (9)$$

Tröghetsradien

$$k_{yy} = \frac{r}{2} = 0,125 \text{ m}$$



För att få tröghetsmomentet med avseende på  $y'$ -axeln, måste först tröghetsmomentet med avseende på en med  $y'$  parallell axel genom masscentrum bestämmas (kan göras med Steiners sats då  $I_{yy}$  är känd), och sedan använda Steiners sats.

Steiners sats ger:

$$I_{yy} = I_{cm} + Md_1^2$$

$$I_{cm} = I_{yy} - Md_1^2 \quad (10)$$

$$I_{y'y'} = I_{cm} + Md_2^2 \quad (11)$$

Ekvation (10) insättes i (11):

$$I_{y'y'} = I_{yy} - Md_1^2 + Md_2^2 \quad (12)$$

Ekvation (9) insättes i (12):

$$I_{y'y'} = \frac{Mr^2}{4} - Md_1^2 + Md_2^2 \quad (13)$$

Ur tabell fås att  $d_1 = \frac{4r}{3\pi}$ , varför  $d_2 = r - \frac{4r}{3\pi}$

Insättning i (13) :

$$I_{y'y'} = \frac{Mr^2}{4} - M\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 + M\left(r - \frac{4r}{3\pi}\right)^2 \quad (14)$$

Tröghetsradien

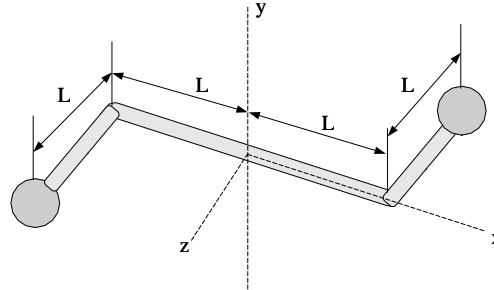
$$\begin{aligned} k_{y'y'} &= \sqrt{\frac{I_{y'y'}}{M}} = \text{enligt ekv. (14)} \\ &= r \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)^2} \end{aligned}$$

Numeriskt:  $r=0,25$  m ger att  $k_{y'y'} = 0,633r = 0,158$  m

Svar:  $k_{zz} = 0,18$  m;  $k_{xx} = k_{yy} = 0,13$  m;  $k_{y'y'} = 0,16$  m

## Uppgifter

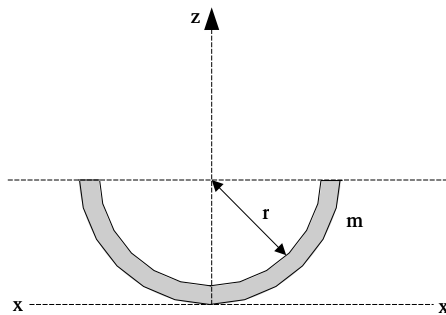
### M6.1



Bestäm uttrycken för tröghetsmomenten med avseende på  $x$ -,  $y$ - och  $z$ -axlarna. Stängernas massa kan försummas. Vardera kulan har massan  $m$ .

Svar:  $I_{xx} = I_{zz} = 2mL^2$ ;  $I_{yy} = 4mL^2$

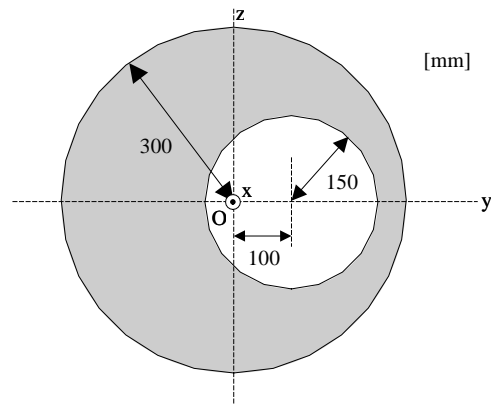
### M6.2



Beräkna tröghetsmomentet med avseende på dels  $z$ -axeln, dels  $x$ -axeln för den halva, tunna ringen i figuren.

Svar:  $I_{zz} = \frac{mr^2}{2}$ ;  $I_{xx} = mr^2 \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right)$

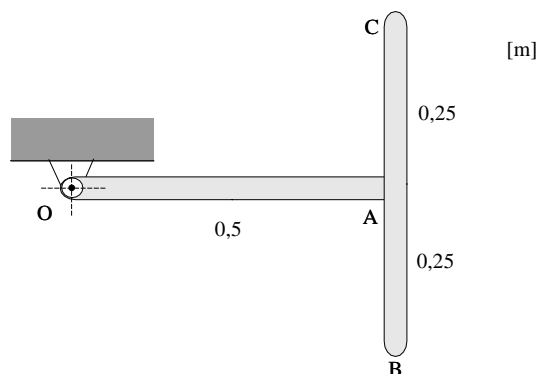
## M6.3



Beräkna tröghetsradien för hålcirkelskivan med avseende på x-axeln. Skivan är tillverkad av stål och har tjockleken 30 mm.

Svar: 0,23 m

## M6.4



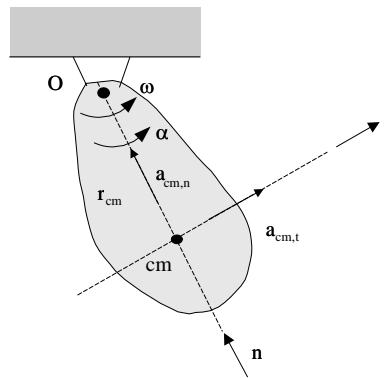
Beräkna tröghetsradien med avseende på O för konstruktionen ovan. Var och en av de två smala, homogena stängerna har massan 8,0 kg.

Svar: 0,42 m

# Kapitel M7

## Rotation kring fix axel, lagerkrafter

### M7.1 Lagerkrafter



Figur 7.1. Definition av storheter som används vid rotation kring fix axel

Då en kropp roterar kring en fix axel O, påverkas den av en kraft från axeln. I tekniska sammanhang är denna typ av rörelse vanligt förekommande, och det är då viktigt att kunna dimensionera axeln och välja material så att den klarar den kraft som den i sin tur enligt Newons tredje lag utsätts för. Detta avsnitt avser att visa hur beräkningarna av sådana så kallade lagerkrafter lämpligast utförs.

Utgångsekvationerna är (8-34) i "University Physics"

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}} \quad (7.1)$$

som beskriver masscentrums translationsrörelse och (10-6)

$$\sum \tau = I\alpha \quad (7.2)$$

som beskriver rotationsrörelsen.

Masscentrum går här i cirkelbana, och dess rörelse delas därför upp i en rörelse i radiell riktning (normal-, n-riktning) och en i tangentiell riktning (t-riktning).

Ekvation (7.1) blir då:

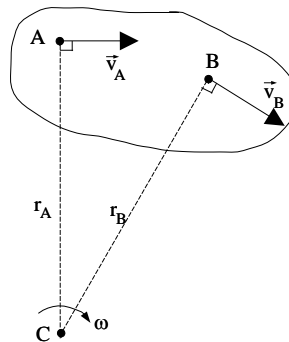
$$\sum F_n = Ma_n = M \frac{v^2}{r_{\text{cm}}} = Mr_{\text{cm}} \omega^2 \quad (7.3)$$

$$\sum F_t = Ma_t = Mr_{\text{cm}} \alpha \quad (7.4)$$

Eftersom kroppen roterar kring den fixa axeln O, tas momentekvationen med avseende på den punkten. Ekvation (10-6) skrivs då:

$$\sum \tau_o = I_o \alpha \quad (7.5)$$

## M7.2 Momentancentrum



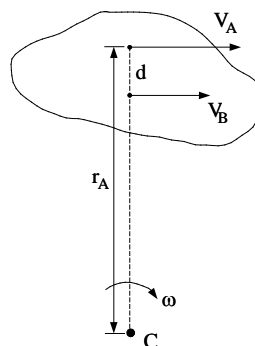
Figur 7.2 Momentancentrum

En kropps allmänna rörelse kan beskrivas som en translationsrörelse och en rotationsrörelse kring masscentrum. Emellertid kan kroppens rörelse i ett *givet ögonblick* beskrivas som enbart en rotationsrörelse kring en viss punkt, kallad *momentancentrum*. Antag att hastighetens riktning i två punkter A och B på en kropp är kända. Om kroppens rörelse i det aktuella ögonblicket ses som en ren rotationsrörelse kring detta momentancentrum C, går varje punkt på kroppen i en cirkelbana kring C. Momentancentrum måste då från A sett ligga i en riktning vinkelrätt mot hastighetsvektorn  $\vec{v}_A$ , och från B sett vinkelrätt mot  $\vec{v}_B$ . Skärningen mellan dessa båda linjer, dragna vinkelrätt mot  $\vec{v}_A$  respektive  $\vec{v}_B$  ger då läget för momentancentrum C, som kan betraktas som en *momentan* rotationsaxel.

Om beloppen av hastigheterna  $v_A$  och  $v_B$  är kända gäller med figurens beteckningar

$$v_A = r_A \omega; v_B = r_B \omega$$

där  $\omega$  är kroppens rotationshastighet.



Figur 7.3 Momentcentrum, parallella hastigheter

Om hastigheterna i punkterna A och B är parallella, gäller:

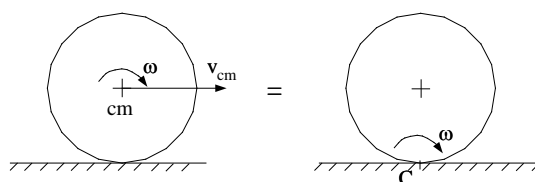
$$v_A = r_A \omega$$

$$v_B = r_B \omega = (r_A - d) \omega$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{r_A}{r_A - d}$$

dvs. om  $v_A$ ,  $v_B$  och  $d$  är kända kan  $r_A$ , momentancentrums läge, bestämmas.

Ett exempel på momentcentrum är ett hjul som rullar utan att glida.

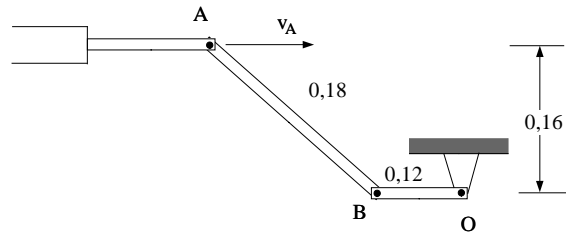


Figur 7.4 Momentcentrum för hjul som rullar utan att glida

Här är hjulets kontaktpunkt med underlaget momentcentrum.

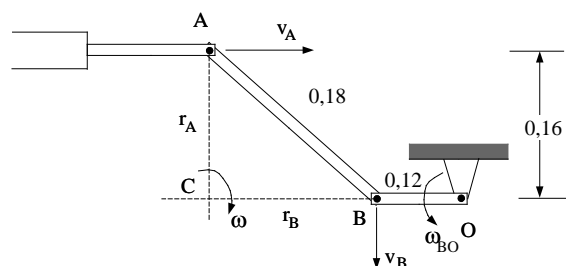
## Exempel

1.



Pistongen hörande till hydraulcylindern rör sig i ett visst ögonblick horisontellt åt höger med hastigheten  $v_A = 2.0$  m/s, och delen BO är horisontell. Bestäm momentancentrums läge och beräkna vinkelhastigheten för OB i detta ögonblick.

Lösning:



Momentancentrum ligger i punkten C. Delen AB:s rörelse kan i detta ögonblick betraktas som en rotation med vinkelhastigheten  $\omega$  kring momentancentrum. Då gäller:

$$v_A = r_A \omega; \quad \omega = \frac{v_A}{r_A} \quad (1)$$

Punkten B:s hastighet

$$v_B = r_B \omega \quad (2)$$

Ekv. (1) i (2) ger:

$$v_B = r_B \frac{v_A}{r_A} \quad (3)$$

OB:s vinkelhastighet ges av att

$$v_B = 0,12\omega_{BO}$$

$$\omega_{BO} = \frac{v_B}{0,12} \quad (4)$$

Ekv. (3) i (4):

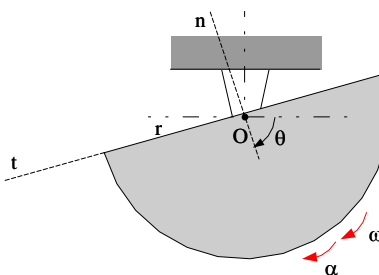
$$\omega_{BO} = \frac{r_B \frac{v_A}{r_A}}{0,12} = v_A \frac{r_B}{0,12r_A} \quad (5)$$

Geometrin ger att  $r_A = 0,16 \text{ m}$ ;  $r_B = \sqrt{0,18^2 - 0,16^2} = 0,0825 \text{ m}$   
 $v_A = 2,0 \text{ m/s}$ .

Insättning i ekv. (5) ger:  $\omega_{BO} = 8,59 \text{ rad/s}$

Svar: 8,6 rad/s moturs

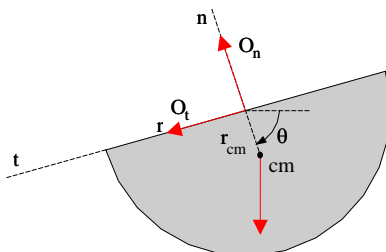
2.



Ett halvklot med massan  $M$  och radien  $r$  släpps från vila i läget  $\theta=0$  och roterar fritt i vertikalplanet kring den fixa axeln  $O$ . Härled uttryck för  $n$ - och  $t$ - komponenterna av kraften från axeln  $O$  på halvklotet som funktion av vinkeln  $\theta$ .

Lösning:

Frilägg halvklotet för en godtycklig vinkel  $\theta$ .



Rotation kring fix axel, varför ekvationerna

$$\sum F_n = Mr_{cm}\omega^2 \quad (1)$$

$$\sum F_t = Mr_{cm}\alpha \quad (2)$$

$$\sum \tau_o = I_o\alpha \quad (3)$$

används.

Börja med momentekvationen (ekv. (3)) för att bestämma  $\alpha$ . Sätt sedan in i ekvation (2) och beräkna den tangentiella lagerkraften. Med  $\alpha$  känd kan  $\omega$  för en godtycklig vinkel  $\theta$  beräknas, varefter ekvation (1) ger lagerkraften i normalriktningen (i radiell led).

Kraftmomentet med avseende på O:

$$\sum \tau_o = Mg(\cos\theta)r_{cm}$$

insättes i (3).

$$Mg(\cos\theta)r_{cm} = I_o\alpha$$

$$\alpha = \frac{Mg(\cos\theta)r_{cm}}{I_o} \quad (4)$$

Tröghetsmomentet för ett halvklot med avseende på en axel genom O:

$$I_o = \frac{2}{5}Mr^2 \quad (5)$$

och

$$r_{cm} = \frac{3r}{8} \quad (6)$$

Ekvation (5) och (6) insättes i (4):

$$\alpha = \frac{Mg(\cos\theta)\frac{3r}{8}}{\frac{2}{5}Mr^2} = \frac{15g\cos\theta}{16r} \quad (7)$$

$$\sum F_t = Mg\cos\theta + O_t$$

insättes i ekvation (2) tillsammans med (7):

$$Mg\cos\theta + O_t = M\frac{3r}{8}\frac{15g\cos\theta}{16r}$$

$$O_t = Mg\cos\theta\left(\frac{45}{128} - 1\right) = -\frac{83}{128}Mg\cos\theta$$

För att få  $O_n$  måste vinkelhastigheten  $\omega$  först beräknas för en godtycklig vinkel  $\theta$ .

För detta används sambandet

$$\omega d\omega = \alpha d\theta \quad (8)$$

(Alternativt kan energisatsen användas.)

Ekvation (8) integreras från startvärdena  $\omega=0$ ,  $\theta=0$  till  $\omega$  respektive  $\theta$ .

$$\int_0^{\omega} \omega d\omega = \int_0^{\theta} \alpha d\theta \quad (9)$$

$\alpha$  enligt ekvation (7) insättes i (9):

$$\int_0^{\omega} \omega d\omega = \int_0^{\theta} \frac{15g \cos \theta}{16r} d\theta$$

$$\omega^2 = \frac{15g \sin \theta}{8r} \quad (10)$$

Vidare är

$$\sum F_n = -Mg \sin \theta + O_n$$

som insättes i ekvation (1) tillsammans med ekvation (10):

$$-Mg \sin \theta + O_n = M \frac{3r}{8} \frac{15g \sin \theta}{8r}$$

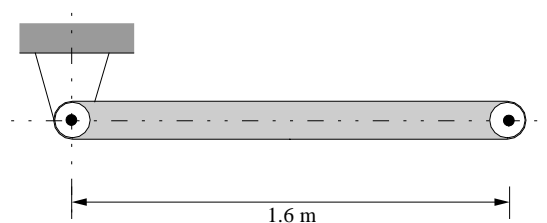
$$O_n = \frac{109}{64} Mg \sin \theta$$

Svar:  $F_t = -\frac{83}{128} Mg \cos \theta$

$$F_n = \frac{109}{64} Mg \sin \theta$$

## Uppgifter

### M7.1

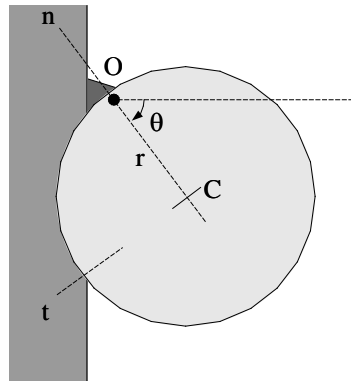


En homogen, smal stång med massan 20 kg kan rotera med försumbar friktion kring en horisontell axel. Stången släpps från vila

i horisontellt läge. Beräkna beloppet av lagerreaktionskraften i axeln omedelbart efter det att stängen släppts.

Svar: 49 N

M7.2

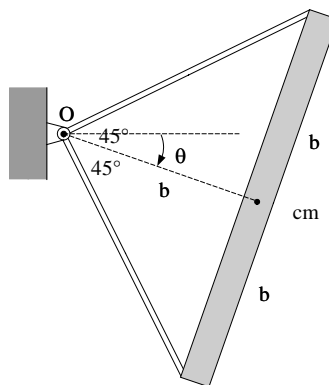


Den tunna, homogena skivan med massan  $M$  och radien  $r$  som visas i figuren kan rotera med försumbar friktion kring den horisontella axeln  $O$ . Skivan släpps från vila med vinkeln  $\theta=0$ .

Bestäm som funktion av  $\theta$  uttryck för  $n$ - och  $t$ -komponenterna av kraften från axelleden i  $O$ .

Svar:  $O_n = \frac{7}{3} Mg \sin \theta$ ;  $O_t = -\frac{1}{3} Mg \cos \theta$

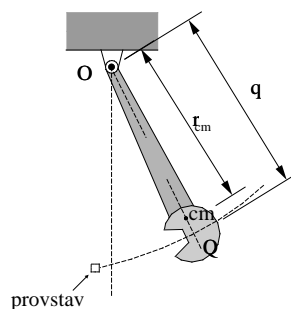
M7.3



En homogen, smal stav med massan  $M$  och längden  $2b$  är medelst lätta stänger, fästade i ändarna, upphängd i en horisontell axel  $O$ . Konstruktionen släpps från vila i det läge där  $\theta=0$ . Beräkna kraften i axeln  $O$  ögonblicket efter.

Svar:  $\frac{Mg}{4}$

## M7.4



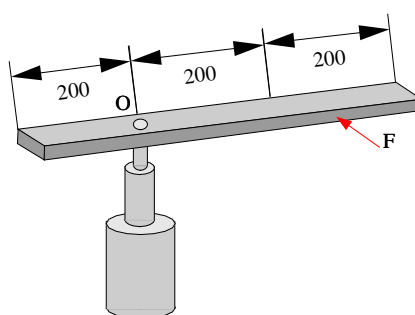
En anordning för att testa slaghållfastheten hos olika material utgörs av en pendel med massan  $M$  med masscentrum beläget på avståndet  $r_{cm}$  från upphängningsaxeln  $O$ . Tröghetsradien är  $k_o$ . Vid testet stöter en punkt  $Q$  på pendeln, belägen på avståndet  $q$  från axeln  $O$ , emot provstaven.

Detta avstånd  $q$  är så anpassat att den tangentiella kraften,  $O_t$ , i axeln blir noll. Punkten  $Q$  kallas för stötcentrum (nollmomentcentrum).

Bestäm  $q$  uttryckt i  $r_{cm}$  och  $k_o$  så att  $O_t=0$ .

Svar:  $q = \frac{k_o^2}{r_{cm}}$

## M7.5

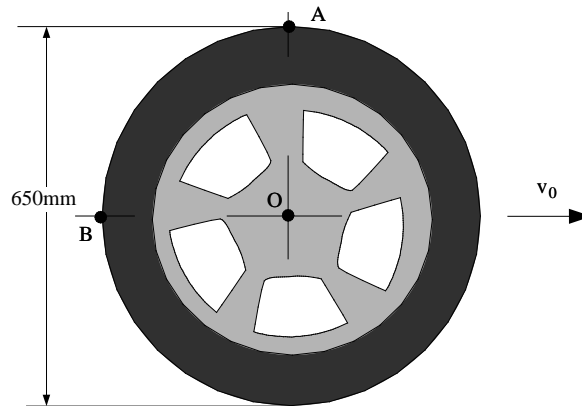


[mm]

En smal, homogen stav med massan 10 kg kan rotera med försumbar friktion kring en vertikal axel  $O$ . En horisontell kraft  $F=150$  N anbringas på staven 200 mm från högra ändan då denna är i vila. Beräkna beloppet av lagerreaktionskraften i  $O$  omedelbart efter det att  $F$  börjat verka.

Svar: 75 N

M7.6

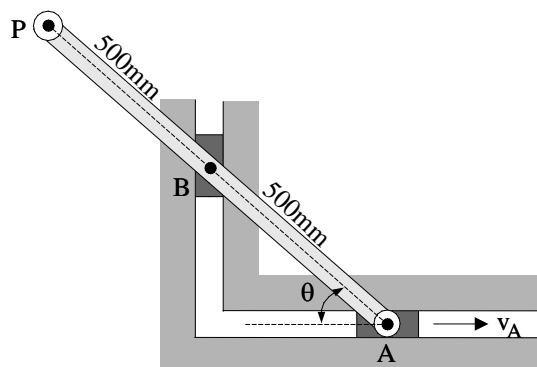


En bil har hastigheten  $v_0 = 8,5 \text{ m/s}$

- Vilken är hjulets vinkelhastighet?
- Vilken hastighet (belopp och riktning) har punkten A på hjulets periferi?
- Vilken hastighet (belopp och riktning) har punkten B på hjulets periferi?

Svar: a) 26 rad/s; b) 17 m/s; c) 12,0 m/s

M7.7



Staven AP:s rörelse begränsas av glidhyslorna A:s och B:s rörelser. I ett visst ögonblick har A farten 1,4 m/s i ett läge som ges av att vinkeln  $\theta = 45^\circ$ .

- Bestäm momentancentrums läge för stavens rotation i detta ögonblick.
- Beräkna vinkelhastigheten för staven samt hastigheten (belopp och riktning) för punkten P.

Svar: b) 4,0 rad/s respektive 3,1 m/s

# Kapitel M8

## Virtuellt arbete, virtuella arbetets princip

Det finns flera olika sk energimetoder för att lösa problem i statik. De bygger på att omformulera jämviktsvillkoren till en form som ibland är mer praktiskt användbar. Här visas hur sådana metoder kan användas som en alternativ metod att lösa jämviktsproblem. Speciellt användbart blir dessa metoder när man har ett system av många stela kroppar förenade med tex leder. Vanlig jämviktsmetodik kräver då många friläggningar och jämviktsekvationer. Användande av virtuella arbetets princip ger i dessa fall kortare och enklare lösning. Ett ytterligare användningsområde är att beräkna möjliga jämviktslägen hos en kropp samt bestämma stabiliteten hos dessa jämviktslägen. Fundamentala begrepp kommer vara: arbete; virtuell förflyttning; virtuellt arbete och virtuella arbetets princip.

### M8.1 Arbete, virtuell förflyttning och virtuellt arbete

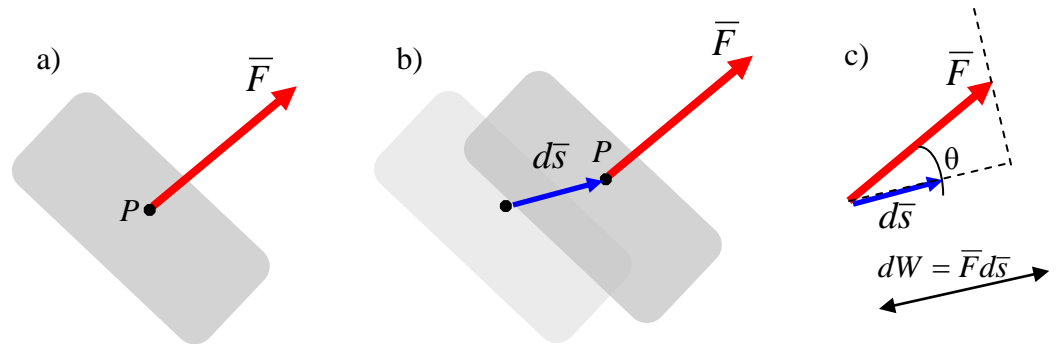
Vi ska beräkna arbetet som uträttas av krafter och moment vid olika tänkta små förflyttningar av systemet vi studerar. I figur 8.1 verkar en kraft  $\vec{F}$  på ett objekt i angreppspunkten  $P$ . Om nu denna kraft verkar under en infinitesimal liten translaterande förskjutning  $d\vec{s}$  så är arbetet som uträttats:

$$dW = \vec{F}d\vec{s} \quad (8.1)$$

En virtuell förflyttning av systemet är en tänkt liten förflyttning  $\delta\vec{s}$ . På samma sätt som ovan, blir det virtuella arbetet  $\delta W$  uträttat av kraften  $\vec{F}$  blir vid en sådan förflyttning:

$$\delta W = \vec{F}\delta\vec{s} \quad (8.2)$$

Den virtuella förflyttningen kan även vara en rotation, som visas i exempel 1.

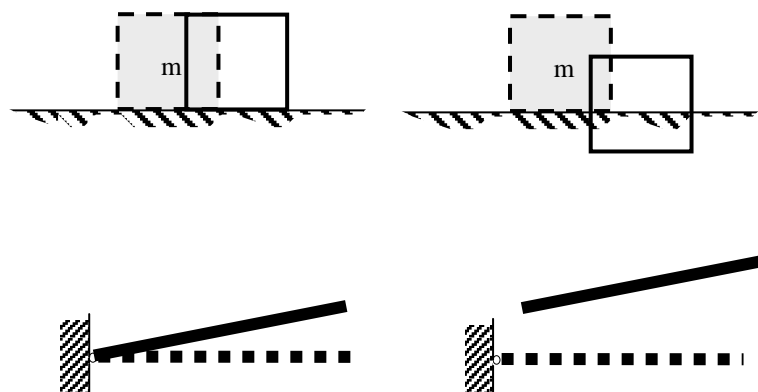


Figur 8.1 a) En kraft  $f$  verkar på objektet i angreppspunkten  $P$ ; b) En liten förskjutning; c) Arbeett som uträttas är

$$dW = \bar{F} d\bar{s} = |\bar{F}| |d\bar{s} \cos \theta| = F s \cos \theta$$

Vid en virtuell förflyttning av ett idealt system kan urskiljas olika typer av krafter:

1. Arbetande/aktiva krafter dvs yttre krafter som uträttar arbete under förflyttningen.
2. Reaktionskrafter uträttar inget arbete om den virtuella förflyttningen sker enligt tvången (se figur 8.2).
3. Inre krafter bidrar inte till arbetet utan nettoarbetet från dem blir noll.

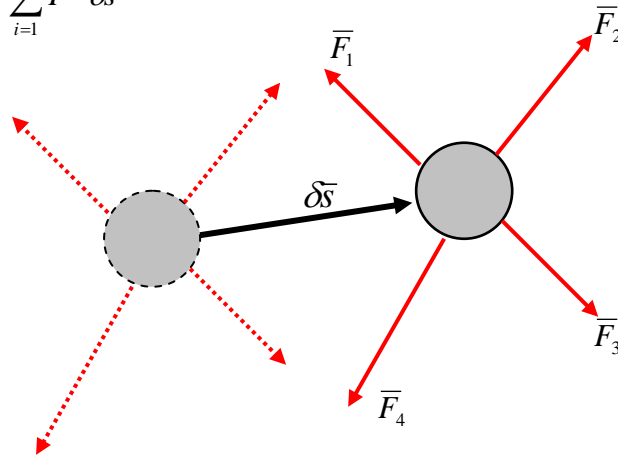


Figur 8.2 Förflyttningar enligt tvång (till vänster) och helt fritt (till höger). Läget före förflyttningen är streckat.

## M8.2 Virtuella arbetets princip

Figur 8.3 visar en partikel i jämvikt som påverkas av ett antal (här fyra) krafter. Om vi gör en virtuell förflyttning  $\delta\bar{s}$  av partikeln (trots att den egentligen har samma läge hela tiden då den är i jämvikt) så blir det virtuella arbetet som uträknas:

$$\begin{aligned}\delta W &= \bar{F}_1 \cdot \delta\bar{s} + \bar{F}_2 \cdot \delta\bar{s} + \bar{F}_3 \cdot \delta\bar{s} + \bar{F}_4 \cdot \delta\bar{s} = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4) \cdot \delta\bar{s} = \\ &= \sum_{i=1}^4 \bar{F}_i \cdot \delta\bar{s}\end{aligned}$$



Figur 8.3 Virtuell förflyttning av partikel som det verkar krafter på.

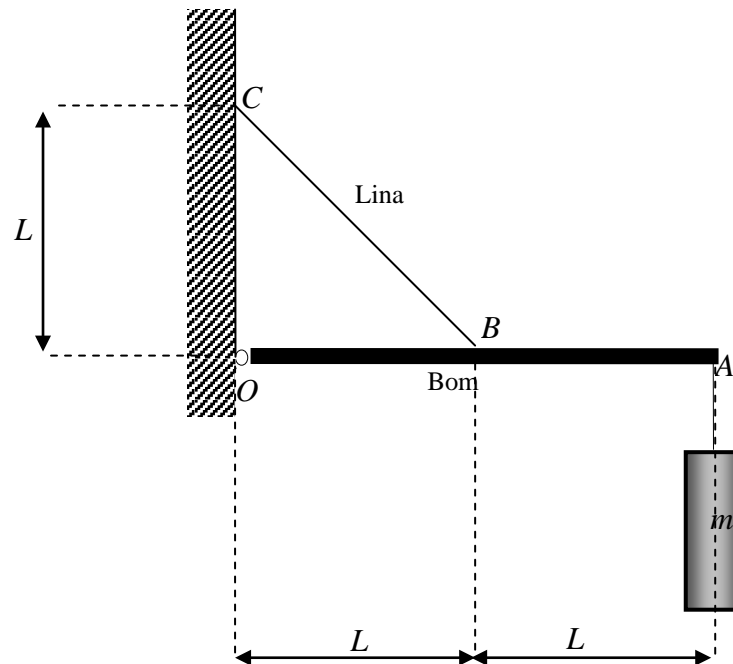
Vid jämvikt så gäller enligt jämviktsvillkoret att kraftsumman ovan är noll dvs  $\sum_{i=1}^4 \bar{F}_i = 0$ . Det är alltså ekvivalent med att det virtuella arbetet är noll. Resonemanget kan självfallet utvidgas till godtyckligt antal krafter som verkar på partikeln. Det gäller alltså:

$$\sum \bar{F} = 0 \Leftrightarrow \delta W = 0 \quad (8.3)$$

Detta är virtuella arbetets princip. Lägg märke till att det faktiskt är en vektorekvation som är ekvivalent med en skalär ekvation.

## Exempel

1.

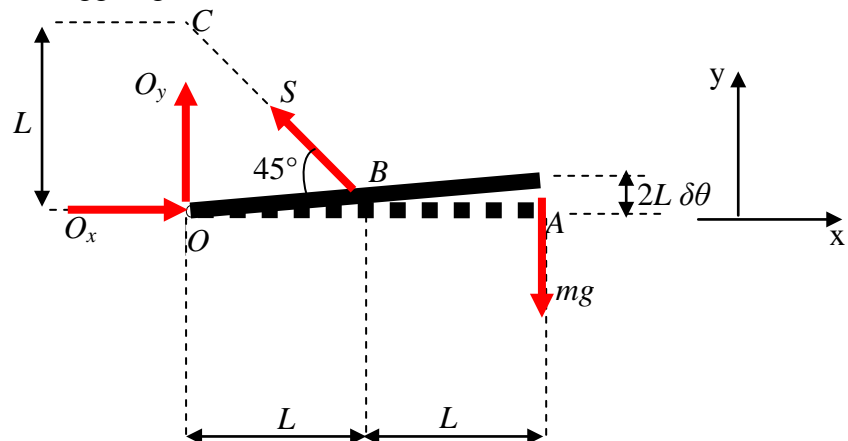


En vikt med massan  $m$  hänger i bommen enligt figur. Leden i  $O$  är friktionsfri. Massan hos bommen kan försummas. Beräkna kraften i lina samt horisontella och vertikala reaktionskraften på bommen i  $O$ .

Lösning:

Vi ska använda virtuella arbetets princip och väljer virtuell förflyttning på lämpligt sätt dvs om vi tex bara är intresserade av kraften i lina så väljer vi en virtuell rotation, enligt tvången, i liten vinkel  $\delta\theta$  kring  $O$  (krafterna i  $O$  uträttar då inget virtuellt arbete och kommer inte med i analysen).

Friläggning:



Vi räknar nu komponentvis i förflyttningarnas riktningar istället för att räkna med vektorer. Vid den lilla rotationen  $\delta\theta$  blir förflyttningen för punkterna A och B:

$$A:s \text{ förflyttning } \delta r_A \text{ i y-led blir } \delta r_A = 2L\delta\theta \quad (1)$$

$$B:s \text{ förflyttning } \delta r_B \text{ i y-led blir } \delta r_B = L\delta\theta \quad (2)$$

Punkten O:s förflyttning är noll.

Det virtuella arbetet från de arbetande krafterna fås som:

$$\delta W = -mg \cdot 2L\delta\theta + S\sin 45^\circ \cdot L\delta\theta \quad (3)$$

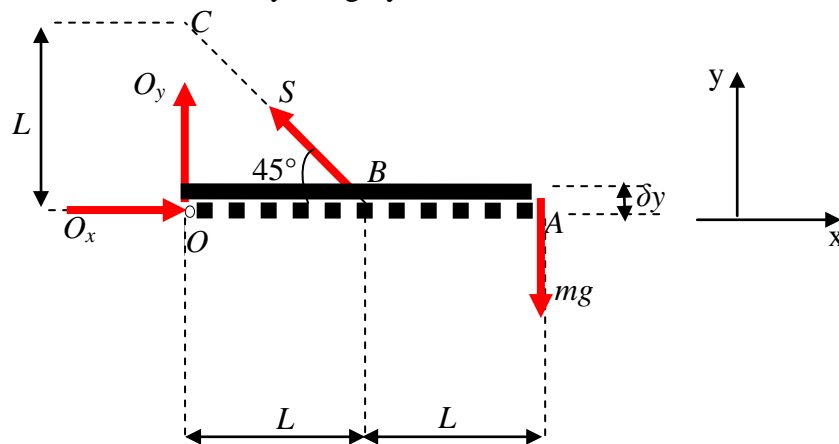
Virtuella arbetets princip ger nu

$$\delta W = 0$$

$$-mg \cdot 2L\delta\theta + S\sin 45^\circ \cdot L\delta\theta = 0$$

$$S = \frac{2mg}{\sin 45^\circ} = 2\sqrt{2}mg \quad (4)$$

För att bestämma vertikala komponenten av kraften i O görs en virtuell förflyttning i y-led:



$\delta W = 0$  ger:

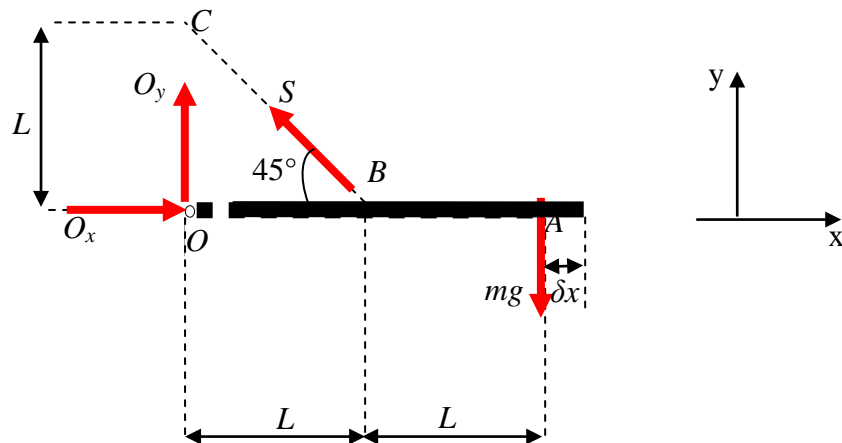
$$-mg \cdot \delta y + S\sin 45^\circ \cdot \delta y + O_y \cdot \delta y = 0$$

$$O_y = mg - S\sin 45^\circ \quad (5)$$

(5) blir med (4)

$$O_y = mg - \frac{2mg}{\sin 45^\circ} \sin 45^\circ = mg - 2mg = -mg \quad (6)$$

För att bestämma horisontella komponenten av kraften i  $O$  görs en virtuell förflyttning i x-led:



$\delta W = 0$  ger:

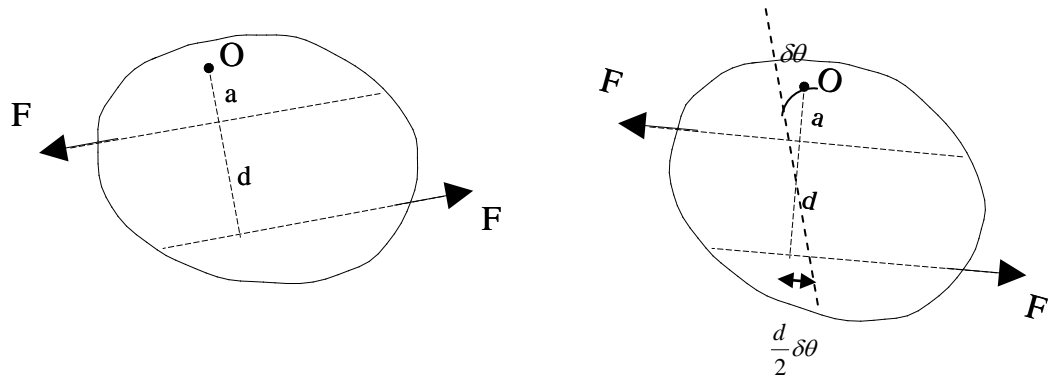
$$O_x \cdot \delta x - S \cos 45^\circ \cdot \delta x = 0$$

$$O_x = \frac{2mg}{\sin 45^\circ} \cos 45^\circ = 2mg \quad (7)$$

Vi ska snart lösa liknande jämviktsproblem med traditionell metod att ställa upp jämviktsekvationerna. Sedan ska vi komma tillbaka och lösa fler jämviktsproblem med virtuella arbetets princip.

### M8.3 Virtuell arbete uträttat av ett kraftpar (moment)

Enligt kapitel M1.1 ger ett kraftpar upphov till ett rent moment. Om ett kraftpar verkar på en kropp under en virtuell translation så kommer nettoarbetet bli noll eftersom den ena kraften uträttar lika stort positivt arbete som den andra uträttar negativt. Om vi däremot har en liten virtuell rotation  $\delta\theta$  av kroppen kommer kraftparet (momentet) att uträtta arbete.



Figur 8.5 Rotation av kropp som det verkar ett kraftpar på.

Det virtuella arbetet fås vid en rotation som:

$$\delta W = F \frac{d}{2} \delta\theta + F \frac{d}{2} \delta\theta = Fd\delta\theta \quad (8.4)$$

För ett moment  $\tau = Fd$  gäller alltså för en virtuell rotation att

$$\delta W = \tau\delta\theta \quad (8.5)$$

## M8.4 Virtuellt arbete för system av sammansatta stela kroppar

Virtuella arbetets princip för ett system av stela kroppar är:

*Ett sammansatt system av stela kroppar är i jämvikt om och endast om summan av arbetande krafternas och momentens virtuella arbete är noll under varje tänkt virtuell förflyttning.*

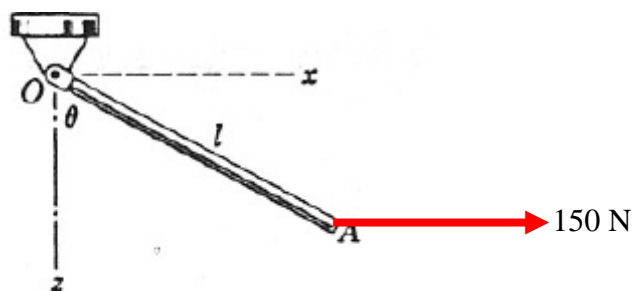
## M8.5 Lösningsteknik

Vid lösning av problem med användande av virtuella arbetets princip så fungerar ofta följande lösningsteknik bra.

- Frilägg och rita figur över systemets läge före virtuell förflyttning.
- Bestäm typ av virtuell förflyttning. Förflyttning i enlighet med tvången gör att man slipper tvångskrafter i analysen (om dessa inte är intressanta). Endast yttre arbetande krafter kommer med i beräkningen.
- Lägg in koordinatsystem och bestäm vilken koordinat som ändrar sig under förflyttningen.
- Beräkna det virtuella arbetet
- Lös ut den sökta kraften genom att använda  $\delta W = 0$

## Uppgifter

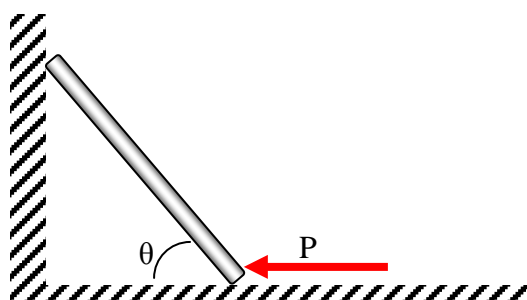
M8.1



Stången enligt figuren har massan  $m = 20$  kg. En kraft med storlek 150 N anbringas horisontellt i A. Leden i O är friktionsfri. Bestäm vinkeln  $\theta$  ( $< 180^\circ$ ) vid jämvikt.

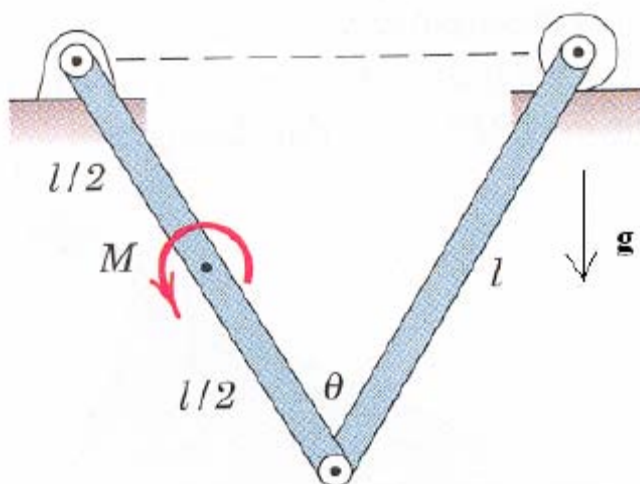
Svar:  $57^\circ$

M8.2



Den tunna stången, med massa  $m$  och längd  $l$ , vilar mot marken och mot väggen. Båda dessa kontakter är glatta (friktionsfria). Bestäm storleken på kraften  $P$  för jämvikt.

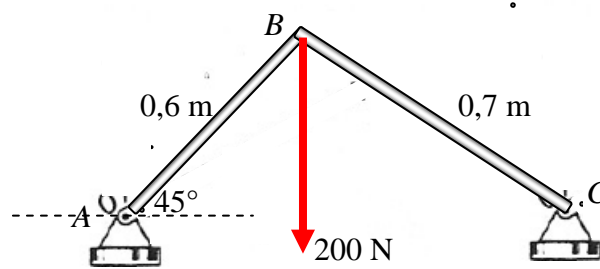
M8.3



Beräkna momentet  $\tau$  som behövs för att systemet ska vara i jämvikt. Länkarna är friktionsfritt lagrade och har massan  $m$  och längden  $l$ .

Svar:  $mgl \sin \frac{\theta}{2}$

M8.4



Bestäm den horisontella kraften i C vid jämvikt. Alla leder är friktionsfria.

Svar: 114 N