

M0068M

Flervariabelanalys

Kurskompendium från Pelles Moln · 28 noter · 2026-10-19
pellesmoln.org/kurser/M0068M

Innehåll

Modul 1 — Partiella derivator

Funktioner av flera variabler	3
Parametriserade kurvor	11
Gränsvärden och kontinuitet	16
Partiella derivator	23
Högre ordningens derivator	36
Kedjeregeln	42
Gradient och riktningsderivata	49

Modul 2 — Extremvärdesproblem

Taylorutveckling	58
Kritiska punkter	62
Extremvärdesproblem	64
Lagranges multiplikatormetod	75

Modul 3 — Multipelintegraler

Dubbelintegraler	82
Variabelbyte i dubbelintegraler	91
Trippelintegraler	110
Variabelbyte i trippelintegraler	117

Modul 4 — Kurvintegraler

Vektorfält	123
Kurvintegraler	130
Kurvintegraler av vektorfält	135
Greens sats	138

Modul 5 — Ytintegraler

Parametriserade ytor	148
Ytintegraler	155
Flödesintegraler	160
Divergens och rotation	165
Gauss sats	176
Stokes sats	181

Inspiration och tillämpningar

Hur fungerar en antenn	186
Vingdesign utan dator	187
Fysikaliska samband och Maxwells ekvationer	190

Funktioner av flera variabler

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#flervariabelanalys #nivåkurva

Kapitel: 13.1 · Kurs: M0068M Förkunskaper: Nivåkurvor och ytor

1. Funktioner av flera variabler – Översikt

En funktion av flera variabler tar ett **par (eller tupel) av tal** och returnerar ett enda tal. Det är en naturlig generalisering av envariabelfunktioner $f(x)$.

Motiverande exempel

Rektangelns area beror på två mått:

$$A = f(x, y) = xy$$

Volymen av en kon beror på radien r och höjden h :

$$V = f(r, h) = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Temperaturen på en plåt i punkten (x, y) :

$$T = f(x, y), \quad (x, y) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2$$

Temperaturen i en kropp vid tid t :

$$T = f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad t \geq 0 \quad (\text{fyra variabler})$$

2. Definition

2.1 Funktion av två variabler

En **funktion av två variabler** är en regel f som till varje punkt (x, y) i definitionsmängden $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ tillordnar ett entydigt reellt tal z :

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y)$$

2.2 Funktion av tre (eller fler) variabler

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto w = f(x, y, z)$$

Eller mer generellt med n variabler: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2.3 Definitionsmängd

Definitionsmängden D_f är mängden av alla punkter där f är definierad. Om inget annat anges antas den **maximala naturliga definitionsmängden**.

≡ Exempel: Bestäm definitionsmängden

a) $f(x, y) = \ln(2 - x^2 - y^2)$

Logaritmen kräver positivt argument:

$$2 - x^2 - y^2 > 0 \iff x^2 + y^2 < 2$$

D_f är den öppna skivan med centrum i origo och radien $\sqrt{2}$.

b) $f(x, y) = \sqrt{xy}$

Roten kräver $xy \geq 0$, dvs. x och y har samma tecken (eller minst en är noll):

$$D_f : xy \geq 0$$

3. Funktionens graf (Funktionsyta)

Definition

Grafen (funktionsytan) till $f(x, y)$ är mängden av alla punkter (x, y, z) i $\mathbb{R}^3$ som uppfyller $z = f(x, y)$:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in D_f\}$$

Grafen är en **yta i det tredimensionella rummet** med D_f som "skugga" i xy -planet.

☰ Exempel: Identifiera grafen

a) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Sätt $z = f(x, y)$. Eftersom $z \geq 0$ gäller:

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2 \iff x^2 + y^2 + z^2 = 9 = 3^2$$

Grafen är den **övre halvsfären** med radien 3.

b) $f(x, y) = x^2$

Oberoende av y : för $y = 0$ ger $z = x^2$ en parabel. Extruderas längs y -axeln — en **parabolisk rännform**.

c) $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$ (för $2x + 3y \leq 6$)

Skriv om: $2x + 3y + z = 6$ — ett **plan** i $\mathbb{R}^3$. Skärningar med koordinataxlarna: $(3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 6)$.

Rotationsytor

En **rotationsyta** fås när en kurva $z = g(r)$ roteras kring z -axeln. Eftersom $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ gäller:

$$z = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

☰ Exempel: Rotationsytor

Kon med höjd 6 och radien 2: profilkurvan $z = 6 - 3r$ ger

$$z = 6 - 3\sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

Rotationsparaboloid: profilkurvan $z = 1 + r^2$ ger

$$z = 1 + (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 1 + x^2 + y^2$$

Ellipsoiden

En viktig yta som **inte** är en funktionsyta (den klarar inte vertikaltestet globalt):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

med halvaxlar a, b, c längs respektive koordinataxel.

4. Nivåkurvor

Definition

En **nivåkurva** (eng. *level curve* eller *contour*) till $f(x, y)$ för värdet c är kurvan i xy -planet som ges av:

$$f(x, y) = c$$

Geometriskt: skär funktionsytan $z = f(x, y)$ med det horisontella planet $z = c$, och projicera snittet ned på xy -planet.

Nivåkurvor visualiseras som **höjdkurvor** på en topografisk karta — varje kurva representerar en konstant höjd.

Tänk topografi

Precis som en höjdkarta visar bergslandskap via höjdkurvor visar nivåkurvorna “topografin” hos f .
Tätt liggande kurvor = brant lutning; glest liggande kurvor = flack yta.

Exempel: Rita nivåkurvor

Låt $f(x, y) = x^2 + y^2$. Nivåkurvorna $f(x, y) = c$ ger:

$$x^2 + y^2 = c \quad (c \geq 0)$$

Dessa är **koncentriska cirklar** med centrum i origo och radien $\sqrt{c}$. För $c = 1, 4, 9$ fås cirklar med radierna 1, 2, 3.

Låt $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$. Nivåkurvorna ger:

$$6 - 2x - 3y = c \iff 2x + 3y = 6 - c$$

Dessa är **parallella räta linjer** med lutningen $-\frac{2}{3}$.

5. Nivåytor

Definition

För en funktion av **tre variabler** $f(x, y, z)$ definieras en **nivåyta** (eng. *level surface*) för värdet c som:

$$f(x, y, z) = c$$

Nivåytan är en **yta** i $\mathbb{R}^3$ – analogt med hur en nivåkurva är en kurva i $\mathbb{R}^2$.

≡ Exempel: Nivåytor

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Nivåytorna $f = c$ (för $c > 0$) ger:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c$$

Dessa är **sfärer** med centrum i origo och radien $\sqrt{c}$.

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, temperatur i ett rum – nivåytorna visar punkter med samma temperatur (isotermiyor).

Sammanfattning: Dimension

Funktion	Nivåmängd	Geometri
$f(x, y)$	$f(x, y) = c$	Kurva i $\mathbb{R}^2$
$f(x, y, z)$	$f(x, y, z) = c$	Yta i $\mathbb{R}^3$

6. Det tredimensionella koordinatsystemet

För att beskriva funktionsytor arbetar vi i $\mathbb{R}^3$ med:

- Origo O
- Tre ortogonala enhetsbasvektorer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (längs x -, y -, z -axeln)
- En punkt P beskrivs av sin **lägesvektor** $\vec{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$

Avstånd från origo till punkten (x, y, z) :

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Läsning

- [13.1 Functions of Several Variables](#)

Se även

- [Nivåkurvor och ytor](#)
 - [Parametriserade kurvor](#)
 - [Elipsen](#)
-

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Visualizing multivariable functions](#) — visuell introduktion till flervariabelfunktioner
- [Khan Academy: Multivariable functions](#) — introduktion med exempel
- [MIT OCW 18.02: Functions of several variables](#) — föreläsningar från MIT

Interaktiva verktyg

- [GeoGebra 3D Calculator](#) — rita grafer $z = f(x, y)$ och nivåkurvor interaktivt
- [Desmos 3D](#) — utforska ytor och nivåkurvor
- [CalcPlot3D](#) — visualisera nivåkurvor och -ytor

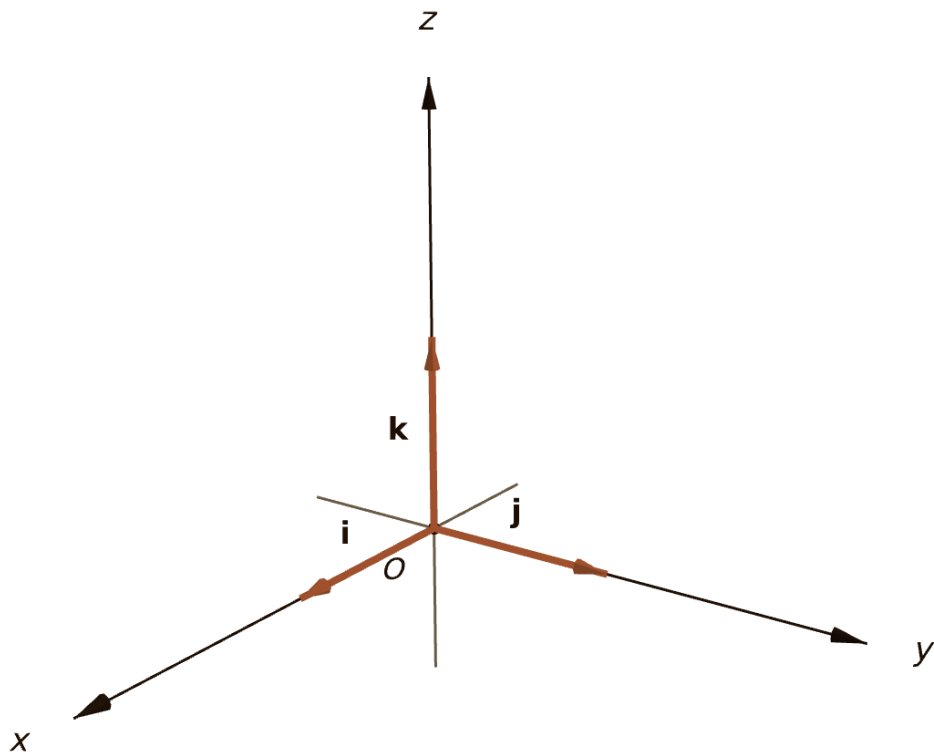
Wikipedia

- [Function of several real variables](#)
- [Level set](#)
- [Contour line](#)

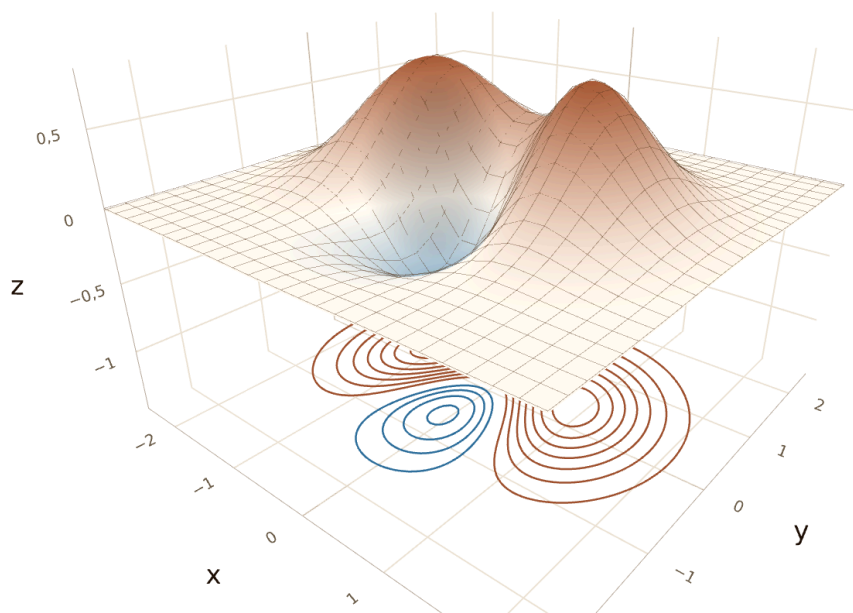
Fördjupning

- [Immersive Math: Functions of Several Variables](#) — interaktiv lärobok
- [Paul's Online Math Notes: Functions of Several Variables](#) — tydliga anteckningar med exempel

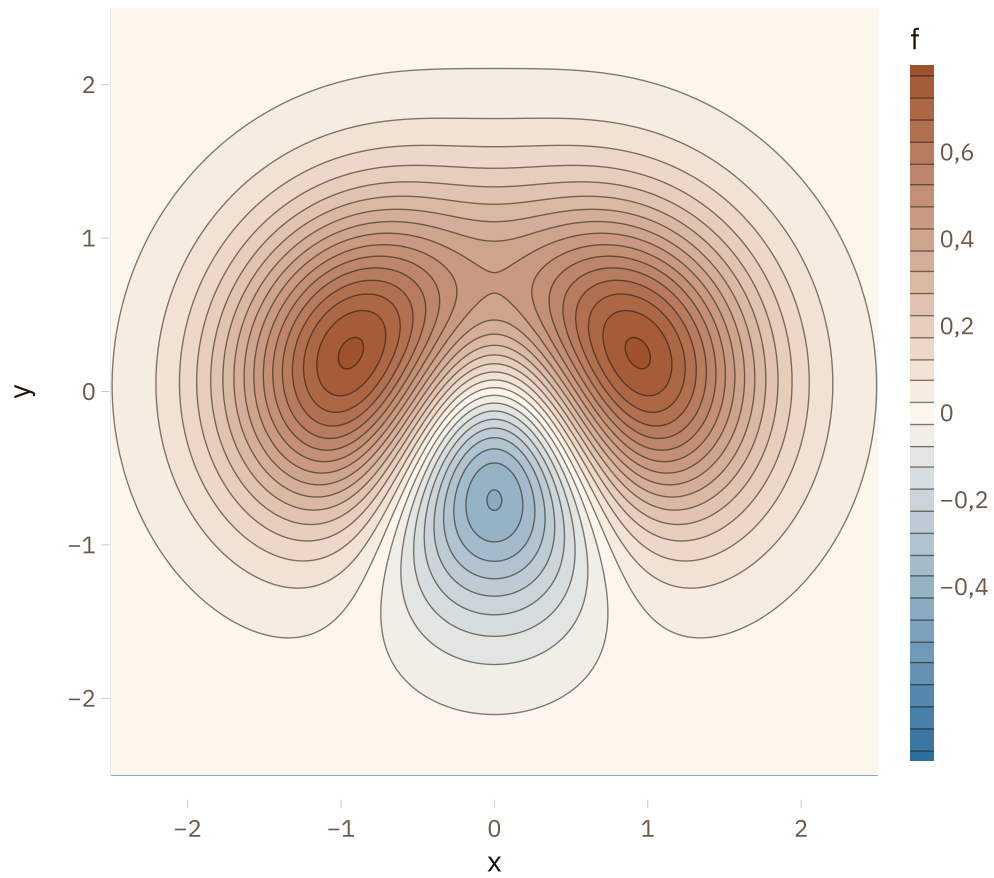
Illustrationer



Kartesiskt koordinatsystem



Funktionsyta



Nivåkurvor

Parametriserade kurvor

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #flervariabelanalys #parametriserad-kurva #vekturvärdfunktion

Kapitel: AE 8.2, 12.1, 12.3 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Funktioner av flera variabler

1. Parametriserade kurvor – översikt

En **parametriserad kurva** beskriver en kurva i planet eller rummet genom att uttrycka koordinaterna som funktioner av en gemensam **parameter** t .

Två sätt att beskriva kurvor

- **Nivåkurva:** $f(x, y) = c$ – implicit ekvation, till exempel $x^2 + y^2 = 1$.
- **Parametrisering:** $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ – en explicit beskrivning av hur man rör sig längs kurvan.

Båda beskrivningarna kan representera samma geometriska objekt.

Definition

En parametriserad kurva i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ ges av en **vekturvärdfunktion**:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

i planet, och

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

i rummet.

2. Vanliga exempel

2.1 Cirkel i $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Denna parametrisering ritas enhetscirkeln **moturs** med start i punkten $(1, 0)$.

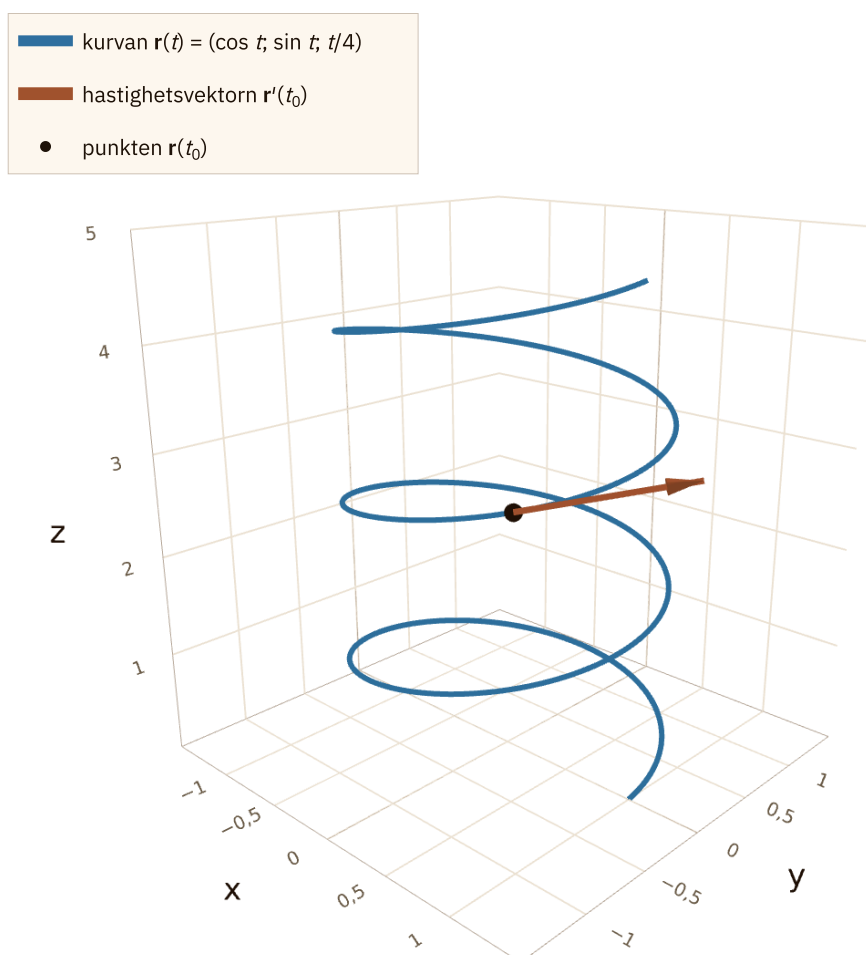
2.2 Ellips i $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

2.3 Helix i $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

En helix är en skruvlinje som rör sig uppåt längs z-axeln samtidigt som den cirklar i xy-planet.



☰ Rita en helix

För $t \in [0, 2\pi]$ startar kurvan i $(1, 0, 0)$ och slutar i $(1, 0, 2\pi)$. Projektionen på xy -planet är en cirkel, medan z -koordinaten växer linjärt.

2.4 Rät linje

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v} = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3)$$

3. Derivata av vektorvärda funktioner

Derivatan definieras komponentvis:

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

3.1 Hastighetsvektor

Om t tolkas som tid är $\mathbf{r}'(t)$ hastighetsvektorn:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$$

3.2 Fart

Farten är hastighetsvektorns längd:

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

3.3 Accelerationsvektor

Accelerationen är andraderivatan:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$$

☰ Hastighet och acceleration för cirkelrörelse

Låt $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$.

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t) \quad \mathbf{r}''(t) = (-\cos t, -\sin t) = -\mathbf{r}(t)$$

Farten är konstant lika med 1, medan accelerationen alltid pekar mot centrum.

4. Båglängd

Båglängden längs kurvan $\mathbf{r}(t)$ för $t \in [a, b]$ ges av

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$$

I koordinatform blir detta

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

≡ Båglängd för en helix

Låt $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ för $t \in [0, 2\pi]$.

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \quad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2} \quad L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2}$$

5. Derivateregler

Låt $\mathbf{u}(t)$ och $\mathbf{v}(t)$ vara vektorvärda funktioner och $f(t)$ en skalärvärd funktion.

Regel	Formel
Summa	$(\mathbf{u} + \mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$
Skalärmultiplikation	$(f\mathbf{u})' = f'\mathbf{u} + f\mathbf{u}'$
Punktprodukt	$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$
Kryssprodukt	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$
Kedjeregler	$(\mathbf{u}(f(t)))' = f'(t) \mathbf{u}'(f(t))$

 Ordningen spelar roll i kryssprodukten

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$. Produktregeln gäller fortfarande, men ett ordningsbyte ändrar tecknet.

6. Projektilrörelse

Med enbart tyngdkraft ($g \approx 9,82 \text{ m/s}^2$) kan en projektil i planet beskrivas av

$$\mathbf{a}(t) = (0, -g).$$

Efter integrering fås

$$\mathbf{v}(t) = (v_{0x}, v_{0y} - gt)$$

och

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + v_{0x}t, y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2).$$

Räckvidd

Om $\mathbf{r}_0 = (0, 0)$ och $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$, så träffar projektilen marken när

$$t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}.$$

Räckvidden blir då

$$\frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}.$$

Läsning

- [8.2 Parametric Curves](#)
- [8.3 Smooth Parametric Curves](#)

Se även

- [Funktioner av flera variabler](#)
- [Nivåkurvor och ytor](#)
- [Kryssprodukt](#)

Gränsvärden och kontinuitet

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#flervariabelanalys #gränsvärde #kontinuitet

Kapitel: 13.2 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Nivåkurvor och ytor, Partiella derivator

1. Avstånd i $\mathbb{R}^2$

Avståndet mellan punkterna (x, y) och (a, b) i planet definieras som:

$$|(x, y) - (a, b)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Detta är den euklidiska normen och generaliserar den vanliga absolutbeloppet från envariabelanalys. Att $(x, y) \rightarrow (a, b)$ betyder att detta avstånd går mot noll.

2. Gränsvärde

2.1 Definition

Låt $f(x, y)$ vara definierad i en omgivning kring (a, b) (men inte nödvändigtvis i (a, b) självt). Vi säger att

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$$

om $f(x, y)$ kan göras godtyckligt nära L för alla (x, y) tillräckligt nära (a, b) . Formellt: för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att

$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

2.2 Skillnaden från envariabelfallet

I envariabelanalys räcker det att kontrollera närmande från vänster och höger — två riktningar. I $\mathbb{R}^2$ måste gränsvärdet vara **detsamma längs alla möjliga kurvor** som leder till (a, b) . Det finns oändligt många sådana vägar.

Varför oändligt många vägar?

I $\mathbb{R}^1$ kan man bara nalkas a från vänster ($x \rightarrow a^-$) eller höger ($x \rightarrow a^+$). I $\mathbb{R}^2$ kan man nalkas (a, b) längs en rät linje, längs en parabel, längs en spiral, osv. Alla dessa måste ge samma värde för att gränsvärdet ska existera.

3. Visa att ett gränsvärde inte existerar

3.1 Metod: Olika vägar ger olika värden

Om man kan hitta **två vägar** till (a, b) längs vilka $f(x, y)$ närmar sig **olika värden**, existerar gränsvärdet inte.

Standardvägar att prova:

Väg	Substitution
Längs x-axeln	Sätt $y = 0$, låt $x \rightarrow a$
Längs y-axeln	Sätt $x = 0$, låt $y \rightarrow b$
Längs linjen $y = x$	Sätt $y = x$, låt $x \rightarrow a$
Längs parabeln $y = x^2$	Sätt $y = x^2$, låt $x \rightarrow 0$
Längs linjen $y = mx$	Sätt $y = mx$, låt $x \rightarrow 0$

Vanlig fallgrop — samma svar längs två vägar räcker inte

Att f ger **samma värde** längs *två* valda vägar bevisar **inte** att gränsvärdet existerar. Gränsvärdet måste vara detsamma längs *alla* möjliga vägar — oändligt många.

Slutsats du INTE kan dra: "Längs $y = 0$ och $y = x$ fick jag 0 — alltså är gränsvärdet 0." Två vägar kan bara *motbevisa* existens (om de ger olika svar), aldrig *bevisa* den.

 **Gränsvärde som inte existerar:** $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Väg 1: Längs $y = 0$ (x-axeln):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Väg 2: Längs $x = 0$ (y-axeln):

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$$

De två vägarna ger $1 \neq -1$, alltså existerar **gränsvärdet inte**.

≡ **Gränsvärde som inte existerar:** $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Väg 1: Längs $y = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} = 0$$

Väg 2: Längs $y = x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

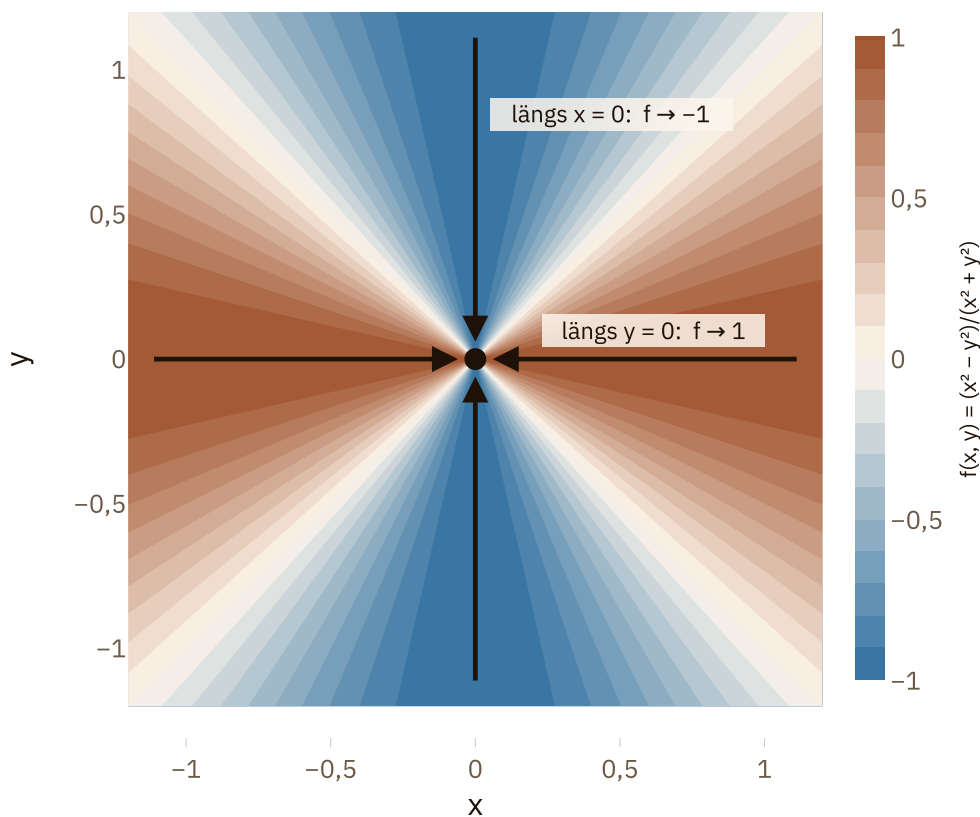
$0 \neq \frac{1}{2}$, alltså existerar **gränsvärdet inte**.

≡ **Gränsvärde längs $y = mx$ ger en familj av svar**

För $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, prova $y = mx$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot mx}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

Svaret beror på m , alltså ger olika riktningar olika **gränsvärden**. Gränsvärdet existerar inte.



4. Visa att ett gränsvärde existerar

4.1 Direktinsättning

Om f är kontinuerlig i (a, b) (se avsnitt 5) kan man sätta in direkt:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

4.2 Klämlemmat i 2D

Om $|f(x,y) - L| \leq g(x,y)$ och $g(x,y) \rightarrow 0$ när $(x,y) \rightarrow (a,b)$, så är $\lim f(x,y) = L$.

Vanlig strategi: Uppskatta $|f(x,y)|$ med hjälp av $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (polära koordinater nära origo) och visa att uttrycket går mot noll.

☰ **Gränsvärde med klämlemmat:** $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

Notera att $\frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$ för alla $(x,y) \neq (0,0)$.

Därför:

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |x| \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{|y|}{|x|} \leq |x| \cdot 1 = |x|$$

Enklare: använd $x^2 \leq x^2 + y^2$, alltså $\frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$:

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \rightarrow 0$$

Klämlemmat ger $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$.

≡ **Polära koordinater:** $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$

Sätt $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r \rightarrow 0^+$:

$$\frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2} = r \cos^3 \theta$$

Eftersom $|\cos^3 \theta| \leq 1$:

$$|r \cos^3 \theta| \leq r \rightarrow 0$$

Gränsvärdet är 0 oberoende av θ .

5. Kontinuitet

5.1 Definition

Funktionen $f(x, y)$ är **kontinuerlig i punkten** (a, b) om:

1. $f(a, b)$ är definierat,
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ existerar,
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

$$f \text{ kontinuerlig i } (a, b) \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

5.2 Kontinuerliga funktioner

Alla elementära funktioner (polynom, rationella funktioner, trigonometriska, exponentialfunktioner, logaritmer) är kontinuerliga i sina definitionsmängder. Sammansättningar av kontinuerliga funktioner är kontinuerliga.

≡ Avgör om f är kontinuerlig i $(0, 0)$

Låt

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Från klämlemmat (avsnitt 4.2) vet vi att $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$.

Alltså är f **kontinuerlig** i $(0, 0)$.

≡ Avgör om g är kontinuerlig i $(0, 0)$

Låt

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Från avsnitt 3 vet vi att $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ inte existerar.

Alltså är g **inte kontinuerlig** i $(0, 0)$.

6. Sammanfattning – Tillvägagångssätt

Tillvägagångssätt – steg för steg

Steg 1 – Direktinsättning: Är f kontinuerlig i (a, b) ? Sätt in direkt.

Steg 2 – Misstänker du att gränsvärdet INTE existerar? Prova längs $y = 0$, $x = 0$, $y = x$, $y = x^2$, $y = mx$. Två vägar med **olika** svar $\Rightarrow$ gränsvärdet existerar **inte**.

Steg 3 — Tror du att gränsvärdet existerar? Uppskatta $|f(x,y) - L|$ uppifrån med ett uttryck som $\rightarrow 0$. Använd **klämlemmat**. Polära koordinater $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ underlättar ofta nära origo.

Läsning

- [13.2 Limits and Continuity](#)

Se även

- [Nivåkurvor och ytor](#)
- [Partiella derivator](#)
- [Kedjeregeln](#)

Resurser

Videor

- [Professor Leonard: Limits of Multivariable Functions](#) — grundlig genomgång med flervägsteknik
- [Khan Academy: Multivariable limits](#) — introduktion med visualiseringar
- [MIT OpenCourseWare 18.02: Limits](#) — föreläsningssanteckningar

Interaktiva verktyg

- [Desmos 3D](#) — visualisera ytor och närmanden längs kurvor
- [GeoGebra 3D Calculator](#) — utforska gränsvärden grafiskt

Wikipedia

- [Limit of a function \(multivariable\)](#)
 - [Continuous function](#)
-

Partiella derivator

19 okt. 2026, 10 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #flervariabelanalys #partiell-derivata

Kapitel: 13.3 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Funktioner av flera variabler, Gränsvärden och kontinuitet

1. Partiell derivata

En partiell **derivata** beskriver hur snabbt en funktion av flera variabler förändras när **en variabel i taget** varieras, medan de övriga hålls konstanta.

1.1 Definition

För en funktion $f(x, y)$ definieras de partiella derivatorna i punkten (x_0, y_0) som:

$$f_1(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$f_2(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

1.2 Alternativ beteckning

Om $z = f(x, y)$ skrivs de partiella derivatorna ofta som:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, y) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_2(x, y)$$

Symbolen ∂ (rund d) används för att skilja partiell derivering från vanlig derivering.

1.3 Beräkningsregel

Kom ihåg — hur man räknar

- f_x : derivera m.a.p. x , behandla y **som en konstant** (frys den).
- f_y : derivera m.a.p. y , behandla x **som en konstant** (frys den).

Det är exakt envariabelderivering — fast med de övriga variablerna “frysta”.

≡ Exempel a) Polynom

Låt $f(x, y) = x^2 + 5x^3y^2$.

Derivera m.a.p. x (behandla y som konstant): $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, y) = 2x + 15x^2y^2$

Derivera m.a.p. y (behandla x som konstant): $\frac{\partial z}{\partial y} = f_2(x, y) = 10x^3y$

≡ Exempel b) Kvotregeln

Låt $z = f(x, y) = \frac{x}{x^2 + e^{xy}}$.

Derivera m.a.p. x med kvotregeln: $f_1(x, y) = \frac{1 \cdot (x^2 + e^{xy}) - x \cdot (2x + ye^{xy})}{(x^2 + e^{xy})^2} = \frac{-x^2 + e^{xy} - xye^{xy}}{(x^2 + e^{xy})^2}$

Derivera m.a.p. y (skriv om som $x(x^2 + e^{xy})^{-1}$): $f_2(x, y) = x \cdot (-1)(x^2 + e^{xy})^{-2} \cdot xe^{xy} = -\frac{x^2e^{xy}}{(x^2 + e^{xy})^2}$

≡ Exempel c) Derivering och insättning

Låt $z = f(x, y) = e^{2x} \cos(xy)$.

Derivera m.a.p. x (produktregeln): $f_1(x, y) = 2e^{2x} \cos(xy) - ye^{2x} \sin(xy) = e^{2x}(2 \cos(xy) - y \sin(xy))$

Derivera m.a.p. y : $f_2(x, y) = e^{2x}(-\sin(xy)) \cdot x = -xe^{2x} \sin(xy)$

Sätt in $(x, y) = (1, 0)$: $f_1(1, 0) = e^2(2 \cos(0) - 0) = 2e^2$ $f_2(1, 0) = -1 \cdot e^2 \cdot \sin(0) = 0$

Beteckningen $\big|_{(1,0)}$ betyder insättning $x = 1, y = 0$.

2. Tangentvektorer

I en punkt (a, b) på ytan $z = f(x, y)$ kan man bilda två tangentvektorer – en längs x -riktningen och en längs y -riktningen.

$$\vec{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_1(a, b) \end{bmatrix}, \quad \vec{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_2(a, b) \end{bmatrix}$$

- $\vec{T}_1$ är tangent till kurvan som uppstår när $y = b$ hålls fast och x varierar.
- $\vec{T}_2$ är tangent till kurvan som uppstår när $x = a$ hålls fast och y varierar.

Dessa två vektorer spänner upp tangentplanet i punkten $(a, b, f(a, b))$.

3. Normalvektor

Normalvektorn till ytan i punkten $(a, b, f(a, b))$ fås via **kryssprodukten** av tangentvektorerna:

$$\vec{n} = \vec{T}_1 \times \vec{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_1(a, b) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_2(a, b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(a, b) \\ -f_2(a, b) \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.1 Normalvektor till en nivåyta

För en yta definierad implicit som $g(x, y, z) = C$ ges normalvektorn av **gradienten**:

$$\vec{n} = \nabla g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}$$

4. Tangentplan

4.1 Tangentplanets ekvation

Tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$ ges av:

$$z - f(a, b) = f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$$

Ekvationen följer direkt av att planet ska innehålla punkten $(a, b, f(a, b))$ och ha normalvektorn $\vec{n} = [-f_1(a, b), -f_2(a, b), 1]^T$.

☰ Exempel – Tangentplan till en paraboloid

Låt $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Bestäm tangentplanet i punkten $(x, y) = (1, 2)$.

Steg 1: Beräkna z-koordinaten för punkten på ytan: $f(1, 2) = 2 \cdot 1^2 + 2^2 = 6 \Rightarrow$ punkten är $(1, 2, 6)$

Steg 2: Beräkna de partiella derivatorna: $f_1(x, y) = 4x \Rightarrow f_1(1, 2) = 4$ $f_2(x, y) = 2y \Rightarrow f_2(1, 2) = 4$

Steg 3: Sätt in i tangentplansekvationen: $z - 6 = 4(x - 1) + 4(y - 2)$

Läsning

- [13.3 Partial Derivatives](#)

Se även

- [Funktioner av flera variabler](#)
- [Gränsvärden och kontinuitet](#)
- [Nivåkurvor och ytor](#)
- [Gradient och riktningsderivata](#)

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Partial derivatives, visually](#) – geometrisk tolkning av partiella derivator
- [Khan Academy: Partial derivatives](#) – introduktion med exempel

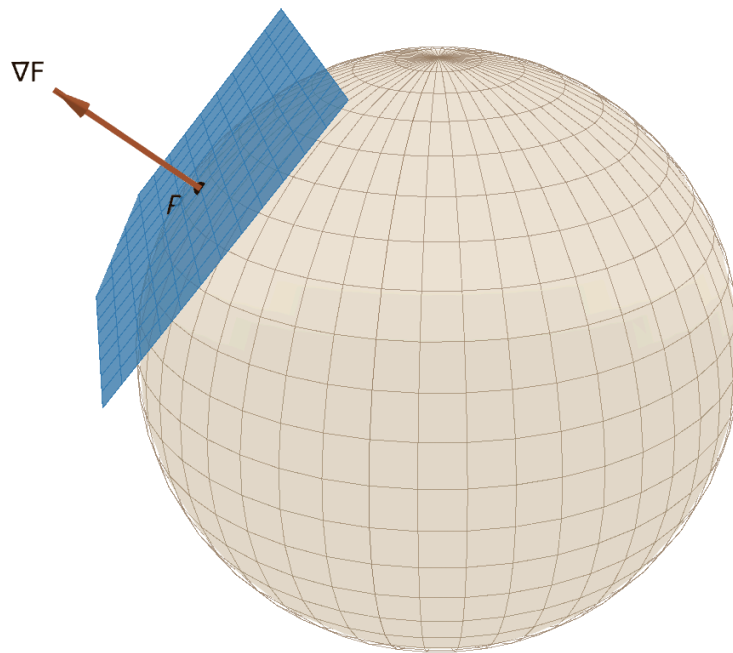
Interaktiva verktyg

- [GeoGebra: Tangent Plane](#) – visualisera tangentplan i 3D
- [Wolfram Alpha](#) – beräkna partiella derivator med `partial derivative of f(x,y) with respect to x`

Wikipedia

- [Partial derivative](#)
 - [Tangent plane](#)
 - [Normal vector](#)
-

Illustrationer



Tangentplan till en sfär

Räkneregler

Kapitel: 13.3–13.5 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Partiella derivator, Kedjeregeln

1. Grundläggande regler

Principen: en variabel i taget

Alla vanliga derivationsregler från envariabelanalys gäller för partiella derivator — man deriverar med avseende på **en variabel** och behandlar alla **övriga variabler som konstanter**.

1.1 Linjäritet

Om f och g är deriverbara och α, β är konstanter:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\alpha f + \beta g] = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial g}{\partial x}$$

1.2 Konstant faktor

$$\frac{\partial}{\partial x}[c \cdot f(x, y)] = c \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Obs — y är en konstant!

När du deriverar m.a.p. x är y konstant. Det innebär att t.ex. y^3 , e^y och $\sin(y)$ alla är konstanta faktorer och deriveras som noll om de saknar x .

2. Produktregeln

Sats

Om $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$ är partiellt deriverbara gäller:

$$\frac{\partial}{\partial x}[u \cdot v] = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

och analogt för derivering m.a.p. y .

Schema — kom ihåg

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Exakt samma form som i envariabelanalys — håll bara koll på vilken variabel du deriverar m.a.p.

≡ Exempel a) Enkel produkt

Låt $f(x, y) = x^3 \sin(y)$.

Derivera m.a.p. x ($\sin(y)$ är konstant): $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \sin(y)$

Derivera m.a.p. y (x^3 är konstant): $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \cos(y)$

≡ Exempel b) Produkt av funktioner i båda variablerna

Låt $f(x, y) = e^{2x} \cos(xy)$.

Derivera m.a.p. x – produktregel med $u = e^{2x}$ och $v = \cos(xy)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x} \cos(xy) + e^{2x} \cdot (-\sin(xy)) \cdot y = e^{2x}(2 \cos(xy) - y \sin(xy))$

Derivera m.a.p. y – e^{2x} är konstant: $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x} \cdot (-\sin(xy)) \cdot x = -xe^{2x} \sin(xy)$

≡ Exempel c) Tre faktorer

Låt $f(x, y) = x^2 y e^{xy}$.

Derivera m.a.p. x – skriv $u = x^2$ och $v = ye^{xy}$ (behandla y som konstant): $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot ye^{xy} + x^2 \cdot ye^{xy} \cdot y = xye^{xy}(2 + xy)$

3. Kvotregeln

Sats

Om $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$ är partiellt deriverbara och $v \neq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u}{v} \right] = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot v - u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}$$

Minnesbild

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Alternativ – skriv om som produkt

Ofta enklare att skriva $\frac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$ och använda produktregeln tillsammans med kedjeregeln:
 $\frac{\partial}{\partial x}[u \cdot v^{-1}] = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v^{-1} + u \cdot (-1)v^{-2} \frac{\partial v}{\partial x}$

Exempel a) Grundfall

Låt $f(x, y) = \frac{x^2}{y^3}$.

Derivera m.a.p. x (y^3 är konstant): $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$

Derivera m.a.p. y (x^2 är konstant) – enklast med $f = x^2 y^{-3}$: $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cdot (-3)y^{-4} = -\frac{3x^2}{y^4}$

Exempel b) Blandad kvot

Låt $z = \frac{x}{x^2 + e^{xy}}$.

Derivera m.a.p. x med kvotregeln ($u = x$, $v = x^2 + e^{xy}$): $f_x = \frac{1 \cdot (x^2 + e^{xy}) - x(2x + ye^{xy})}{(x^2 + e^{xy})^2} = \frac{-x^2 + e^{xy}(1 - xy)}{(x^2 + e^{xy})^2}$

Derivera m.a.p. y ($u = x$ ger $u_y = 0$, $v_y = xe^{xy}$): $f_y = \frac{0 \cdot v - x \cdot xe^{xy}}{(x^2 + e^{xy})^2} = -\frac{x^2 e^{xy}}{(x^2 + e^{xy})^2}$

4. Kedjeregeln – snabbreferens

Fullständig genomgång

Se **Kedjeregeln** för detaljer, variabelträd och variabelbyten.

Fall 1 – ett oberoende variabel

$$z = f(x, y), x = x(t), y = y(t):$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Fall 2 – två oberoende variabler

$$z = f(x, y), x = x(s, t), y = y(s, t):$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

Kedjeregeln för sammansatt funktion

Om $h(x, y) = f(g(x, y))$ – alltså f av en skalär:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f'(g(x, y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

≡ Exempel – kedjeregeln på skalär funktion

Låt $h(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$. Sätt $u = x^2 + y^2$.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \cos(u) \cdot 2x = 2x \cos(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \cos(u) \cdot 2y = 2y \cos(x^2 + y^2)$$

5. Implicit derivering

Om $F(x, y, z) = 0$ definierar z implicit som funktion av x och y :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

⚠ Förutsättning

Formeln kräver att $F_z \neq 0$ i punkten. Om $F_z = 0$ kan man inte lösa ut z lokalt.

Exempel – implicit derivering

Låt $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (enhetssphären).

$$F_x = 2x, \quad F_y = 2y, \quad F_z = 2z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

Geometriskt beskriver detta lutningen på sfären i resp. riktning.

6. Snabbtabell – räkneregler

Regel	Formel
Summa	$\partial_x(f + g) = f_x + g_x$
Konstant	$\partial_x(c) = 0$
Konstant faktor	$\partial_x(cf) = cf_x$
Produkt	$\partial_x(fg) = f_xg + fg_x$
Kvot	$\partial_x(f/g) = (f_xg - fg_x)/g^2$
Kedja (skalär)	$\partial_x f(g) = f'(g)g_x$
Kedja (vektor)	$\partial_t f(x(t), y(t)) = f_x \dot{x} + f_y \dot{y}$
Implicit	$\partial_x z = -F_x/F_z$
Potens	$\partial_x(x^n) = nx^{n-1}$

7. Tips och vanliga misstag

Tips 1 – se alltid vilken variabel du deriverar m.a.p.

Skriv ut $\frac{\partial}{\partial x}$ eller $\frac{\partial}{\partial y}$ tydligt i varje steg. Det är lätt att missa att byta derivatavariabel mitt i en beräkning.

🔗 Tips 2 – faktorisera gärna ut konstanter

Om $f(x, y) = e^y \cdot g(x)$, så är $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \cdot g'(x)$ direkt – ingen produktregel behövs.

🔗 Tips 3 – skriv om kvoten som produkt vid komplexa uttryck

$\frac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$ och tillämpa produktregel + kedjeregeln. Minskar risken för teckenmissar.

🔗 Tips 4 – kontrollera med mixed partials

För tillräckligt snälla funktioner gäller **Clairauts sats**: $f_{xy} = f_{yx}$. Stämmer inte det, har du räknat fel.

⚠️ Vanligt misstag 1 – glömmer kedjeregeln

$\frac{\partial}{\partial x} \sin(xy) = \cos(xy)$ är **fel**.

Korrekt: $\frac{\partial}{\partial x} \sin(xy) = y \cos(xy)$ – inre derivatan y måste multipliceras in.

⚠️ Vanligt misstag 2 – deriverar y m.a.p. x

$\frac{\partial}{\partial x}(y^3) = 3y^2$ är **fel** (y är konstant!).

Korrekt: $\frac{\partial}{\partial x}(y^3) = 0$.

⚠️ Vanligt misstag 3 – blandar d och ∂

Använd ∂ för partiella derivator (flera variabler) och d för vanliga derivator (en variabel eller total derivata). Fel symbol signalerar fel tänk.

☰ Träningsuppgift – identifiera räknereglerna

Bestäm alla partiella derivator av $f(x, y) = \frac{x \ln(y)}{e^{x^2+y}}$.

Ledning: Skriv om som $x \ln(y) \cdot e^{-(x^2+y)}$ och använd produktregeln. Kedjeregeln behövs för $e^{-(x^2+y)}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln(y) e^{-(x^2+y)} + x \ln(y) e^{-(x^2+y)} \cdot (-2x) = \ln(y) e^{-(x^2+y)} (1 - 2x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{y} \cdot e^{-(x^2+y)} + x \ln(y) \cdot e^{-(x^2+y)} \cdot (-1) = \frac{x e^{-(x^2+y)}}{y} (1 - y \ln(y))$$

Se även

- [Partiella derivator](#)
- [Kedjeregeln](#)
- [Högre ordningens derivator](#)
- [Gradient och riktningsderivata](#)

Resurser

Videor

- [Khan Academy: Partial derivative rules](#) — regler och exempel
- [Professor Leonard: Partial Derivatives](#) — produkt- och kvotregel i flervariabelfall
- [3Blue1Brown: Implicit differentiation](#) — intuition för implicit derivering

Interaktiva verktyg

- [Wolfram Alpha](#) — partial derivative of $f(x,y)$ with respect to x för symbolisk beräkning
- [Desmos 3D](#) — visualisera funktioner och deras derivator

Wikipedia

- [Partial derivative — Wikipedia](#)
- [Product rule — Wikipedia](#)
- [Implicit function theorem — Wikipedia](#)

Fördjupning

- Adams & Essex, *Calculus: A Complete Course*, avsnitt 13.3–13.5

Föreläsningsanteckningar

Från föreläsning: 2026-03-25, M0068M

2026-03-25 – Föreläsning 3 (Partiella derivator, tangentplan)

Definition

$$f_1(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_2(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Alternativ beteckning om $z = f(x, y)$: $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f_2(x, y)$

Beräkningsexempel

a) $f(x, y) = x^2 + 5x^3y^2$: $f_1 = 2x + 15x^2y^2$, $f_2 = 10x^3y$

b) $z = \frac{x}{x^2+e^{xy}}$: $f_1 = \frac{-x^2+e^{xy}-xye^{xy}}{(x^2+e^{xy})^2}$, $f_2 = -\frac{x^2e^{xy}}{(x^2+e^{xy})^2}$

c) $z = e^{2x} \cos(xy)$: derivering och insättning $(x, y) = (1, 0)$: $f_1(1, 0) = 2e^2$, $f_2(1, 0) = 0$

Tangentvektorer och tangentplan

Tangentvektorer i (a, b) : $\vec{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_1(a, b) \end{bmatrix}$, $\vec{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_2(a, b) \end{bmatrix}$

Normalvektor: $\vec{T}_1 \times \vec{T}_2 = \begin{bmatrix} -f_1(a, b) \\ -f_2(a, b) \\ 1 \end{bmatrix}$

Tangentplanets ekvation: $z - f(a, b) = f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$

Exempel: $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, tangentplan i $(1, 2)$:

- Punkt: $(1, 2, 6)$; $f_1(1, 2) = 4$; $f_2(1, 2) = 4$
- Tangentplan: $z - 6 = 4(x - 1) + 4(y - 2)$

Högre ordningens derivator

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#flervariabelanalys #partiell-derivata

Högre ordningens derivator

Kapitel: 13.4 · Kurs: M0068M Förkunskaper: Partiella derivator

1. Notation för andraderivator

För en funktion $z = f(x, y)$ erhålls **fyra** andraderivator genom att derivera de partiella derivatorna f_1 och f_2 en gång till.

Indexnotation och Leibniz-notation

$$f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Hur man läser Leibniz-notationen

Derivering sker **inifrån och ut**: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ betyder "derivera först m.a.p. x , sedan m.a.p. y ", vilket motsvarar f_{12} i indexnotation.

Notation som träd

Utgå från f , derivera m.a.p. x eller y i varje steg:

$$f \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\partial_x} f_1 \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\partial_x} f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \xrightarrow{\partial_y} f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{array} \right. \\ \xrightarrow{\partial_y} f_2 \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\partial_x} f_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \xrightarrow{\partial_y} f_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

≡ **Beräkna alla andraderivator för** $f(x, y) = 2y^2 + x^3 \ln(xy)$

Förstaordningens derivator:

$$f_1 = 3x^2 \ln(xy) + x^2, \quad f_2 = 4y + \frac{x^3}{y}$$

Andraordningens derivator:

$$f_{11} = 6x \ln(xy) + 5x$$

$$f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 \ln(xy) + x^2) = \frac{3x^2}{y}$$

$$f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}(4y + \frac{x^3}{y}) = \frac{3x^2}{y}$$

$$f_{22} = 4 - \frac{x^3}{y^2}$$

Lägg märke till att $f_{12} = f_{21}$. De blandade derivatorna är lika — se symmetrisatsen nedan.

2. Symmetrisatsen (blandade derivatorna kommuterar)

🔗 Clairauts sats — blandade derivatorna kommuterar

Kom ihåg: Om f_{12} och f_{21} är **kontinuerliga** i en omgivning av (a, b) gäller: $f_{12} = f_{21}$ Ordningen spelar ingen roll. Används som **kontroll:** om $f_{12} \neq f_{21}$ i din beräkning har du räknat fel.

⚠ Satsen gäller inte alltid

Det finns funktioner där f_{12} och f_{21} **existerar** men inte är lika. Tillräckligt villkor: de blandade derivatorna är **kontinuerliga** i omgivningen av punkten.

Tre variabler

För $g(x, y, z)$ gäller på motsvarande sätt:

$$g_{13} = g_{31}$$

$$g_{123} = g_{321} = g_{213} = g_{132} = g_{312} = g_{231}$$

$$g_{112} = g_{121} = g_{211}$$

Indexen kan alltså **permuteras fritt** — ordningen är ej viktig (givet **kontinuitet**).

3. Laplaces ekvation

Många fysikaliska system beskrivs av den partiella differentialekvationen (**PDE**):

$$f_{11} + f_{22} + f_{33} = 0$$

I Leibniz-notation:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Denna PDE kallas **Laplace's ekvation** och betecknas ibland $\Delta f = 0$ (där Δ är Laplace-operatorn).

Fysikalisk tolkning – stationär temperaturfördelning

En **stationär (tidsberoende) temperaturfördelning** $T = T(x, y, z)$ i ett material utan inre värmekällor uppfyller Laplace's ekvation. "Stationär" innebär att temperaturen är konstant i tid — värme flöde sker, men ingen punkt värms upp eller kyls ned netto.

I allmänhet beror temperaturen på både position och tid: $T = f(x, y, z, t)$. I det stationära fallet faller tidberoendet bort.

4. Harmoniska funktioner

Definition: En funktion f som uppfyller Laplace's ekvation i ett område Ω kallas **harmonisk** i Ω :

$$f_{11} + f_{22} + f_{33} = 0 \quad \text{i } \Omega$$

Var dyker harmoniska funktioner upp?

- **Värmeledning** — stationär temperaturfördelning utan värmekällor
- **Elektrostatik** — elektrisk potential V i vakuum uppfyller $\Delta V = 0$
- **Strömningslära** — strömningspotential för inkompressibel, rotationsfri strömning

2D-fallet

I två dimensioner lyder villkoret:

$$f_{11} + f_{22} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

≡ Visa att $T(x, y) = e^{3x} \sin(3y)$ är harmonisk

Beräkna andraderivatorerna:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 3e^{3x} \sin(3y) \implies \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 9e^{3x} \sin(3y)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 3e^{3x} \cos(3y) \implies \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -9e^{3x} \sin(3y)$$

Summera:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 9e^{3x} \sin(3y) - 9e^{3x} \sin(3y) = 0 \checkmark$$

Funktionen uppfyller 2D-Laplaces ekvation och är alltså harmonisk. Den kan tolkas som en stationär temperaturfördelning i ett plant område.

Läsning

- [2.6 Higher-Order Derivatives](#)
- [13.4 Higher-Order Derivatives](#)

Se även

- [Partiella derivator](#)

- [Algebraiska egenskaper](#)
- [Kedjeregeln](#)

Resurser

Videor

- [Khan Academy: Second partial derivatives](#) — genomgång av andraderivator steg för steg
- [Khan Academy: Symmetry of second partial derivatives](#) — Clairauts sats
- [3Blue1Brown: Laplace equations](#) — geometrisk intuition för Laplaces ekvation

Wikipedia

- [Partial derivative](#)
- [Symmetry of second derivatives \(Clairaut's theorem\)](#)
- [Laplace's equation](#)
- [Harmonic function](#)

Fördjupning

- [Paul's Online Math Notes — Higher Order Partial Derivatives](#)

Föreläsningsanteckningar

Från föreläsning: 2026-03-27, M0068M

2026-03-27 – Föreläsning 5 (Trevariabel, andraderivator, Laplaces ekvation)

Trevariabelfunktion

Exempel: $f(x, y, z) = \cos(xz) + xy^2z^2 = w$ $\frac{\partial w}{\partial x} = -\sin(xz)z + y^2z^2$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 2xyz^2$, $\frac{\partial w}{\partial z} = -\sin(xz)x + 2xy^2z$

Nivåyta

För trevariabelfunktioner $g(x, y, z) = C$ kan vi ej rita grafen i 3D, istället beskriver vi med nivååtor.

Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x}$ är en partiell derivatoperator m.a.p. x .

Notation för andraderivator (träd)

Andraderivatorerna $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ fås genom att derivera f_1 och f_2 igen.

Exempel: $z = f(x, y) = 2y^2 + x^3 \ln(xy)$

$$f_1 = 3x^2 \ln(xy) + x^2, \quad f_2 = 4y + \frac{x^3}{y}$$

$$f_{11} = 6x \ln(xy) + 5x, \quad f_{12} = \frac{3x^2}{y} = f_{21}, \quad f_{22} = 4 - \frac{x^3}{y^2}$$

Sats: Blandade derivatorna kommuterar: $f_{12} = f_{21}$ (man kan permutera dem fritt vid kontinuitet).

Fysikaliska modeller - Stationär temperaturfördelning

$T = f(x, y, z, t)$. Stationär (tidsoberoende) temperaturfördelning $T = f(x, y, z)$ uppfyller **Laplace's ekvation (PDE)**: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

Exempel 2D: $T = e^{3x} \sin(3y)$ uppfyller $T_{xx} + T_{yy} = 9e^{3x} \sin(3y) - 9e^{3x} \sin(3y) = 0 \checkmark$

Kontinuitet för tvåvariabelfunktioner

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

(Jämför envariabelfallet: gränsvärdet ska finnas och vara lika med funktionsvärdet.)

Kedjeregeln

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #flervariabelanalys #kedjeregeln #partiell-derivata

Kapitel: 13.5–6 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Partiella derivator

1. Kedjeregeln – ett oberoende variabel

Situation

$z = f(x, y)$ där $x = x(t)$ och $y = y(t)$ – alltså beror z i slutändan bara på t .

Sats

Om f , $x(t)$ och $y(t)$ är deriverbara gäller:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Tolkning

Formeln mäter den **observerade förändringshastigheten** hos f för en observatör som rör sig längs kurvan $(x(t), y(t))$. Termen $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt}$ är bidraget från rörelsen i x -led, och $\frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ bidraget från y -led.

Glöm inte inre derivatan

Kedjeregeln gäller **alltid** när argumentet beror på t : $\frac{d}{dt} \sin(x(t)) = \cos(x(t)) \cdot x'(t)$ **Fel:** $\cos(x(t))$
Rätt: $\cos(x(t)) \cdot x'(t)$

≡ Exempel – temperatur längs en kurva

Låt $T(x, y) = x^2 + y^2$ vara temperaturen i ett plan. En partikel rör sig längs kurvan $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2x \cdot (-\sin t) + 2y \cdot \cos t$$

Substituera $x = \cos t$, $y = \sin t$:

$$= 2 \cos t \cdot (-\sin t) + 2 \sin t \cdot \cos t = 0$$

Temperaturen är konstant längs enhetscirkeln – vilket stämmer eftersom $T = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

2. Kedjeregeln – två oberoende variabler

Situation

$z = f(x, y)$ där $x = x(s, t)$ och $y = y(s, t)$ – alltså beror z på de två oberoende variablerna s och t .

Sats

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Tolkning

Formlerna beskriver hur de partiella derivatorna **transformeras vid ett variabelbyte** $(x, y) \rightarrow (s, t)$. Används exempelvis vid byte till polära, cylindriska eller **sfäriska koordinater**.

≡ Exempel – partiella derivator under variabelbyte

Låt $f(x, y) = x^2 y$ och $x = s + t$, $y = s - t$.

Beräkna $\frac{\partial f}{\partial s}$:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = 2xy \cdot 1 + x^2 \cdot 1 = 2xy + x^2$$

Substituera $x = s + t, y = s - t$:

$$= 2(s+t)(s-t) + (s+t)^2 = 2(s^2 - t^2) + (s+t)^2$$

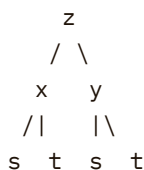
3. Variabelträd

Ett **variabelträd** är ett grafiskt hjälpmedel för att hålla reda på beroenden och tillämpa kedjeregeln systematiskt.

Konstruktion

1. Skriv den slutliga variabeln (z) längst upp.
2. Rita grenar ner till de mellanliggande variablerna (x, y).
3. Rita grenar vidare ner till de oberoende variablerna (s, t).
4. Märk varje gren med motsvarande partiell (eller vanlig) **derivata**.

Schema



Kedjeregeln ges av: summera produkten av derivator längs varje väg från z till den önskade oberoende variabeln.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s}}_{\text{via } x} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}}_{\text{via } y}$$

Allmänt variabelträd

Om $w = f(x_1, \dots, x_m)$ och varje $x_i = x_i(t_1, \dots, t_n)$, ges kedjeregeln av:

$$\frac{\partial w}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}, \quad j = 1, \dots, n$$

4. Differentierbarhet och linjär approximation

Definition – differentierbarhet

Funktionen $f(x, y)$ är **differentierbar** i punkten (a, b) om förändringen $\Delta f = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$ kan skrivas

$$\Delta f = f_x(a, b) \Delta x + f_y(a, b) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

där $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ när $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

Linjär approximation

För en differentierbar funktion gäller den **linjära approximationen**:

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Geometriskt är detta **tangentplanet** till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$.

Differentialen

Differentialen df definieras som:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Den används för att uppskatta **felet** i f till följd av små fel dx, dy i ingångsvariablerna.

Tillräckligt villkor för differentierbarhet

Om de partiella derivatorna f_x och f_y **existerar och är kontinuerliga** i en omgivning av (a, b) , så är f differentierbar i (a, b) .

Exempel – feluppskattning med differential

En rektangel har uppmätta sidor $x = 5,0$ cm och $y = 3,0$ cm, med mätfel $|dx| \leq 0,05$ och $|dy| \leq 0,05$.

Area: $A = xy$, $dA = y dx + x dy$

$$|dA| \leq |y| |dx| + |x| |dy| = 3,0 \cdot 0,05 + 5,0 \cdot 0,05 = 0,40 \text{ cm}^2$$

Det maximala felet i arean är alltså $0,40 \text{ cm}^2$.

5. Polära koordinater – variabelbyte med kedjeregeln

Koordinatbyte

Polära koordinater definieras av:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Transformation av partiella derivator

Med kedjeregeln (fall 2) transformeras derivatorna av $f(x, y)$ till $f(r, \theta)$:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta$$

Kedjeregeln i "shorthand" för flervariabelfallet:

$$\frac{d}{dt}f(\vec{x}(t)) = \vec{\nabla}f \cdot \vec{x}'(t)$$

Notera att det är **skalärprodukt** ($\cdot$), inte kryssprodukt. Om kurvan $\vec{x}(t)$ ligger på en nivåyta $f = \text{konst}$ är hela derivatan 0, och då är $\vec{\nabla}f \perp \vec{x}'(t)$ – gradienten är normal till ytan.

Variabelträdet ser ut som:

$$\begin{array}{cc} & f \\ & / \quad \backslash \\ x & & y \\ / \quad | & | \quad \backslash \\ r & \theta & r & \theta \end{array}$$

≡ Exempel – Laplaceoperatoren i polära koordinater

Vi vill uttrycka $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ i termer av r och θ .

Derivera $\frac{\partial f}{\partial r}$ och $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ en gång till med kedjeregeln. Med de kombinerade formlerna visar man att:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

Detta är Laplaceoperatoren $\nabla^2 f$ i polära koordinater.

Exempel – partiella derivator i polära koordinater

Låt $f(x, y) = x^2 + y^2$. Beräkna $\frac{\partial f}{\partial r}$ och $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta = 2x \cos \theta + 2y \sin \theta$$

Substituera $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$:

$$\begin{aligned} &= 2r \cos^2 \theta + 2r \sin^2 \theta = 2r \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= -2x \cdot r \sin \theta + 2y \cdot r \cos \theta = -2r^2 \cos \theta \sin \theta + 2r^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

Det stämmer eftersom $f = x^2 + y^2 = r^2$ beror bara på r .

Läsning

- [2.4 The Chain Rule](#)
- [13.5 The Chain Rule](#)

Se även

- [Partiella derivator](#)
- [Gradient och riktningsderivata](#)
- [Funktioner av flera variabler](#)

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: What is a partial derivative?](#) — intuitiv introduktion till partiella derivator
- [Khan Academy: Multivariable chain rule](#) — steg-för-steg genomgång
- [Professor Leonard: The Chain Rule for Functions of Multiple Variables](#) — detaljerad genomgång med variabelträd

Interaktiva verktyg

- [Desmos 3D](#) — visualisera **tangentplan** och linjär approximation
- [GeoGebra: Polar Coordinates](#) — se koordinatbytet grafiskt
- [Wolfram Alpha](#) — beräkna partiella derivator och kedjeregeln symboliskt

Wikipedia

- [Chain rule — Wikipedia](#)
- [Total derivative — Wikipedia](#)
- [Polar coordinate system — Wikipedia](#)

Fördjupning

- Adams & Essex, *Calculus: A Complete Course*, avsnitt 13.5–13.6
 - [MIT OCW 18.02SC: Chain Rule](#) — föreläsningsanteckningar och övningar
-

Gradient och riktningsderivata

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#flervariabelanalys #gradient #partiell-derivata

Kapitel: 13.7 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Partiella derivator, Kedjeregeln

1. Gradienten

Gradienten samlar alla partiella derivator för en funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i en enda vektor. Den beskriver hur f förändras i varje koordinatriktning och är ett centralt verktyg i flervariabelanalys.

1.1 Definition

För $f(x, y, z)$ definieras gradienten som:

$$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Notation

$\vec{\nabla} f$ eller $\text{grad } f$

1.2 För funktioner av två variabler

För $f(x, y)$ förenklas definitionen till:

$$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

≡ Beräkna gradient för $f(x, y) = x^2 + 3xy$

Beräkna de partiella derivatorna:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x$$

Gradienten ges av:

$$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 3x \end{bmatrix}$$

I punkten (1, 2):

$$\vec{\nabla} f(1, 2) = \begin{bmatrix} 2(1) + 3(2) \\ 3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. Riktningsderivatan

Partiella derivator mäter förändring längs koordinataxlarna. Riktningsderivatan generaliserar detta — den ger förändringen av f i en valfri riktning $\hat{u}$.

2.1 Definition och formel

För en enhetsvektor $\hat{u}$ med $\|\hat{u}\| = 1$ definieras riktningsderivatan av f i riktningen $\hat{u}$ som:

$$D_{\hat{u}} f = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}$$

 **Riktningsvektorn måste vara normerad**

$D_{\hat{u}} f$ kräver $\|\hat{u}\| = 1$. Om du ges en godtycklig riktning $\vec{v}$, normera alltid först: $\hat{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Glömmer du normeringen skalas svaret av $\|\vec{v}\|$ — en vanlig räknmiss.

2.2 Partiella derivator som specialfall

Om $\hat{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ fås:

$$D_{\hat{u}} f = \vec{\nabla} f \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Riktningsderivatan inkluderar alltså partiella derivator som specialfall.

≡ Beräkna riktningsderivata för $f(x, y) = x^2y + y^3$ i riktningen $(1, 1)$

Normera riktningsvektorn:

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna gradienten:

$$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 + 3y^2 \end{bmatrix}$$

I punkten $(1, 2)$:

$$\vec{\nabla} f(1, 2) = \begin{bmatrix} 2(1)(2) \\ 1 + 3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Riktningsderivatan:

$$D_{\hat{u}} f(1, 2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4+13}{\sqrt{2}} = \frac{17}{\sqrt{2}} = \frac{17\sqrt{2}}{2}$$

3. Geometrisk tolkning

3.1 Vilket $\hat{u}$ maximerar $D_{\hat{u}} f$?

Använd skalärprodukts definition:

$$D_{\hat{u}} f = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u} = |\vec{\nabla} f| |\hat{u}| \cos \theta = |\vec{\nabla} f| \cos \theta$$

Eftersom $|\hat{u}| = 1$ beror uttrycket enbart på vinkeln θ mellan $\vec{\nabla} f$ och $\hat{u}$. Cosinus är maximal (= 1) när $\theta = 0$, dvs när $\hat{u}$ pekar i samma riktning som $\vec{\nabla} f$.

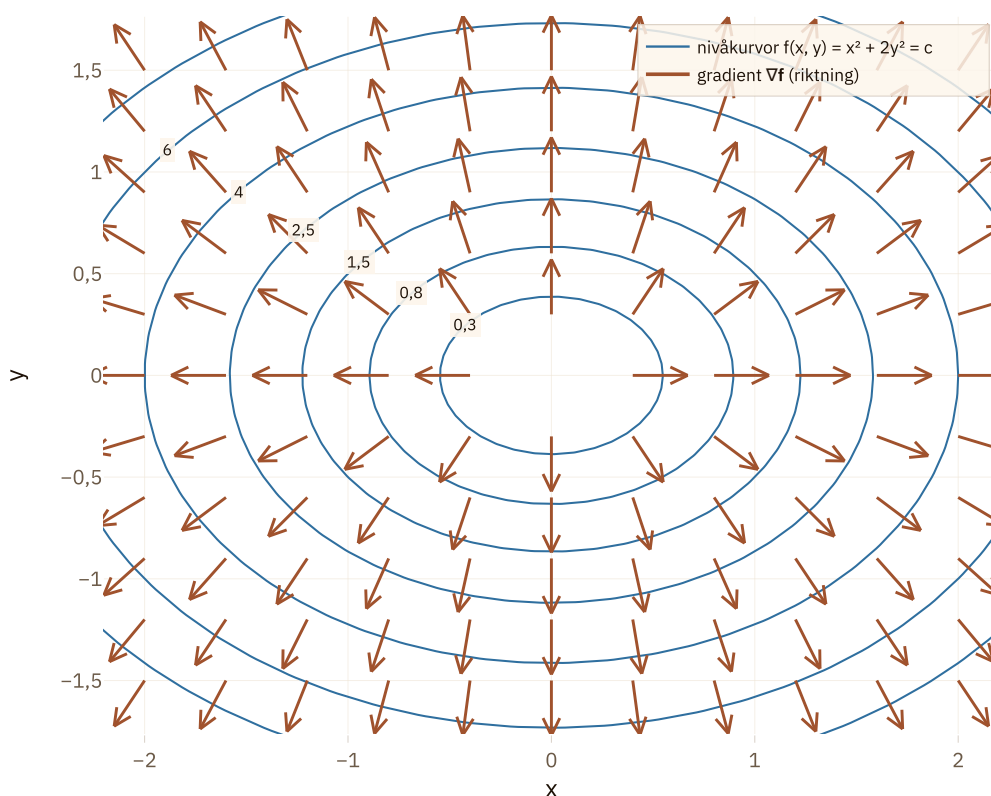
3.2 Sammanfattning – gradientens egenskaper

Egenskap	Beskrivning
$\vec{\nabla} f$ pekar mot brantaste stigning	Riktningen där f ökar snabbast

Egenskap	Beskrivning
$\ \vec{\nabla}f\ $ är maximal ändringstakt	Storleken på den snabbaste ökningen
$-\vec{\nabla}f$ pekar mot brantaste nedstigning	Riktningen där f minskar snabbast
$\vec{\nabla}f \perp$ nivåyta $f = \text{konstant}$	Gradienten är normalvektor till nivåytan

Geometrisk intuition – berglandskapet

Kom ihåg: Gradienten pekar åt det **brattigast uppför**-hållet. Nivåkurvorna (höjdkurvorna på en karta) är alltid $\perp$ gradienten. Tätt liggande nivåkurvor = stor $\|\nabla f\|$ = brant lutning.



≡ **Grad och nivåkurva för** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Grafen $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ är en kon.

Nivåkurvan $f(x, y) = c$ ger $\sqrt{x^2 + y^2} = c$, dvs cirkelar med radie c centrerade i origo.

Gradienten:

$$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{bmatrix}$$

I varje punkt pekar $\vec{\nabla} f$ radiellt utåt — vinkelrätt mot nivåkurvorna (cirklarna) — eftersom f ökar snabbast bort från origo.

4. Tangentplan till en nivåyta

4.1 Uppställning

Låt $g(x, y, z) = C$ vara en nivåyta och (a, b, c) en punkt på ytan.

Eftersom $\vec{\nabla} g(a, b, c)$ är normalvektor till nivåytan i punkten (a, b, c) ges tangentplanet av:

$$\vec{\nabla} g(a, b, c) \cdot \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{bmatrix} = 0$$

4.2 Utskriven form

$$g_x(a, b, c)(x - a) + g_y(a, b, c)(y - b) + g_z(a, b, c)(z - c) = 0$$

Jämförelse med tangentplanet till en graf $z = f(x, y)$

En graf $z = f(x, y)$ kan skrivas som nivåytan $g(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$.

Då ges tangentplanet av:

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

vilket stämmer med formeln från avsnitt 13.4.

Bestäm tangentplanet till $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ i punkten $(1, 2, 3)$

Skriv $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Beräkna gradienten:

$$\vec{\nabla}g = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

I punkten (1, 2, 3):

$$\vec{\nabla}g(1, 2, 3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Tangentplanet:

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + 6(z - 3) = 0$$

$$2x + 4y + 6z = 28 \implies x + 2y + 3z = 14$$

Läsning

- [13.7 Gradients and Directional Derivatives](#)

Se även

- [Partiella derivator](#)
- [Kedjeregeln](#)
- [Kritiska punkter](#)
- [Lagranges multiplikator metod](#)

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Gradient descent, how neural networks learn \(kap 2\)](#) — gradientens roll i optimering och maskininlärning
- [3Blue1Brown: What's a tensor? \(bonus\)](#) — djupare geometrisk förståelse av gradienten
- [Khan Academy: Directional derivatives and slope](#) — introduktion till riktningsderivatan

Interaktiva verktyg

- [GeoGebra: Gradient Field 3D](#) — visualisera gradientfält i 3D
- [Desmos: Level curves and gradient](#) — rita nivåkurvor och gradientvektorer
- [WolframAlpha: Gradient](#) — beräkna gradienter steg för steg

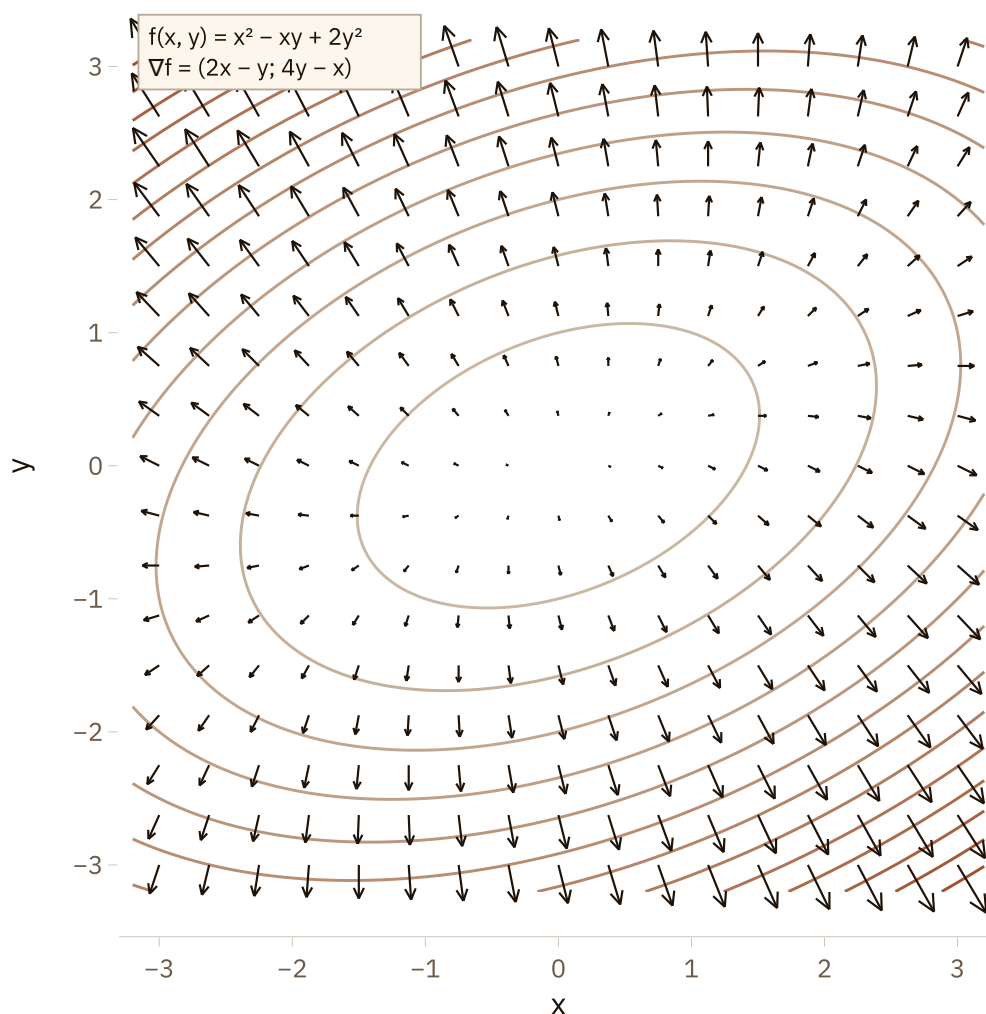
Wikipedia

- [Gradient](#)
- [Directional derivative](#)
- [Level set](#)

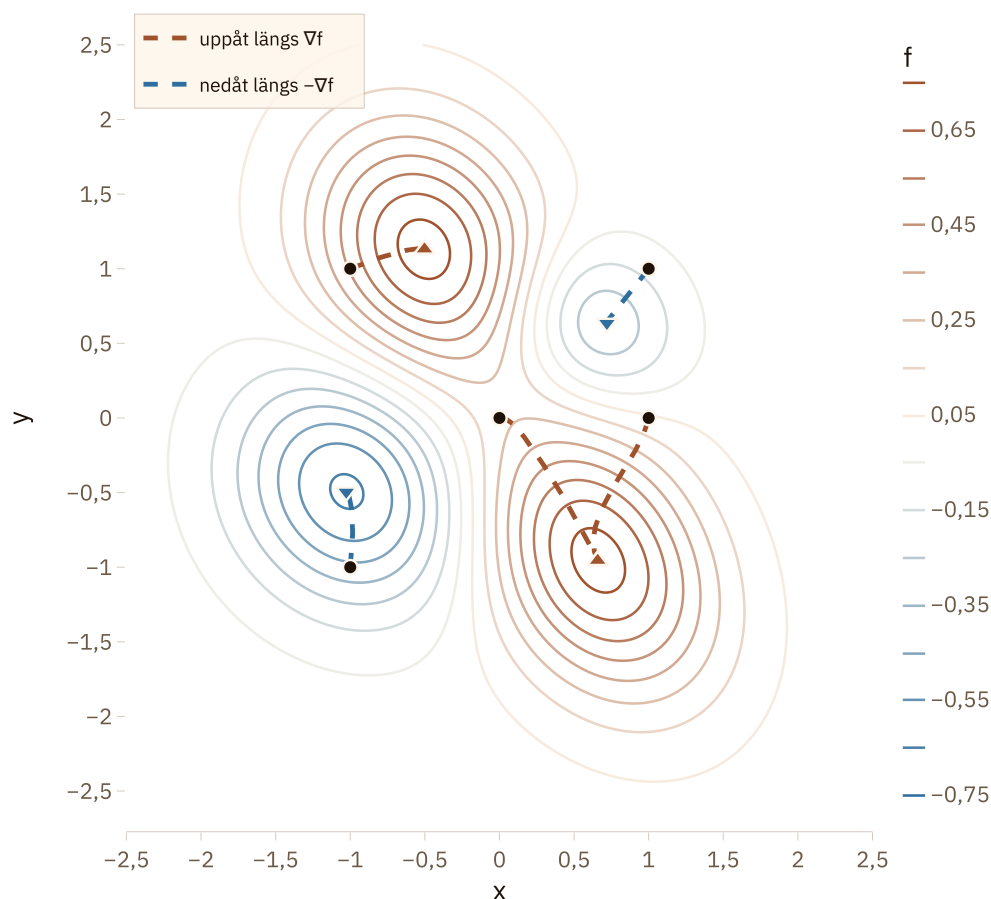
Fördjupning

- [Immersive Math — Chapter 8: The Gradient](#) — interaktiv genomgång med 3D-illustrationer
- [MIT 18.02SC: Gradient, Directional Derivative, Tangent Plane](#) — föreläsningsanteckningar och övningsuppgifter

Illustrationer



Gradient



Gradientvandring

Föreläsningsanteckningar

Från föreläsning: 2026-04-10, M0068M Föreläsare: Stephen McCormick

2026-04-10 – Föreläsning 8 (Riktningsderivata och Taylorpolynom)

Riktningsderivata

Syfte: Generalisera partiella derivator till **derivata** i godtycklig riktning. Partiella derivator mäter förändring längs koordinataxlarna (x, y, z) , men riktningsderivatan ger förändringen i en helt annan riktning.

Givet $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Gradienten: $\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{bmatrix}$

För en enhetsvektor $\hat{u}$ med $\|\hat{u}\| = 1$: $D_{\hat{u}} f = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}$

Krav $\|\hat{u}\| = 1$: Riktningsderivatan mäter förändring per längdenhet.

Vilket $\hat{u}$ maximerar $D_{\hat{u}}f$? $D_{\hat{u}}f = |\vec{\nabla}f| \cos \theta$

Maximum när $\theta = 0$ (dvs $\hat{u}$ pekar i samma riktning som $\vec{\nabla}f$).

Slutsats:

- $\vec{\nabla}f \rightarrow$ riktning där f ökar snabbast
- $|\vec{\nabla}f| \rightarrow$ maximal ändringstakt
- $-\vec{\nabla}f \rightarrow$ riktning där f minskar snabbast
- $\vec{\nabla}f$ är normalvektor till nivåytan $f(x, y, z) = \text{konst}$

Exempel: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (kon). Nivåkurvan $f = c$ är cirklar. Gradienten pekar radiellt utåt – vinkelrätt mot cirkelarna.

Taylorpolynom i flera variabler

Syfte: Approximera funktioner kring en punkt med polynom. Idén är att reducera till envariabelfallet via en hjälpfunktion.

Låt $\vec{a} = (a, b)$, $\vec{h} = (h, k)$. Definiera: $F(t) = f(\vec{a} + t\vec{h}) = f(a + th, b + tk)$

Då är $F(0) = f(\vec{a})$ och $F(1) = f(\vec{a} + \vec{h})$.

Taylor-expansion av $F(t)$ kring $t = 0$ ger Taylorpolynomet för f kring $\vec{a}$: $F'(t) = \vec{\nabla}f(\vec{a} + t\vec{h}) \cdot \vec{h}$

Taylorutveckling

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#matematik #optimering #envariabelanalys #taylorutveckling #approximation
#flervariabelanalys

Kurs: M0065M Förkunskaper: Derivata, Gränsvärden

1. Idé

Taylorpolynom används för att approximera en funktion nära en punkt a med ett polynom som har samma värde och samma derivator där.

Definition

Taylorpolynomet av grad n kring a är

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Specialfallet $a = 0$ kallas **Maclaurinpolynom**. Formeln och resttermen står samlade i **Taylors formel**.

2. Varför formeln ser ut så

Koefficienterna väljs så att

$$T_n(a) = f(a), \quad T'_n(a) = f'(a), \quad \dots, \quad T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Faktorn $k!$ behövs för att k derivator av termen $(x - a)^k$ ska ge tillbaka rätt koefficient.

3. Standardexempel

≡ e^x kring 0

Eftersom alla derivator av e^x är e^x fås

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

≡ $\sin x$ kring 0

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

för små x .

≡ $\ln x$ kring 1

$$\ln x \approx (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \dots$$

4. Restterm och fel

Taylorpolynomet är en approximation, så man skriver

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

där $R_n(x)$ är resttermen.

I Lagranges form gäller

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

för något tal ξ mellan a och x .

Det gör att man kan uppskatta felet.

5. Användningar

Taylorpolynom används för att:

- approximera svåra funktioner med polynom

- beräkna gränsvärden
- beskriva lokalt beteende nära en punkt
- bygga intuition för varför vissa standardgränsvärden gäller

☰ Gränsvärde med Taylor

Eftersom

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

fås

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4) \rightarrow 1.$$

6. Standardutvecklingar att känna igen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (|x| < 1)$$

Läsning

- [4.10 Taylor Polynomials](#)
- [13.9 Taylor's Formula](#)

Se även

- [Derivata](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Extremvärden](#)

Resurser

- [Khan Academy: Taylor and Maclaurin polynomials](#)
- [Wikipedia: Taylor series](#)

Föreläsningsanteckningar

Från föreläsning: 2026-04-10, M0068M Föreläsare: Thomas Strömberg

2026-04-10 - Föreläsning 9 (Taylorpolynom av 2:a ordning för $f(x, y)$)

Repetition: Taylorpolynom i en variabel

$$P_1(x) = g(a) + g'(a)(x - a) \quad P_2(x) = g(a) + g'(a)(x - a) + \frac{g''(a)}{2}(x - a)^2$$

Taylorpolynom av 2:a ordning för $f(x, y)$

$$P(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) + \frac{1}{2}(f_{11}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{12}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{22}(a, b)(y - b)^2)$$

Villkor som uppfylls:

- $P(a, b) = f(a, b)$
- $P_1(a, b) = f_1(a, b), P_2(a, b) = f_2(a, b)$
- $P_{11} = f_{11}, P_{12} = f_{12}, P_{22} = f_{22}$

Taylorutveckling

$f(x, y) \approx P(x, y) + \text{restterm}$ då (x, y) nära (a, b)

Kvadratisk form Q (alternativt skrivsätt): $Q(h, k) = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{11}(a, b) & f_{12}(a, b) \\ f_{21}(a, b) & f_{22}(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$

Kritiska punkter

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #optimering

Kurs: M0068M **Förkunskaper:** Partiella derivator, Gradient och riktningsderivata

Definition

En punkt (a, b) är **kritisk** för $f(x, y)$ om

$$\nabla f(a, b) = 0$$

(dvs $f_x = f_y = 0$) eller om någon partialderivata inte existerar.

Klassificering

I flera variabler är de tre grundtyperna **lokalt minimum**, **lokalt maximum** och **sadelpunkt** — den sista tillkommer jämfört med envariabelfallet, och är en punkt där f har minimum i en riktning och maximum i en annan.

$f = x^2 + y^2$
lokalt minimum

$f = -(x^2 + y^2)$
lokalt maximum

$f = x^2 - y^2$
sadelpunkt

⋮ Sadelyta

$f(x, y) = x^2 - y^2$ har kritisk punkt i $(0, 0)$. Där är f minimum i x -riktning och maximum i y -riktning.

Klassificering via Hessianen

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Låt $D = \det H$ i den kritiska punkten:

- $D > 0, f_{xx} > 0$: lokalt minimum
- $D > 0, f_{xx} < 0$: lokalt maximum
- $D < 0$: sadelpunkt
- $D = 0$: testet ger inget svar

Föreläsningsanteckningar

Från föreläsning: 2026-04-10, M0068M Föreläsare: Thomas Strömberg

2026-04-10 – Föreläsning 9 (Kritiska punkter för $f(x, y)$)

En kritisk punkt uppfyller $f'(x, y) = 0$ (dvs $f_1 = f_2 = 0$).

Sadelpunkt: Exempel – sadelytan $f(x, y) = x^2 - y^2$ i $(0, 0)$: minimum i x -riktning, maximum i y -riktning.

Läsning

- 14.1 Extreme Values

Se även

- Extremvärdesproblem
- Lagranges multiplikator metod
- Gradient och riktningsderivata

Extremvärdesproblem

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #optimering

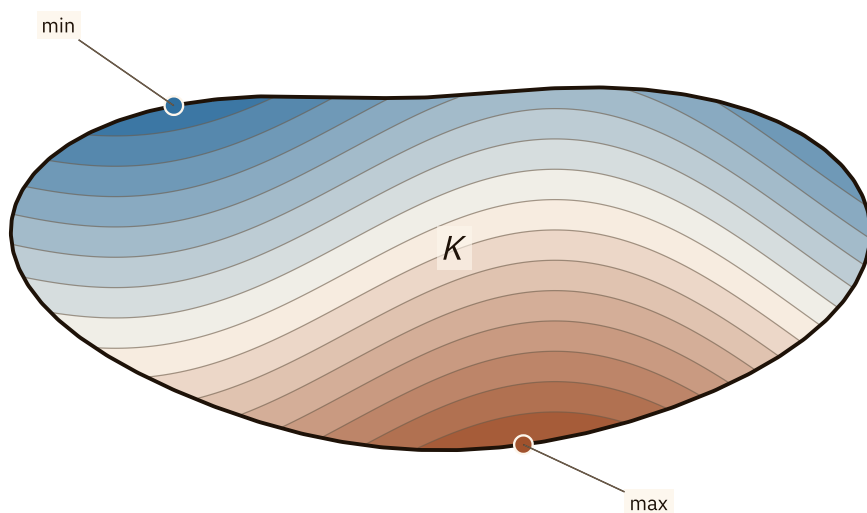
Kapitel: 14.1–14.2 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Kritiska punkter, Gradient och riktningsderivata, Partiella derivator

1. Frågan vi ställer

Givet en funktion $f(x, y)$ och en delmängd $K \subset \mathbb{R}^2$ – vilka är f :s största och minsta värde på K , och i vilka punkter antas de?

Grundtanken

Söket efter globala extremvärden delar upp K i två zoner: **det inre**, där en extrempunkt måste vara **kritisk**, och **randen** ∂K , där f blir en funktion av färre variabler som man kan optimera separat. Resten av jobbet är att lista alla kandidater och jämföra.



Bilden ovan illustrerar det generella läget: en kontinuerlig funktion (f – färgskalan) på ett kompakt område K (det inneslutna området) antar både ett största värde (max, röd) och ett minsta värde (min, blå). Vår uppgift är att lokalisera dem.

🔗 Weierstrass sats

Om f är **kontinuerlig** och K är **kompakt** (slutet och begränsat) så antar f både ett maximum och ett minimum på K . Frågan är aldrig *om* extremvärden existerar — bara *var* de ligger.

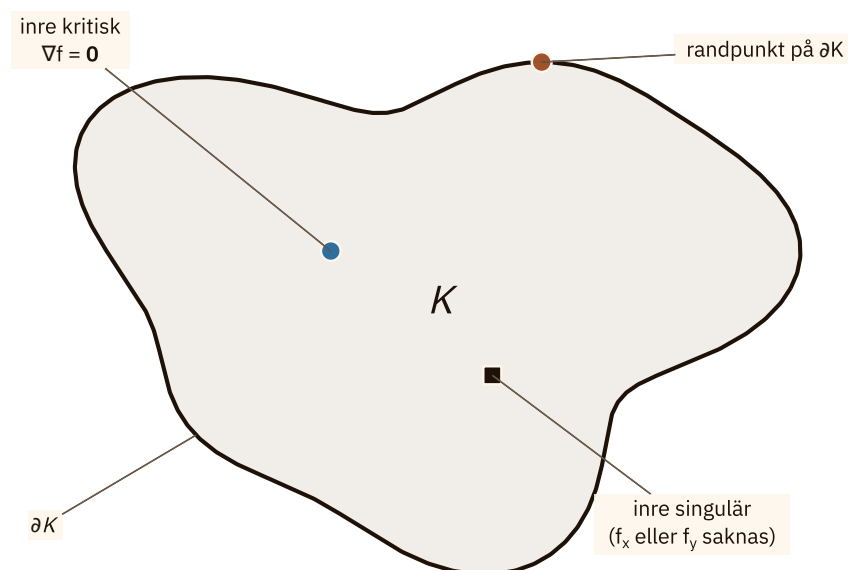
✎ Tecken på ∂

Symbolen ∂ i ∂K betyder *rand* — den har ingenting med partialderivator att göra, trots notationen. Det är en av flervariabelanalysens trasiga vänner: samma symbol, två betydelser.

2. Var kan kandidaterna ligga?

Antag att $(x_0, y_0) \in K$ är en punkt där f antar sitt största värde (analogt för minsta). Då måste (x_0, y_0) vara av *en* av följande tre typer:

1. **Inre kritisk punkt** — (x_0, y_0) ligger strikt innanför K och uppfyller $\nabla f = \vec{0}$, dvs. $f_x(x_0, y_0) = 0$ och $f_y(x_0, y_0) = 0$.
2. **Inre singulär punkt** — (x_0, y_0) ligger strikt innanför K men f_x eller f_y existerar inte där.
3. **Randpunkt** — $(x_0, y_0) \in \partial K$. Här gäller *inte* nödvändigtvis $\nabla f = \vec{0}$; randens geometri kan tvinga f att vara stor (eller liten) i en punkt som ändå inte är kritisk i hela planet.



🔗 Varför just dessa tre?

I en inre punkt där f är differentierbar och inte kritisk, pekar ∇f åt något håll — och då kan man röra sig en liten bit dit och *öka* f . Då kan punkten inte vara ett max. Argumentet gäller bara så länge man *får* flytta sig fritt i alla riktningar, vilket man bara får i det inre. På randen är man inlåst.

3. Metod – steg för steg

🔗 Receptet

1. **Inre kritiska punkter.** Lös ekvationssystemet $f_x = 0$, $f_y = 0$ och behåll de lösningar som ligger strikt innanför K .
2. **Inre singulära punkter.** Identifiera punkter där f_x eller f_y inte existerar. För polynom finns inga.
3. **Randen.** Parametrisera ∂K styckevis. På varje stycke blir f en envariabelsfunktion — derivera, sätt lika med noll, plocka ut alla lokala extrempunkter samt ändpunkter/hörn.
4. **Jämför.** Listan av kandidater är ändlig. Räkna f i varje punkt och välj största och minsta värdet.

⚠️ Vanliga fallgropar

- **Glömt randen.** Inre kritiska punkter ger inte hela bilden om K är kompakt.
- **Behållit kandidater utanför K .** En lösning till $\nabla f = \vec{0}$ som ligger utanför K är inte en kandidat — kasta bort den.
- **Glömt hörnen.** På en styckevis slät rand är hörnen alltid kandidater, även om f inte är kritisk där.
- **Förväxlat lokala och globala.** Lokala extrempunkter inne i K är *kandidater*, inte automatiskt svaret — jämför med randvärdena.

🔗 Bivillkor i förklädnad

Steg 3 — randundersökningen — är samma sak som att optimera f under bivillkoret att (x, y) ligger på randen. När randen ges som en nivåkurva $g(x, y) = 0$ används ofta **Lagranges multiplikator** istället för parametrisering.

4. Exempel – skivan

≡ Exempel 1 – f på enhetsskivan

Sök största och minsta värde hos $f(x, y) = x + x^2 + y^2$ på $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösning

Steg 1 – inre kritiska punkter. $\nabla f = \vec{0} \iff \begin{cases} f_x = 1 + 2x = 0 \\ f_y = 2y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (-\frac{1}{2}, 0).$

Kontroll: $(-\frac{1}{2})^2 + 0^2 = \frac{1}{4} < 1$ – punkten ligger strikt innanför K . Behålls. $f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}.$

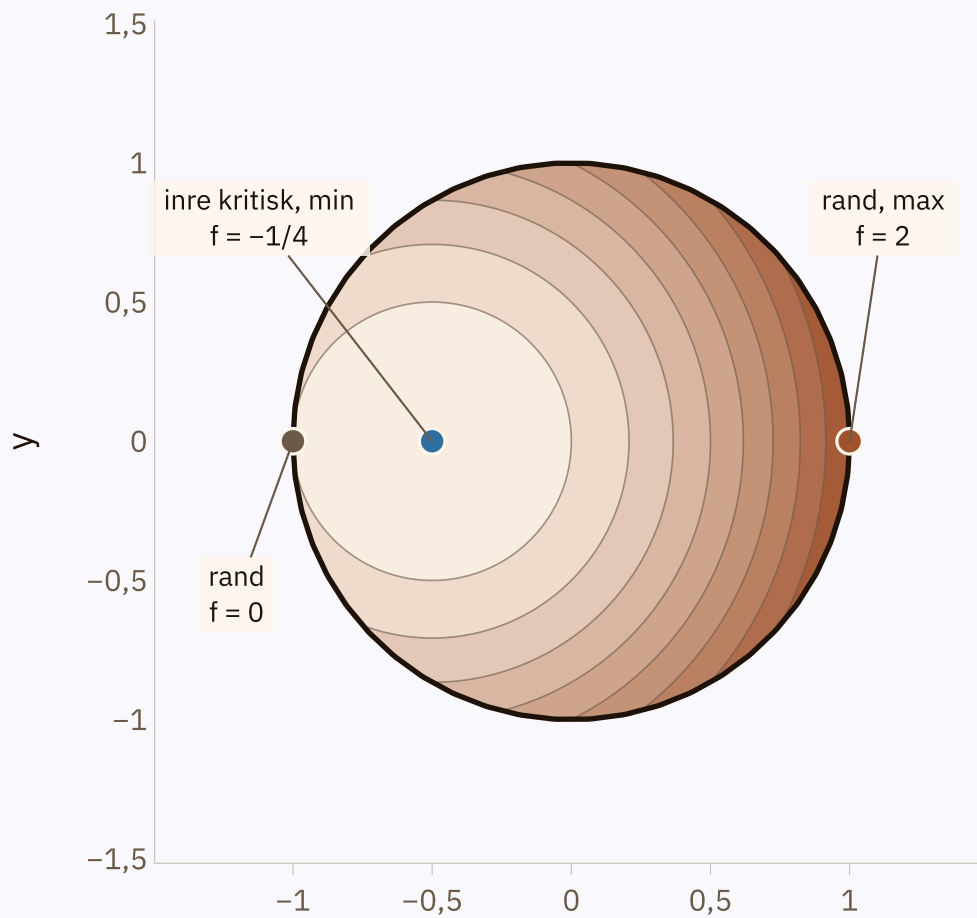
Steg 2 – inre singulära punkter. f är ett polynom; inga finns.

Steg 3 – randen. Parametrisera $x^2 + y^2 = 1$ med $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$: $g(t) = \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = \cos t + 1$. $g'(t) = -\sin t = 0 \implies t = 0$ eller $t = \pi$, dvs. $(1, 0)$ och $(-1, 0)$.

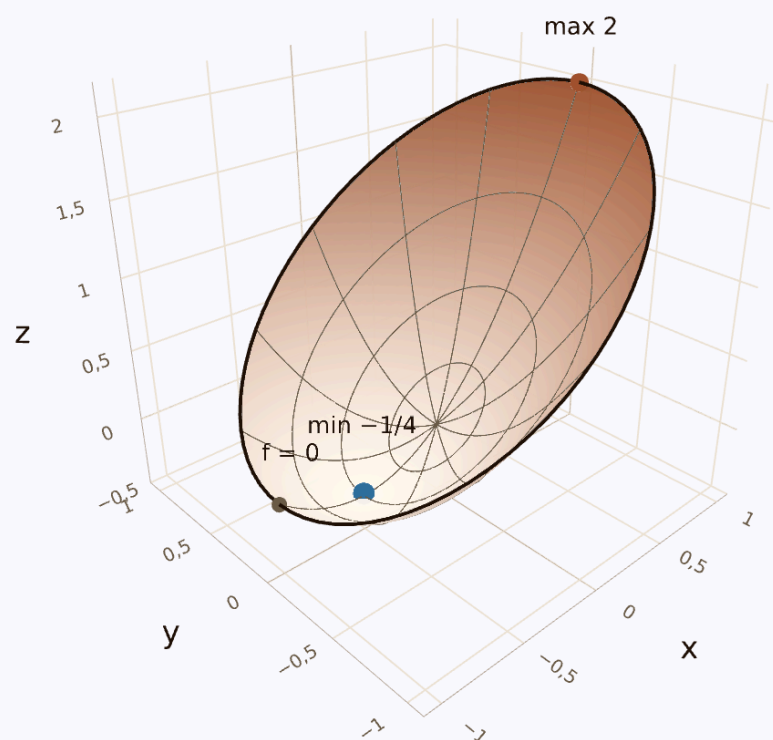
Steg 4 – jämför.

Punkt	Typ	f -värde
$(-\frac{1}{2}, 0)$	inre kritisk	$-\frac{1}{4}$
$(1, 0)$	rand	2
$(-1, 0)$	rand	0

$f_{\min} = -\frac{1}{4} \text{ i } (-\frac{1}{2}, 0), \quad f_{\max} = 2 \text{ i } (1, 0).$



Nivåkurvorna till f är cirklar runt $(-\frac{1}{2}, 0)$ — den enda punkten där gradienten är noll. På randen blir f entydigt bestämd av $\cos t$, så störst där $\cos t = 1$ (dvs. $(1, 0)$) och minst där $\cos t = -1$ (dvs. $(-1, 0)$).



3D-vyn visar varför inre minimum hamnar nära $x = -\frac{1}{2}$: ytan är en paraboloid förskjuten åt vänster, så randens högsta punkt $(1, 0)$ – där paraboloidens lutning är som störst åt höger – vinner mot botten.

5. Exempel – triangeln

≡ Exempel 2 – f på en triangel

Sök största och minsta värde hos $f(x, y) = 3 + x - x^2 - y^2$ på triangeln $K : 0 \leq x \leq y \leq 1$ (hörn $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$).

Lösning

Steg 1 – inre kritiska punkter. $\nabla f = \vec{0} \iff \begin{cases} f_x = 1 - 2x = 0 \\ f_y = -2y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (\frac{1}{2}, 0).$

Punkten kräver $x \leq y$, dvs. $\frac{1}{2} \leq 0$ – falskt. Ligger **utanför** K . Förkastas.

Steg 2 – inre singulära punkter. Inga (f är polynom).

Steg 3 – randen. Tre sidor:

- $\gamma_1 : y = x, x \in [0, 1]$ – diagonalen
- $\gamma_2 : x = 0, y \in [0, 1]$ – vänsterkanten
- $\gamma_3 : y = 1, x \in [0, 1]$ – toppen

På γ_1 : $h(x) = f(x, x) = 3 + x - 2x^2$. $h'(x) = 1 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$, dvs. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{25}{8}$.

På γ_2 : $h(y) = f(0, y) = 3 - y^2$, monotont avtagande för $y \geq 0$. Inga inre extrempunkter; bara hörnen räknas.

På γ_3 : $h(x) = f(x, 1) = 2 + x - x^2$. $h'(x) = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, dvs. $(\frac{1}{2}, 1)$. $f(\frac{1}{2}, 1) = \frac{9}{4}$.

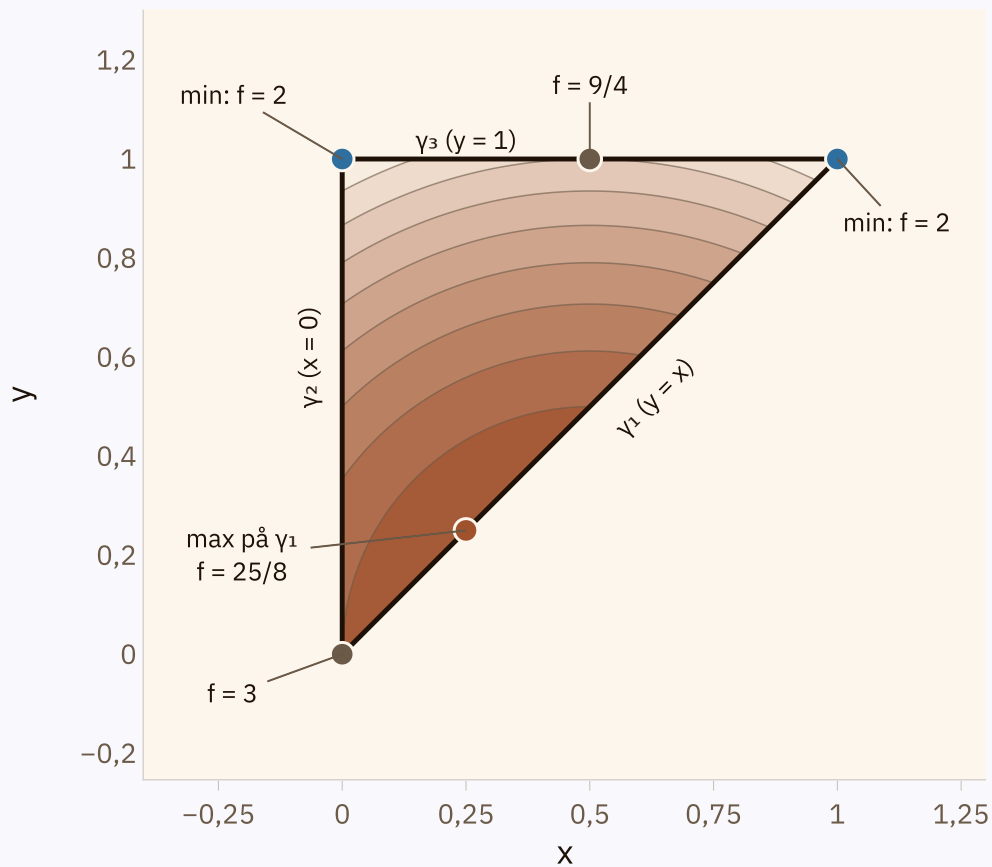
Hörn:

Hörn	f -värde
(0, 0)	3
(0, 1)	2
(1, 1)	2

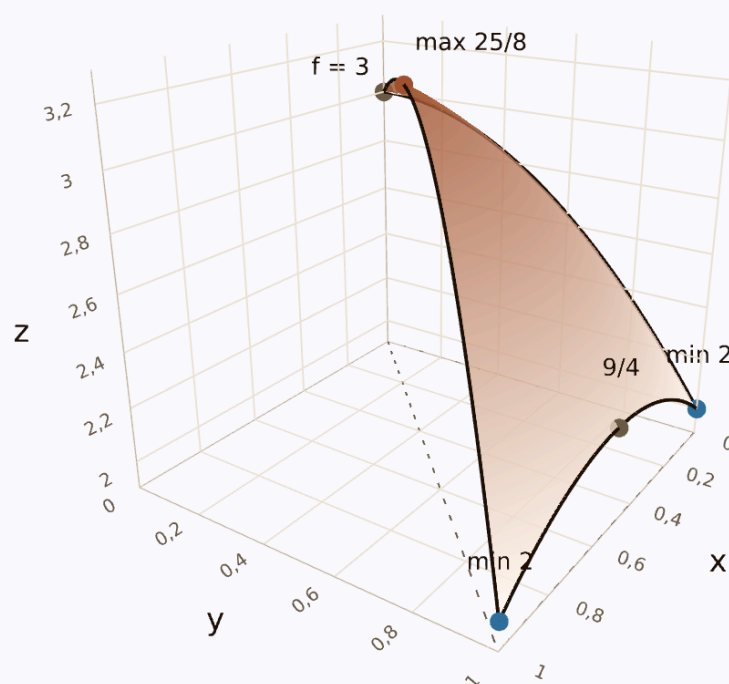
Steg 4 – jämför.

Punkt	Typ	f -värde
$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	rand (γ_1)	$\frac{25}{8} = 3,125$
(0, 0)	hörn	3
$(\frac{1}{2}, 1)$	rand (γ_3)	$\frac{9}{4} = 2,25$
(0, 1)	hörn	2
(1, 1)	hörn	2

$f_{\min} = 2$ i (0, 1) och (1, 1), $f_{\max} = \frac{25}{8}$ i $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.
--



Nivåkurvorna är cirklar runt $(\frac{1}{2}, 0)$ — det globala maxat av f i hela planet, som ligger utanför triangeln. Den punkt på triangeln som ligger närmast detta "centrum" är $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ på diagonalen γ_1 , vilket är var randmaxat hamnar.



Den nedåtvända paraboliska ytan antar sina två minsta värden i triangelns “fjärran” hörn $(0, 1)$ och $(1, 1)$, som båda ligger lika långt från det utomliggande centrumet.

6. Vidare – bivillkor och randundersökning

När randen är beskriven *implicit* – som en nivåkurva $g(x, y) = 0$ snarare än styckevis parametriserad – blir steg 3 ofta enklare med **Lagranges multiplikator metod**. Då söks punkter där $\vec{\nabla} f = -\lambda \vec{\nabla} g$, dvs. där nivåkurvorna till f tangerar bivillkoret.

Samma idé, annan språkdräkt

Randundersökning genom parametrisering och randundersökning via Lagrange ger samma kandidater. Vilken metod som är enklast beror på hur randen är given:

- **Lätt att parametrisera** (rät linje, cirkel, ellips): parametrisera och derivera.
- **Implicit nivåkurva** ($g(x, y) = 0$ med messig form): använd Lagrange.

7. Sammanfattning

Checklista för extremvärdesproblem

Givet f kontinuerlig på ett kompakt område $K \subset \mathbb{R}^2$:

1. **Inre kritiska punkter** — lös $\nabla f = \vec{0}$, behåll bara lösningar inuti K .
2. **Inre singulära punkter** — punkter där partialderivatorna inte existerar.
3. **Randen ∂K** — parametrisera styckevis, derivera, samla alla inre extrempunkter och hörn.
4. **Jämför** alla kandidater. Störst = max, minst = min.

Var i K	Villkor i kandidatpunkten
Inre, slät	$\nabla f = \vec{0}$
Inre, ej differentierbar	f_x eller f_y saknas
Rand (parametriserad)	$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = 0$
Rand (implicit $g = 0$)	$\vec{\nabla} f \parallel \vec{\nabla} g$ (Lagrange)
Hörn på styckevis rand	tas med ovillkorligen

Läsning

- [14.1 Extreme Values](#)
- [14.2 Extreme Values on Restricted Domains](#)

Se även

- Kritiska punkter
- Lagranges multiplikator metod
- Gradient och riktningsderivata
- Nivåkurvor och ytor
- Partiella derivator

Resurser

- [3Blue1Brown / Khan Academy: Lagrange multipliers, using tangency to solve constrained optimization](#) — bygger den geometriska intuitionen för randundersökning.
 - [Khan Academy: Maxima, minima and saddle points](#)
 - [Wikipedia: Extreme value theorem](#)
-

Lagranges multiplikatormetod

19 okt. 2026, 7 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #optimering #gradient

Kapitel: 14.3 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Gradient och riktningsderivata, Kritiska punkter, Extremvärdesproblem, Nivåkurvor och ytor

1. Problemet – optimering under bivillkor

Vi vill bestämma största och minsta värde av

$$f(x, y) \text{ under bivillkoret } g(x, y) = 0.$$

Geometriskt: vi letar **extremvärden** av f enbart bland de punkter som ligger på kurvan $g = 0$, inte i hela planet. Samma princip gäller i tre eller fler variabler, där $g(x, y, z) = 0$ skär ut en yta istället för en kurva.

Var dyker bivillkor upp?

- Största/minsta avstånd från origo till en kurva eller yta.
- Randundersökning i **Extremvärdesproblem** på kompakta områden.
- Fysik: optimera energi/verkningsgrad under en bevarandelag.
- Ekonomi: maximera nytta under en budgetrestriktion.

2. Geometrisk idé – tangerande nivåkurvor

Betrakta nivåkurvorna $f = c$ för olika c och bivillkoret $g = 0$. När c ändras glider f -kurvan genom planet. Extremvärden på bivillkoret inträffar i just de punkter där nivåkurvan $f = c^*$ **tangerar** kurvan $g = 0$.

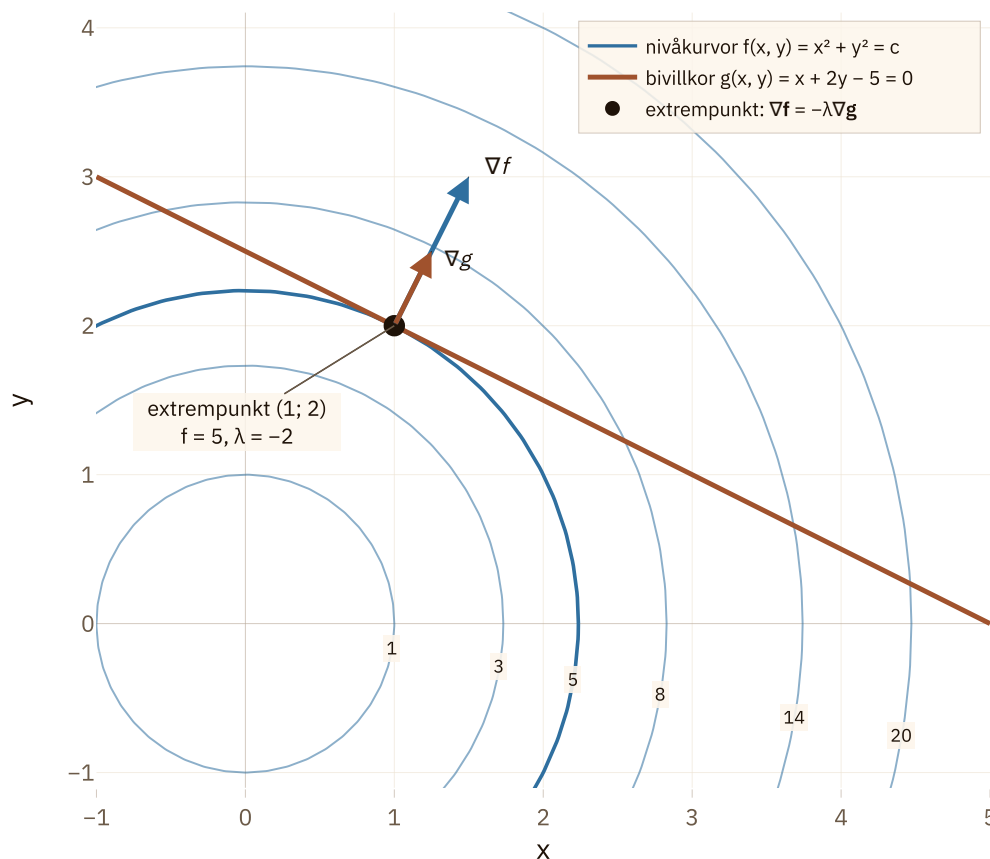
I en tangeringspunkt är kurvornas normalvektorer parallella. Eftersom gradienten är normal till en nivåkurva ger det:

$$\vec{\nabla} f = -\lambda \vec{\nabla} g$$

för något tal $\lambda \in \mathbb{R}$. Talet λ kallas **Lagrangemultiplikator**. Tecknet är bara konvention — det viktiga är att gradienterna är parallella.

Intuition

Skulle gradienterna inte vara parallella, finns en komponent av $\vec{\nabla} f$ längs bivillkoret. Då kan man röra sig på $g = 0$ och öka (eller minska) f . Alltså kan ingen extrempunkt ligga där.



Nivåkurvor till f tangerar bivillkoret $g = 0$ i extrempunkten — där är $\vec{\nabla} f \parallel \vec{\nabla} g$.

3. Lagrangefunktionen

Introducera hjälpfunktionen

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Det nödvändiga villkoret ovan kan då skrivas kompakt som

$$\vec{\nabla} L = \vec{0} \iff \begin{cases} L_x = f_x + \lambda g_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda g_y = 0 \\ L_\lambda = g(x, y) = 0. \end{cases}$$

De två första ekvationerna ger **stationaritetsvillkoret** ($\vec{\nabla}f = -\lambda \vec{\nabla}g$), den tredje ger själva **bivillkoret** ($g = 0$).

Generalisering till tre variabler

För $f(x, y, z)$ under bivillkoret $g(x, y, z) = 0$ ser det likadant ut: $L(x, y, z, \lambda) = f + \lambda g$, $\vec{\nabla}L = \vec{0}$.

4. Determinantformen (utan λ)

Parallellitetsvillkoret $\vec{\nabla}f \parallel \vec{\nabla}g$ i två variabler kan uttryckas utan att införa λ :

$$\det [\vec{\nabla}f \quad \vec{\nabla}g] = \begin{vmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{vmatrix} = 0.$$

Tillsammans med $g = 0$ får man ett system i bara (x, y) – praktiskt när λ inte är intressant i sig.

5. Metod – steg för steg

Recept

För att hitta extremvärden av f under bivillkoret $g = 0$:

1. **Ställ upp** $L(x, y, \lambda) = f + \lambda g$.
2. **Sätt upp systemet** $L_x = L_y = L_\lambda = 0$.
3. **Lös systemet.** Standardknep: bryt ut λ ur de två första ekvationerna och sätt uttrycken lika.
Var noga med villkor när du dividerar.
4. **Kontrollera specialfall** separat – t.ex. där variabler är 0, eller där $\vec{\nabla}g = \vec{0}$ (**singulär punkt** på bivillkoret).
5. **Beräkna** f i alla kandidatpunkter och jämför.

Vanliga fallgropar

- **Division utan villkor.** När du delar med en variabel, glöm inte att kontrollera fallet då den är 0.
- **Ej kompakt bivillkor.** Om $g = 0$ inte är begränsat behöver max/min inte existera – argumentera först för att de gör det.

- **Singulära punkter.** Om $\vec{\nabla}g(p) = \vec{0}$ kan p vara en extrempunkt utan att uppfylla Lagranges ekvationer.
- **Lagrange räcker inte för ojämlikhet.** För $g \leq 0$ (kompakt område) måste man även undersöka det inre – se [Extremvärdesproblem](#).

6. Exempel

≡ Exempel 1 – Avstånd från origo till en linje

Bestäm kortaste avståndet från origo till linjen $x + 2y = 5$.

Minimera $f(x, y) = x^2 + y^2$ (kvadrerat avstånd) under $g(x, y) = x + 2y - 5 = 0$.

$$L = x^2 + y^2 + \lambda(x + 2y - 5)$$

$$\begin{cases} L_x = 2x + \lambda = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda = 0 \\ L_\lambda = x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

Ur de två första: $\lambda = -2x$ och $\lambda = -y$, alltså $y = 2x$. Insatt i bivillkoret: $x + 4x = 5 \Rightarrow x = 1, y = 2$.

$$f(1, 2) = 1 + 4 = 5 \quad \Rightarrow \quad \text{avstånd} = \sqrt{5}.$$

≡ Exempel 2 – Punkter på en ellips närmast och längst från origo

Ellipsen $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$. Bestäm de punkter på ellipsen som ligger närmast respektive längst från origo.

Optimera $f(x, y) = x^2 + y^2$ under $g(x, y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0$.

$$\text{Gradienten: } \vec{\nabla}f = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}, \quad \vec{\nabla}g = \begin{bmatrix} 34x + 12y \\ 12x + 16y \end{bmatrix}.$$

$$\text{Använd determinantformen: } \begin{vmatrix} 2x & 34x + 12y \\ 2y & 12x + 16y \end{vmatrix} = 0$$

$$2x(12x + 16y) - 2y(34x + 12y) = 0$$

$$24x^2 + 32xy - 68xy - 24y^2 = 0 \iff 24x^2 - 36xy - 24y^2 = 0$$

$$\iff 2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0 \iff (2x + y)(x - 2y) = 0.$$

Två fall: $y = -2x$ eller $x = 2y$.

- $y = -2x$ i bivillkoret: $17x^2 - 24x^2 + 32x^2 = 25x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 4$. Då $f = x^2 + 4x^2 = 20$.
- $x = 2y$ i bivillkoret: $68y^2 + 24y^2 + 8y^2 = 100y^2 = 100 \Rightarrow y^2 = 1$. Då $f = 4y^2 + y^2 = 5$.

Svar: närmast origo är $f = 5$ (avstånd $\sqrt{5}$) i $(\pm 2, \pm 1)$; längst från origo är $f = 20$ (avstånd $2\sqrt{5}$) i $(\pm 2, \mp 4)$.

≡ Exempel 3 – Extremvärden på en sfär

Bestäm största och minsta värde av $f(x, y, z) = x + y^2 + z$ på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Bivillkoret $g = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ är kompakt, så max och min existerar.

$$L_x : 1 + 2\lambda x = 0 \quad (1) \quad L_y : 2y + 2\lambda y = 0 \quad (2) \quad L_z : 1 + 2\lambda z = 0 \quad (3) \quad L_\lambda : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (4)$$

$$\text{Ekv. (2): } 2y(1 + \lambda) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ eller } \lambda = -1.$$

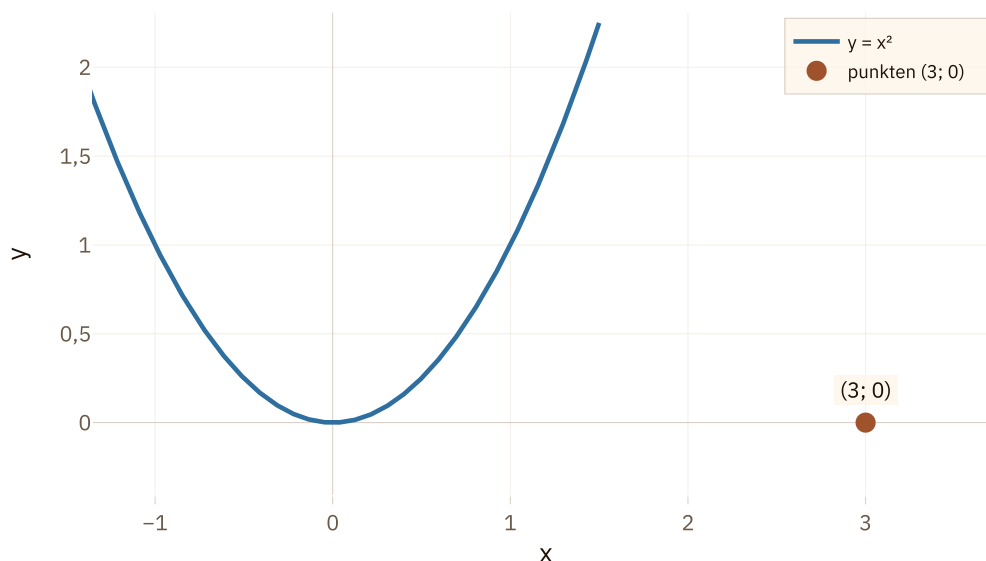
Fall A: $y = 0$. Från (1) och (3): $x = z = -\frac{1}{2\lambda}$. Insatt i (4): $2x^2 = 1 \Rightarrow x = z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ger $f = x + 0 + z = 2x = \pm\sqrt{2}$.

Fall B: $\lambda = -1$. Från (1): $x = \frac{1}{2}$; från (3): $z = \frac{1}{2}$. Insatt i (4): $\frac{1}{4} + y^2 + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}$. Ger $f = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

$$\text{Jämför: } \sqrt{2} \approx 1,414 < \frac{3}{2} = 1,5 \text{ och } -\sqrt{2} < \frac{3}{2}.$$

Svar: största värdet är $\frac{3}{2}$ i $(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$, minsta värdet är $-\sqrt{2}$ i $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Hitta kortaste distansen från $(3, 0)$ till $y = x^2$ $f(x, y) = \text{dist}^2 = (x - 3)^2 + y^2$ $g(x, y) = y - x^2$ $L(x, y) = \vec{0}$



7. Sammanhang med randundersökning

Lagranges metod är precis det man gör när man undersöker **randen** i ett **Extremvärdesproblem** på ett kompakt område $K = \{g \leq 0\}$:

1. Kritiska inre punkter: $\vec{\nabla} f = \vec{0}$ inuti K .
2. Singulära inre punkter.
3. **Rand** $g = 0$: Lagranges multiplikatormetod (eller parametrisering).

Jämför alla kandidatvärden — störst är max, minst är min.

Läsning

- 14.3 Lagrange Multipliers
- 14.4 Lagrange Multipliers in n-Space

Se även

- Gradient och riktningsderivata
- Kritiska punkter
- Extremvärdesproblem
- Nivåkurvor och ytor
- Kvadratisk form

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown / Khan Academy: Lagrange multipliers, using tangency to solve constrained optimization](#)↗
- [Khan Academy: Lagrange multipliers introduction](#)↗

Wikipedia

- [Lagrange multiplier](#)↗

Kurslitteratur

- [Adams — 14.3 Lagrange Multipliers](#)
-

Dubbelintegraler

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #integration #dubbelintegral

Kurs: M0068M Föreläsningar: Bestämd integral och Riemannsummor, Integraler

1. Definition via Riemannsummor

Låt $f(x, y)$ vara definierad på ett slutet, begränsat område $D \subset \mathbb{R}^2$. Dela upp D i n delområden ΔA_k med valda punkter (x_k^*, y_k^*) .

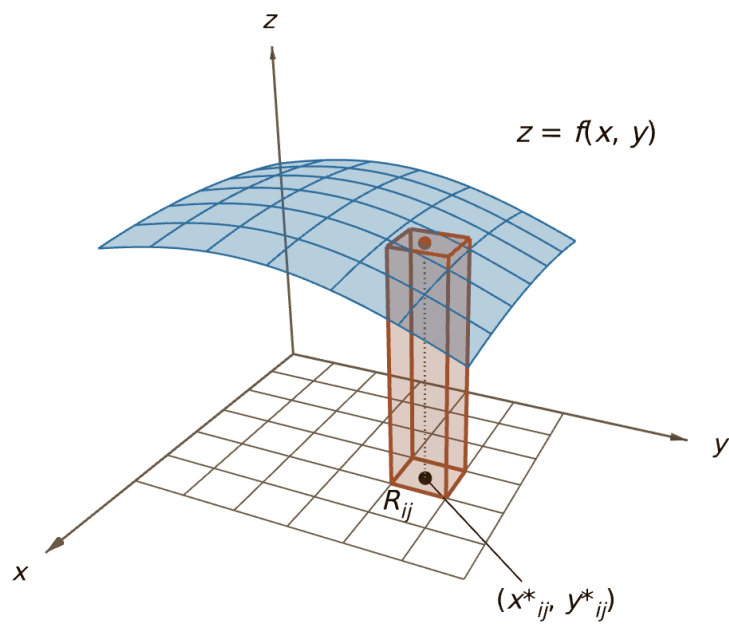
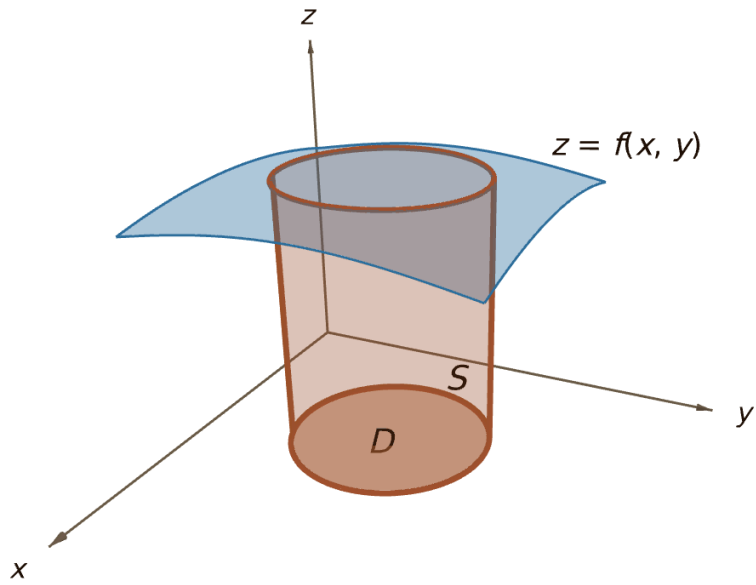
Volymelement kan beskrivas som funktionen $\times$ arean, och ΔA kan beskrivas som $\Delta x \Delta y$

$$\Delta V = f(x, y) \Delta A = f(x, y) \Delta x \Delta y$$

Totala volymen kan beskrivas som en summa av dessa volymelement ΔV

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$$

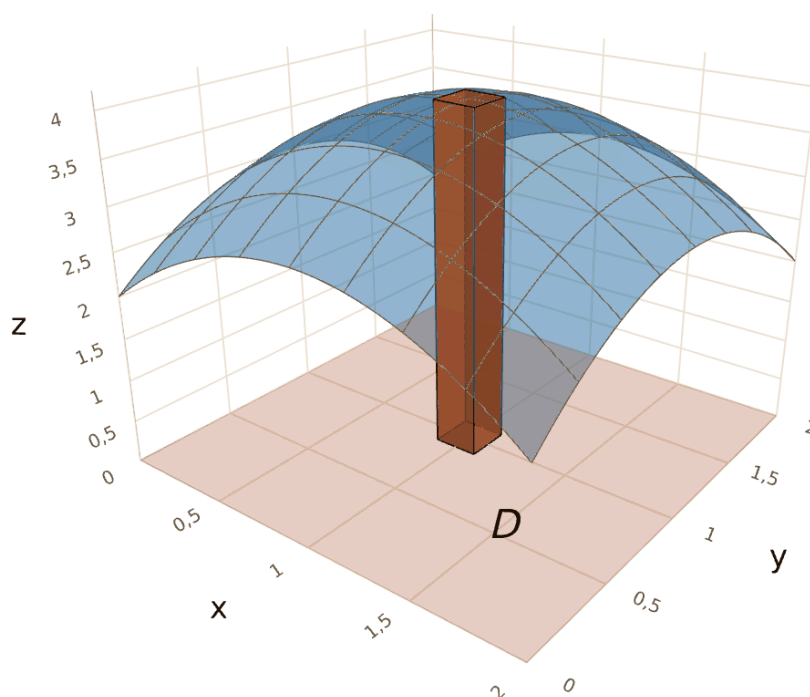
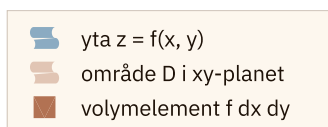
Exempel: för kvadraten $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ kan vi dela i fyra delkvadrater med centrum i punkterna nedan och summera f över dem.



2. Geometrisk tolkning

Tolkning

Om $f(x, y) \geq 0$ på D är $\iint_D f(x, y) dA$ volymen av kroppen mellan området D i xy -planet och ytan $z = f(x, y)$.



Specialfallet $f \equiv 1$ ger arean av D :

$$\iint_D 1 dA = \text{area}(D)$$

3. Itererade integraler (Fubinis sats)

Över ett rektangulärt område $R = [a, b] \times [c, d]$ gäller:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

x-enkelt vs y-enkelt område

- **y-enkelt:** $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ $\iint_D f \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx$
- **x-enkelt:** $D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ $\iint_D f \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy$

Välj integrationsordning efter hur D är enklast att beskriva.

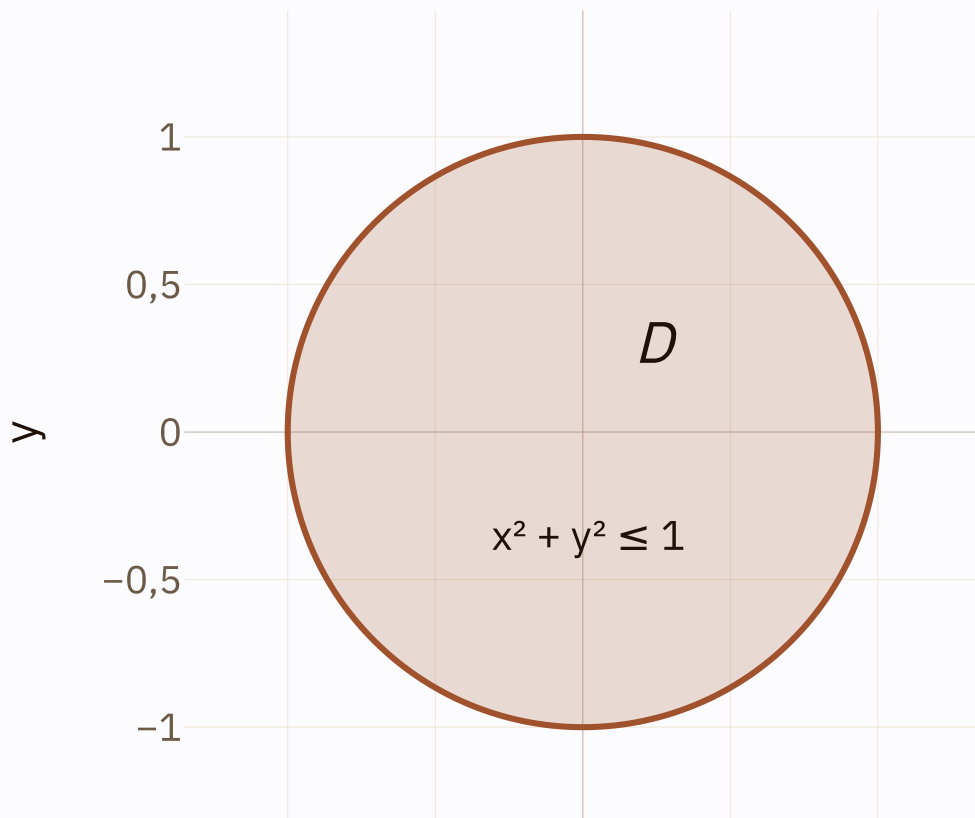
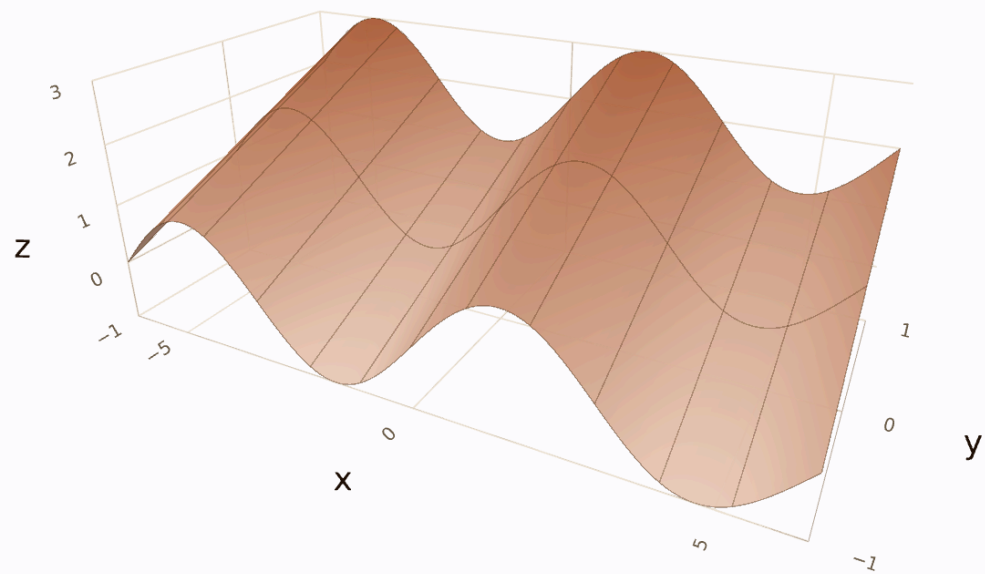
4. Räkneregler

- Linjäritet: $\iint_D (\alpha f + \beta g) \, dA = \alpha \iint_D f \, dA + \beta \iint_D g \, dA$
- Additivitet över område: om $D = D_1 \cup D_2$ och $D_1 \cap D_2$ har area noll, $\iint_D f \, dA = \iint_{D_1} f \, dA + \iint_{D_2} f \, dA$
- Monotoni: $f \leq g$ på $D \Rightarrow \iint_D f \, dA \leq \iint_D g \, dA$
- **Symmetri:** om D är symmetriskt kring x -axeln och f är udda i y , är $\iint_D f \, dA = 0$. Analogt för udda i x .

5. Exempel

Exempel 1 - symmetri över enhetsskivan

$$\iint_D (\sin x + 1 + y) \, dA, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$



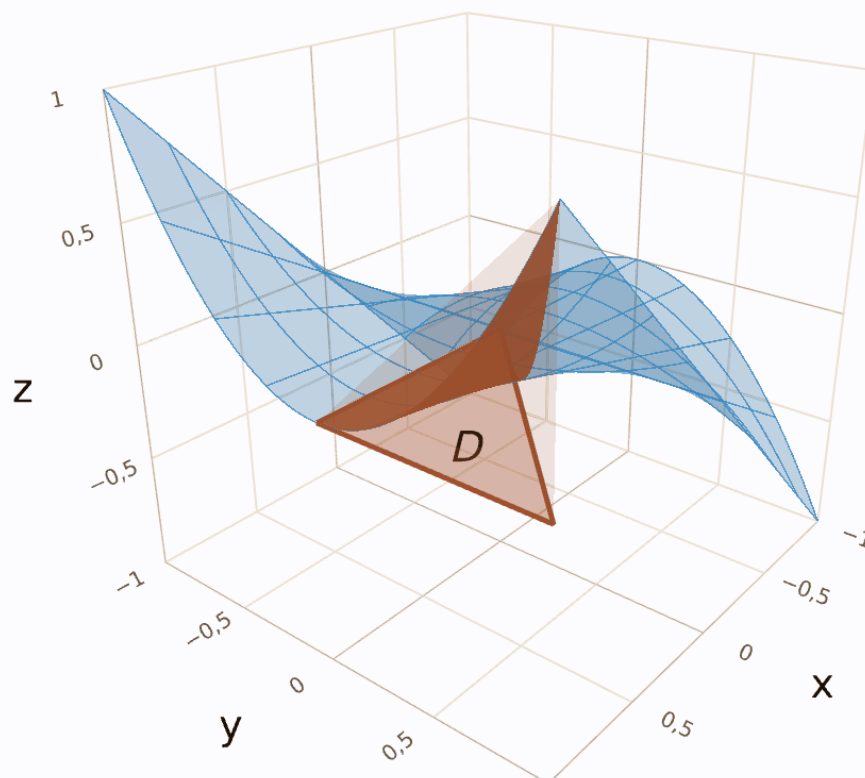
D är symmetriskt kring båda axlarna.

- $\sin x$ är udda i $x \Rightarrow \iint_D \sin x \, dA = 0$
- y är udda i $y \Rightarrow \iint_D y \, dA = 0$
- $\iint_D 1 \, dA = \text{area}(D) = \pi$

Svar: π .

≡ Exempel 2 - y-enkelt område

$$\iint_D xy^2 \, dA, \quad D : 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

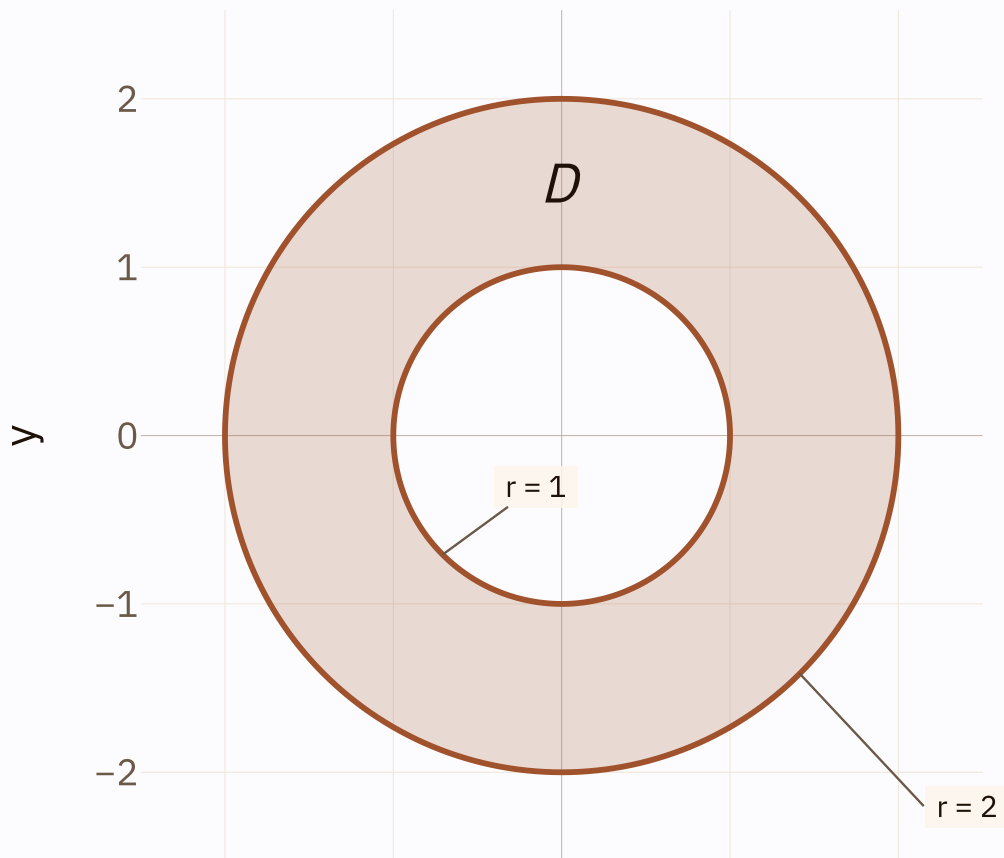


Lös som itererad integral (inre i y): $\int_0^1 \int_0^x xy^2 \, dy \, dx = \int_0^1 x \cdot \frac{y^3}{3} \, dx = \int_0^1 \frac{x^4}{3} \, dx = \frac{1}{15}$

Exempel 3

$$\iint \sin(x) + 1 dA, \quad D : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Villkoret säger att distansen till $(0, 0)$ är mellan 1 och 2 Bild på Domänet:



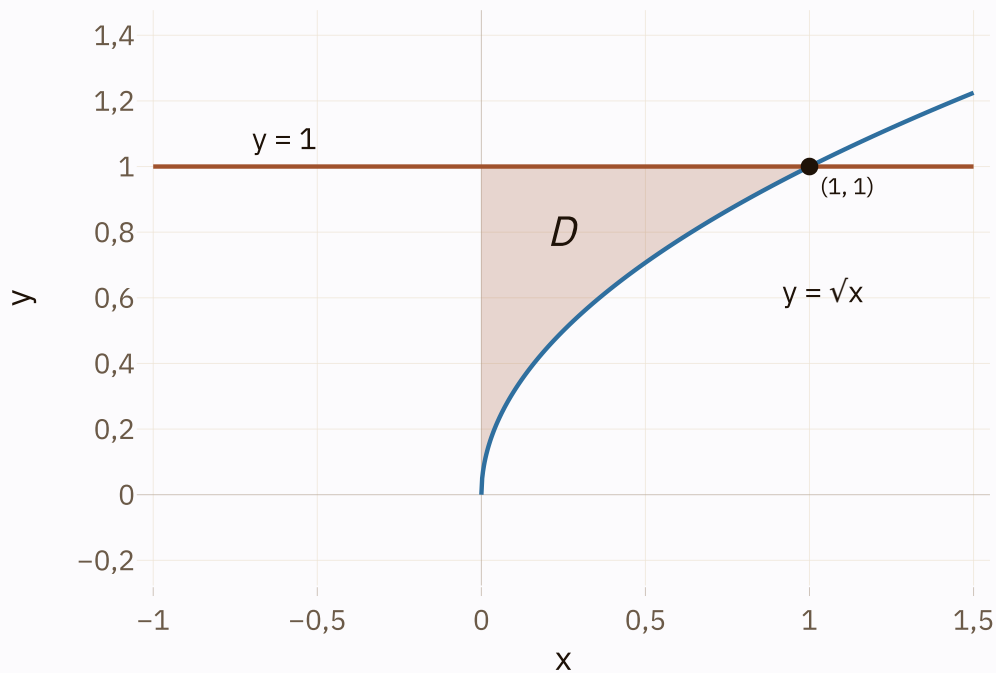
$$\text{Area}(D) = \pi(2)^2 - \pi(1)^2 = 3\pi$$

Exempel 4

Hitta volymen under grafen för

$$f(x, y) = e^{y^3} \quad x - y \text{ planet för } x \geq 0 \text{ och } \sqrt{x} \leq y \leq 1$$

Domänet är arean mellan villkoren



integrera

$$\iint_D e^{y^3} dA = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy \quad dx$$

$$= \int_0^1 [\dots] = \text{Kan inte uttrycka}$$

Det går inte att lösa uppgiften genom att gå från vänster till höger och integrera. Vi testar att gå nedifrån och upp

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3} dx \quad dy = \int_0^1 e^{y^3} \int_0^{y^2} dx dy = \int_0^1 [xe^{y^3}]_{x=0}^{x=y^2} dy = \dots = \frac{1}{3}(e - 1)$$

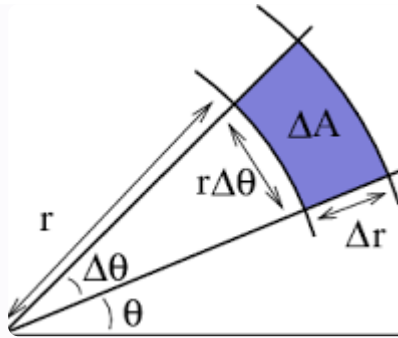
≡ Exempel 5 - Polära koordinater

$$D : \{1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \quad \iint_D x^2 + y^2 \quad dA = \iint_D r^2 dA$$

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 dA \quad dA = dx dy = \text{fungerar ej för polära integraler så vad ska vi använda istället?}$$

$$\Delta A \approx r \Delta \theta \Delta r \approx r \times dr \times d\theta$$

Bild visar varför vi använder $r \times dr \times d\theta$ istället för dA



6. Typiska användningar

- Volym under en yta
- Area av områden i planet
- Masscentrum och moment för plattor
- **Polära koordinater** när D är cirkulärt
- Sannolikhetstäthet i två variabler

Läsning

- [15.1 Double Integrals](#)
- [15.2 Iteration of Double Integrals](#)

Se även

- **Bestämd integral och Riemannsummor**
- **Variabelbyte i dubbelintegraler**
- **Trippelintegraler**
- **Integraler**

Resurser

- Adams & Essex, *Calculus*, kap. 15.1–15.3

Variabelbyte i dubbelintegraler

19 okt. 2026, 11 min läsning

GRANSKAD

#matematik #flervariabelanalys #integral

Kurs: M0068M Förkunskaper: Dubbelintegraler, Kryssprodukt

1. Idén bakom variabelbytet

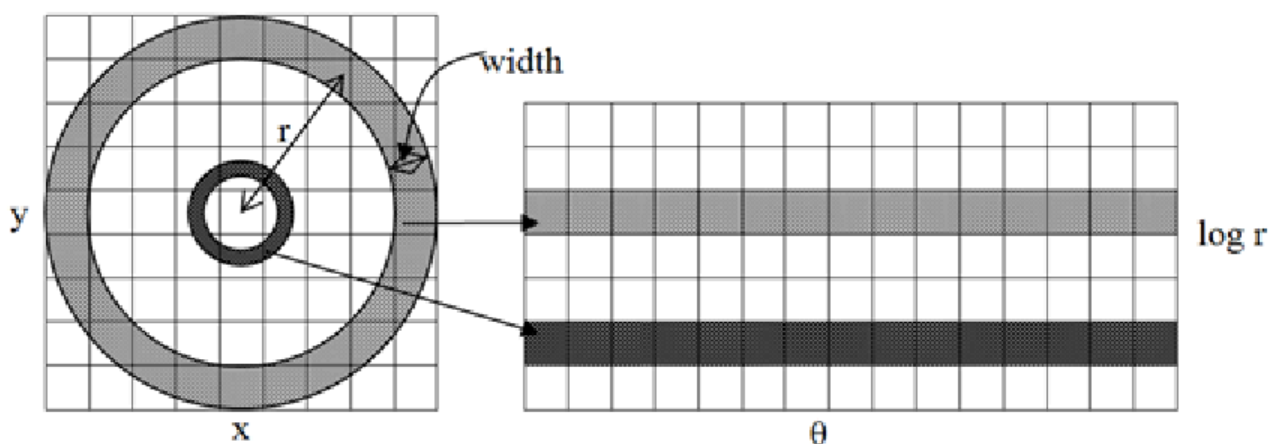
En dubbelintegral

$$\iint_D f(x,y) dA$$

kan vara obekvämt att beräkna direkt om antingen *integranden* f eller *området* D uttrycker sig dåligt i kartesiska koordinater (x,y) . Variabelbytet handlar om att hitta nya koordinater (u,v) där problemet blir geometriskt enklare - ofta så att D blir en *rektangel* i de nya koordinaterna och så att integranden tar en kortare form.

Grundtanken

Vi byter koordinatsystem för att få en bättre geometri. En cirkulär ring i (x,y) -planet blir t.ex. en *rektangel* i (r,θ) -planet — och rektanglar är mycket lättare att integrera över.



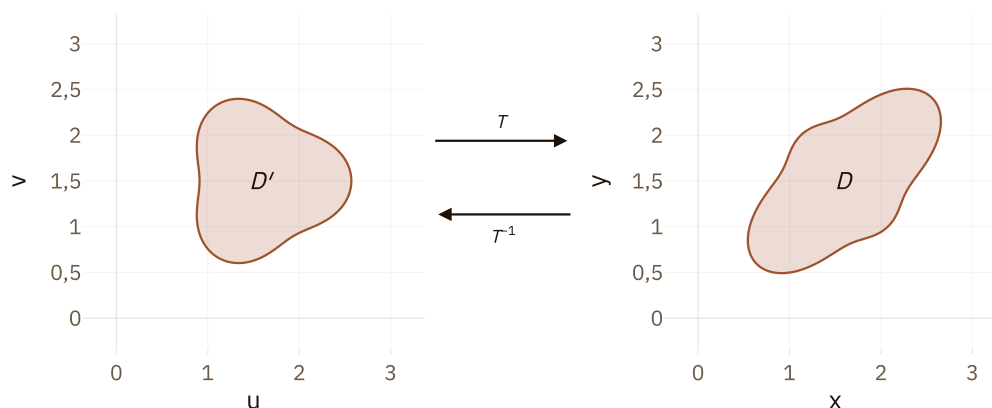
Pris för bytet: areaelementet dA förvrids när vi byter koordinater. Ett litet rektangelement $du dv$ i (u,v) -planet motsvarar i regel *inte* ett lika stort $dx dy$ i (x,y) -planet. Den lokala skalfaktorn ges av **Jacobianens determinant**, som vi härleder nedan.

2. Transformationen T

Ett variabelbyte beskrivs av en avbildning

$$T : (u, v) \mapsto (x, y), \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

som kartlägger ett område D' i (u, v) -planet bijektivt på D i (x, y) -planet.



Pilarna visar hur T mappar D' framåt på D och hur inversen T^{-1} mappar tillbaka. Tanken är *inte* att T ska vara enkel — den får gärna förvrida saker — utan att D' ska ha en *enkelt parametriserbar form* (oftast en rektangel).

För att substitutionsformeln ska gälla kräver vi att T är

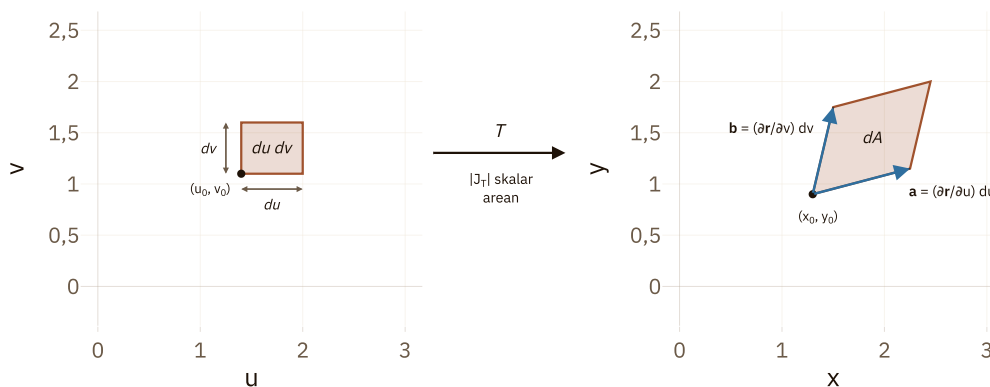
- **bijektiv** (entydigt inverterbar) på det inre av D' ,
- **kontinuerligt deriverbar** (C^1),
- har **icke-singulär** Jacobian, dvs. $\det J_T \neq 0$.

Note

Att T får misslyckas med kraven på en mängd med *area noll* är vad som tillåter polära koordinater (där origo är degenererat — alla θ ger samma punkt) och flera andra standardbyten.

3. Härledning av areaelementet

Vi vill veta hur en liten rektangel med sidor du och dv i (u, v) -planet blir när den avbildas till (x, y) -planet.



Bilden ovan är hela idén i en blink: en liten rektangel med sidorna du och dv i (u, v) -planet avbildas approximativt på en *parallelogram* i (x, y) -planet, vars sidor är tangentvektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$. Vår uppgift är att uttrycka parallelogrammets area i termer av du , dv och derivatorna av T .

Skriv positionsvektorn i kartesisiska koordinater som

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}.$$

Längs riktningen där bara u varierar (med $v = v_0$ fixt) ger en linjär approximation tangentvektorn

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du = \begin{pmatrix} \partial x / \partial u \\ \partial y / \partial u \end{pmatrix} du,$$

och längs riktningen där bara v varierar

$$\vec{b} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv = \begin{pmatrix} \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial v \end{pmatrix} dv.$$

Den lilla parallelogram som $\vec{a}$ och $\vec{b}$ spänner upp har arean given av **kryssprodukten**s belopp:

$$dA = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \det \begin{pmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \end{pmatrix} \right| du dv.$$

Determinanten i mitten kallas **Jacobianens determinant** för T :

$$J_T = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Tolkning av $|J_T|$

$|J_T(u_0, v_0)|$ är den *lokala arealförstärkningsfaktorn* — hur mycket en liten yta i (u, v) -planet blåses upp eller krymper när den avbildas till (x, y) -planet vid punkten (u_0, v_0) .

- $|J_T| = 1$: bytet är *areabevarande* lokalt.
- $|J_T| > 1$: ytan blåses upp.
- $|J_T| < 1$: ytan krymper.

4. Substitutionsformeln

Med ovanstående resultat blir den fullständiga formeln:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J_T| du dv$$

Lägg märke till tre saker:

1. **Områdets ändras:** integralen i högerled går över D' , inte D .
2. **Integranden uttrycks i nya variabler:** $f(x(u, v), y(u, v))$.
3. **Areaelementet bär en faktor:** $|J_T| du dv$ ersätter dA .

Glöm inte absolutbeloppet

Det är *absolutbeloppet* $|J_T|$ som ska användas — areor är alltid positiva, oavsett hur transformationen orienterar planet. Tecknet på J_T säger något om *orientering*, inte om area.

5. Polära koordinater

Det vanligaste variabelbytet i kursen är **polära koordinater**:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

med $r \geq 0$ och $\theta \in [0, 2\pi)$. Se **Polära koordinater** för bakgrund.

Jacobianens determinant blir

$$J_T = \det \begin{pmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \theta \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \theta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r,$$

så

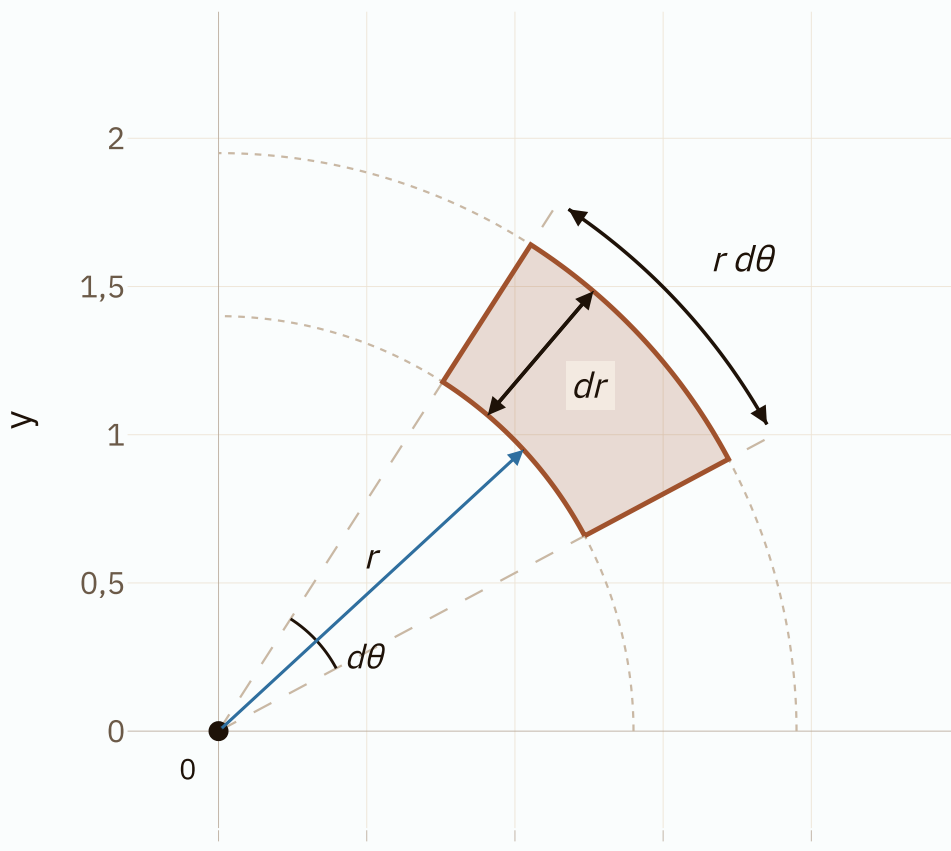
$$dA = r dr d\theta$$

Geometrisk bild av faktorn r

Ett litet “polart rektangelement” är en *cirkelsektor* med inre radie r , tjocklek dr och vinkelbredd $d\theta$. Sektorns båglängd är $r d\theta$, så arean blir

$$\Delta A \approx \underbrace{r d\theta}_{\text{båglängd}} \cdot \underbrace{dr}_{\text{tjocklek}} = r dr d\theta.$$

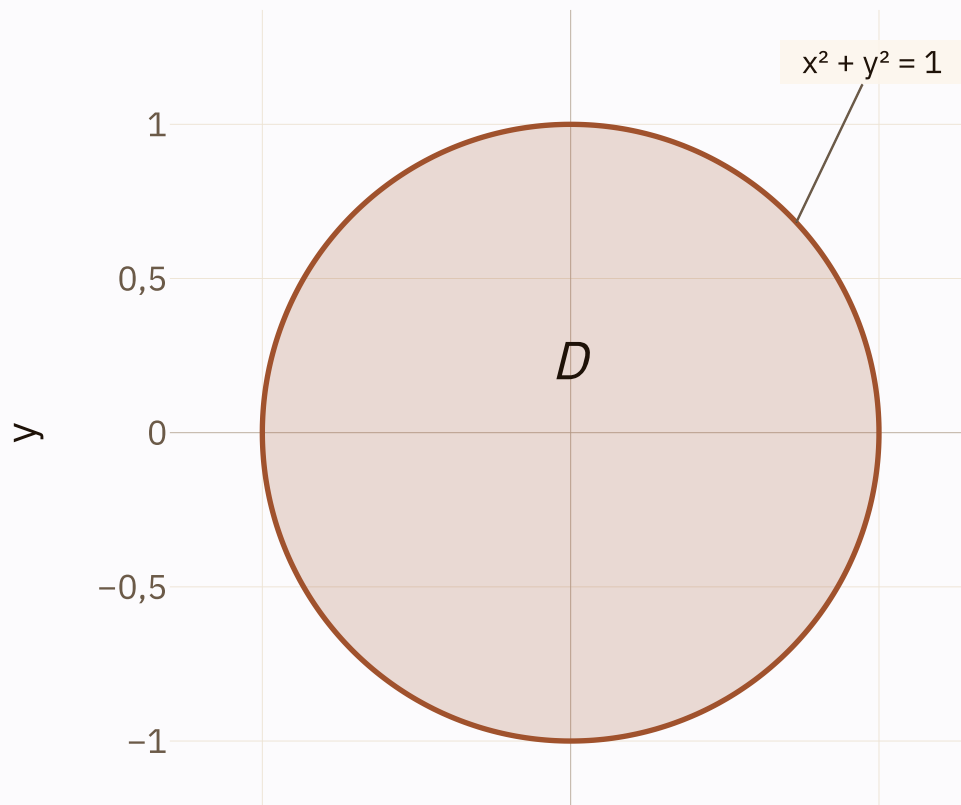
Faktorn r kompenserar alltså för att sektorerna är *större* längre ut från origo.



≡ Exempel 1 – integral över enhetsskivan

Beräkna

$$\iint_D (x^2 + y^2) dA, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

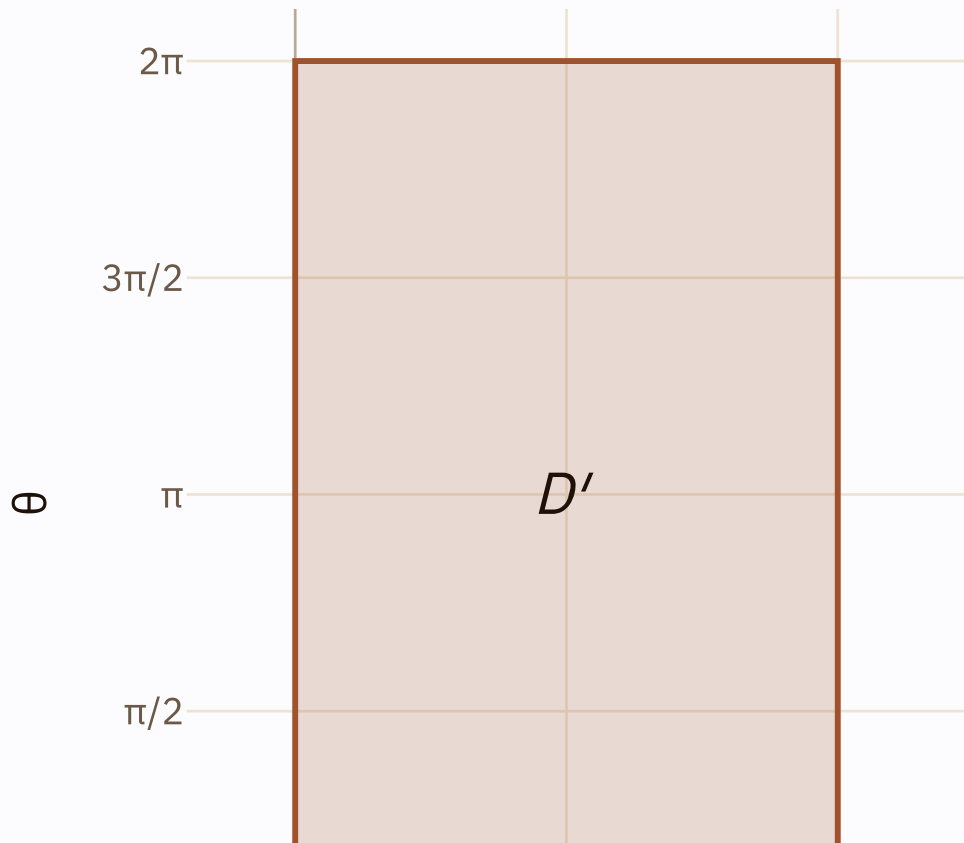


Varför polärt? Både området (en cirkulär skiva) och integranden $(x^2 + y^2)$ är *rotationssymmetriska kring origo*. Det är textboksexemplet på när polära koordinater är rätt val – i kartesiska koordinater måste man kämpa med rotgränser av typen $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, medan polärt blir det en ren rektangel.

Områdesöversättning. Bytet $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ avbildar

$$D' = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

bijektivt på D (utom i origo, en mängd med area noll, vilket är tillåtet).



Integranden i nya variabler. Pythagoras ger direkt

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2.$$

Jacobianen. Vi vet sedan tidigare att $|J_T| = r$, så $dA = r \, dr \, d\theta$.

Räkningen.

$$\iint_D (x^2 + y^2) \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 r^3 \, dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

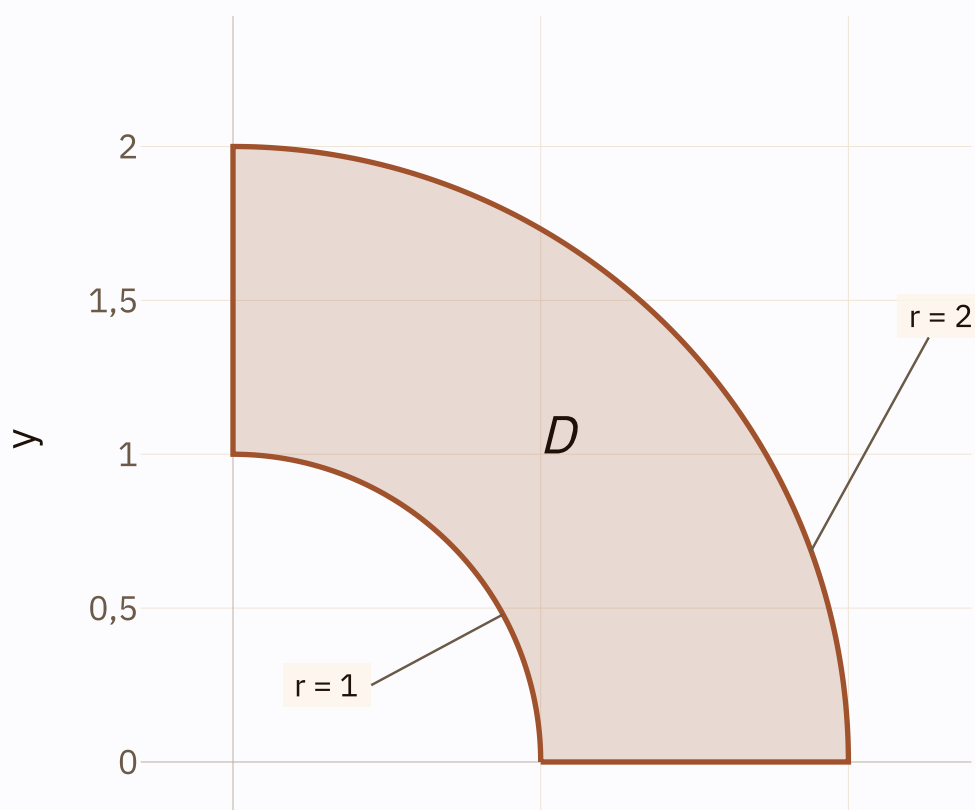
Lägg märke till hur den itererade integralen *separerar* helt — det är möjligt eftersom både integranden och områdesgränserna i (r, θ) har produktstruktur ($r^3 \cdot 1$ över $[0, 1] \times [0, 2\pi]$).

Rimlighetskontroll. Skivan har arean π , och r^2 ligger mellan 0 (i origo) och 1 (på randen). Medelvärdet av r^2 över skivan blir därför $(\pi/2)/\pi = 1/2$, vilket är ett rimligt mellanvärde.

Exempel 2 – kvartsring (och varför Jacobianen r "stämmer")

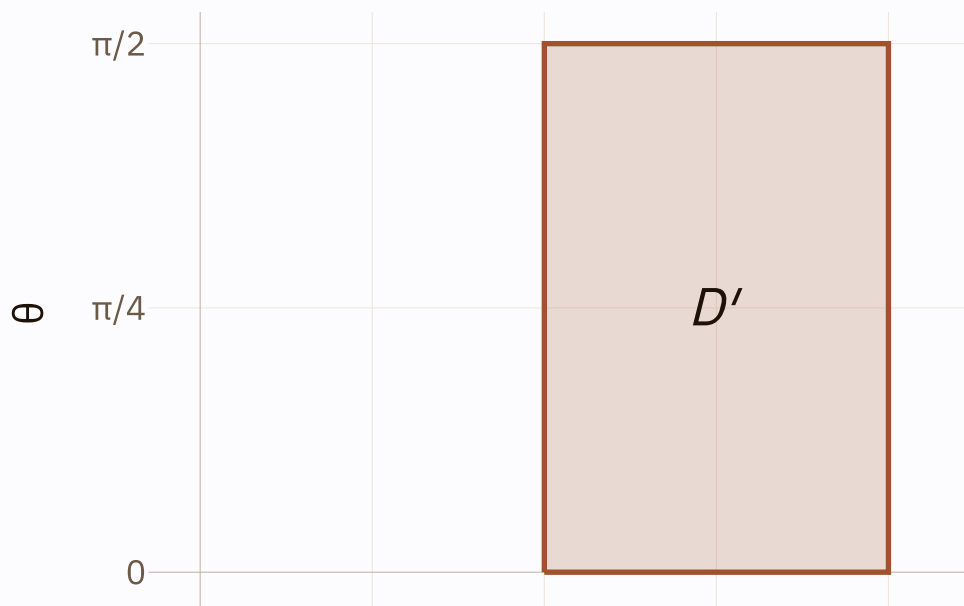
Beräkna arean av kvartsringen

$$D = \{(x, y) : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$



Områdesöversättning. I polära koordinater blir randvillkoren $1 \leq r \leq 2$ för radien och $0 \leq \theta \leq \pi/2$ för vinkeln (första kvadranten). Det rörmiga "ringbandet i första kvadranten" blir alltså rektangeln

$$D' = [1, 2] \times [0, \pi/2].$$



Räkningen.

$$\iint_D 1 \, dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 1 \cdot r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{2} = \boxed{\frac{3\pi}{4}}.$$

Rimlighetskontroll (och en intuitionsbyggare). Geometrin ger oss arean direkt: en *hel* ring mellan radie 1 och 2 har area $\pi(2^2 - 1^2) = 3\pi$, och en *kvarts*ring blir $3\pi/4$. Stämmer.

 **Vad händer utan faktorn r ?**

Om vi (felaktigt) glömde Jacobianen och skrev $\int_0^{\pi/2} \int_1^2 dr \, d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$. Det är *fel storleksordning* — vi saknar precis den r -vägning som kompenserar för att den yttre delen av ringen är “fysiskt större” än den inre.

Exempel 3 — Gaussintegralen

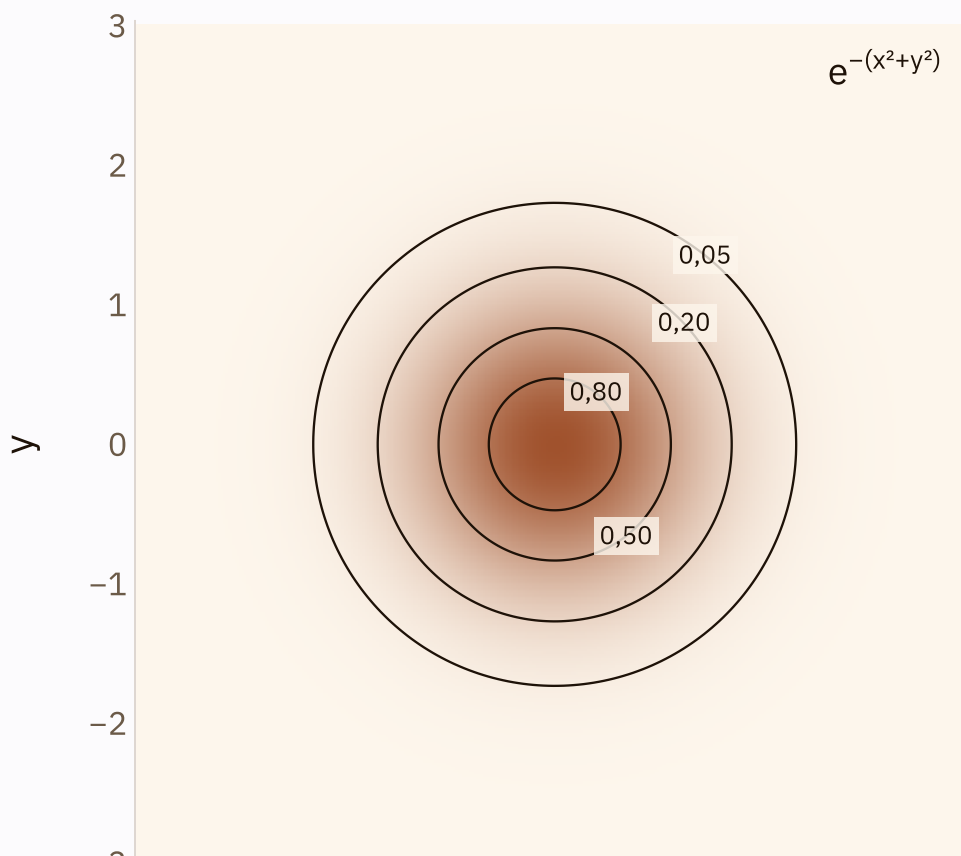
Visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

Detta är ett av de mest kända resultaten i analys, och variabelbyte i 2D är tricket som *måste* användas — den kartesiska enkelintegralen har ingen elementär primitiv.

Tricket. Sätt $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ och betrakta I^2 som en dubbelintegral genom att kalla den andra integrationsvariabeln y :

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA.$$



Varför polärt? Integranden $e^{-(x^2+y^2)}$ är rotationssymmetrisk (nivåkurvorna är cirklar, se figuren), och området är hela planet — *precis* den situation där polärt vinner. I polära koordinater blir

$$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2},$$

och $\mathbb{R}^2$ avbildas på $D' = \{0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Räkningen. Med $dA = r dr d\theta$:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr \, d\theta.$$

Inre integralen löses med substitutionen $s = r^2$, $ds = 2r \, dr$:

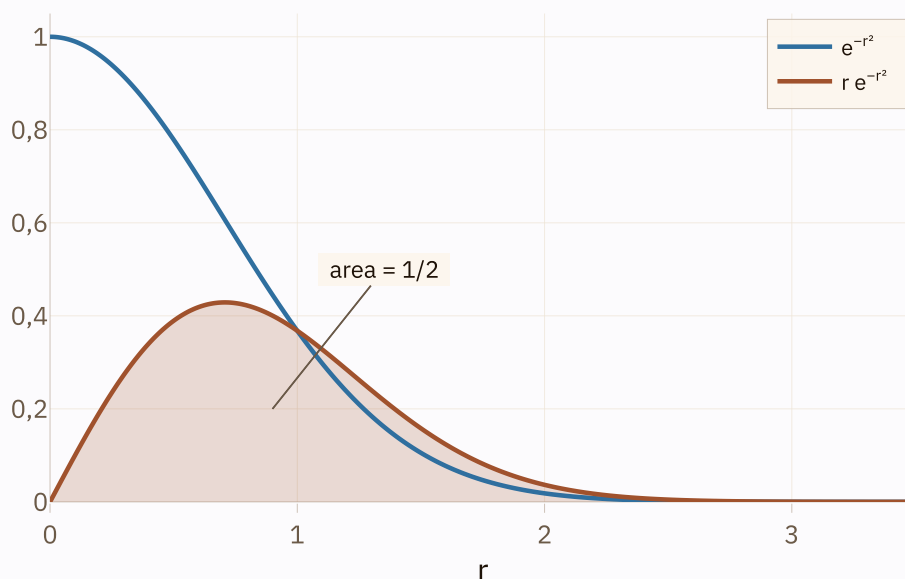
$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-s} \, ds = \frac{1}{2}.$$

Yttre integralen ger faktorn 2π , så

$$I^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi \implies I = \boxed{\sqrt{\pi}}.$$

🔗 Vad är det egentligen som händer?

Faktorn r i Jacobianen är vad som gör $r \, dr$ -delen integrerbar mot e^{-r^2} — utan den hade vi haft $\int e^{-r^2} \, dr$, som *inte* har elementär primitiv. Bytet förvandlar alltså en olöslig integral till en lösbar genom att lägga till exakt rätt vikt.

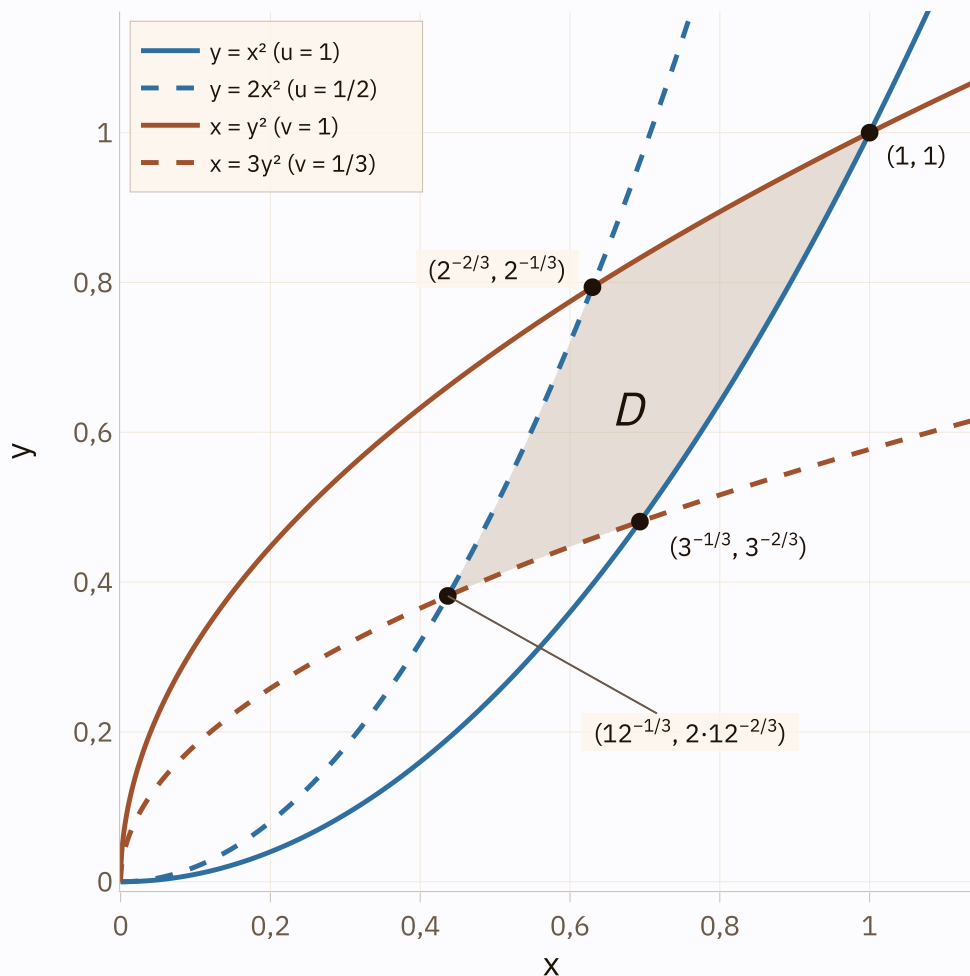


Figuren ovan visar de två integranderna sida vid sida: den blekare e^{-r^2} saknar primitiv, men den mörkare $r e^{-r^2}$ (vägd av Jacobianen) har precis arean $1/2$ — vilket är vad som ger Gaussintegralen.

≡ Exempel 4 — area mellan fyra parabol

Beräkna arean av området D i första kvadranten som begränsas av de fyra parabolerna

$$y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad x = y^2, \quad x = 3y^2.$$



I (x, y) -planet är området buktigt och saknar enkel beskrivning som "y mellan något och något". Men kurvorna kan skrivas om som *nivåkurvor*:

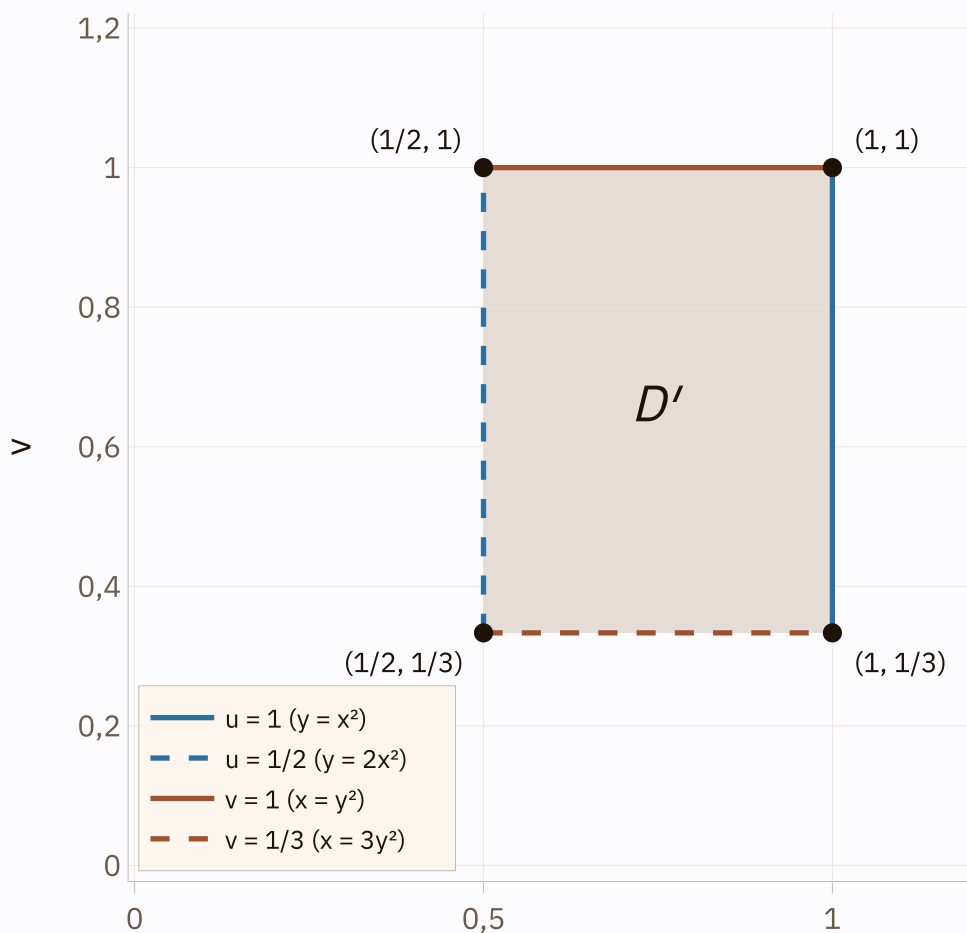
Kurva	Skriv som
$y = x^2$	$x^2/y = 1$
$y = 2x^2$	$x^2/y = 1/2$
$x = y^2$	$y^2/x = 1$
$x = 3y^2$	$y^2/x = 1/3$

Det motiverar variabelbytet

$$u = \frac{x^2}{y}, \quad v = \frac{y^2}{x}.$$

Med detta byte blir området en *rektangel*:

$$D' = \{(u, v) : \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \frac{1}{3} \leq v \leq 1\}.$$



Jacobianen via inversen. Att lösa ut x och y explicit ur u och v är trixigt, men vi behöver inte göra det. Räkna istället den "inversa" Jacobianen

$$J_{T^{-1}} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{pmatrix}.$$

Determinanten ger

$$J_{T^{-1}} = \frac{2x}{y} \cdot \frac{2y}{x} - \left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) = 4 - 1 = 3.$$

Eftersom Jacobianer för T och T^{-1} är inverser av varandra blir

$$J_T = \frac{1}{J_{T^{-1}}} = \frac{1}{3}, \quad |J_T| = \frac{1}{3}.$$

Snabbtricket

När bytet ges *implicit* ($u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$) är det nästan alltid lättare att räkna det $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ direkt och *invertera* till slut. Det är samma trick som i Exempel 4 ovan.

Integralen. Arealen blir

$$\text{area}(D) = \iint_D 1 \, dA = \iint_{D'} 1 \cdot |J_T| \, du \, dv = \frac{1}{3} \int_{1/3}^1 \int_{1/2}^1 du \, dv.$$

Den inre integralen ger $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, och den yttre $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, så

$$\text{area}(D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{9}}.$$

Rimlighetskontroll: området ligger inneslutet i kvadraten $[0, 1] \times [0, 1]$, och $\frac{1}{9} \approx 0,11$ är en plausibel andel — bilden ovan stämmer med den uppskattningen.

6. Generaliserade polära koordinater (ellips)

För en ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ använder man

$$x = a r \cos \theta, \quad y = b r \sin \theta,$$

vilket ger

$$J_T = \det \begin{pmatrix} a \cos \theta & -a r \sin \theta \\ b \sin \theta & b r \cos \theta \end{pmatrix} = a b r,$$

så

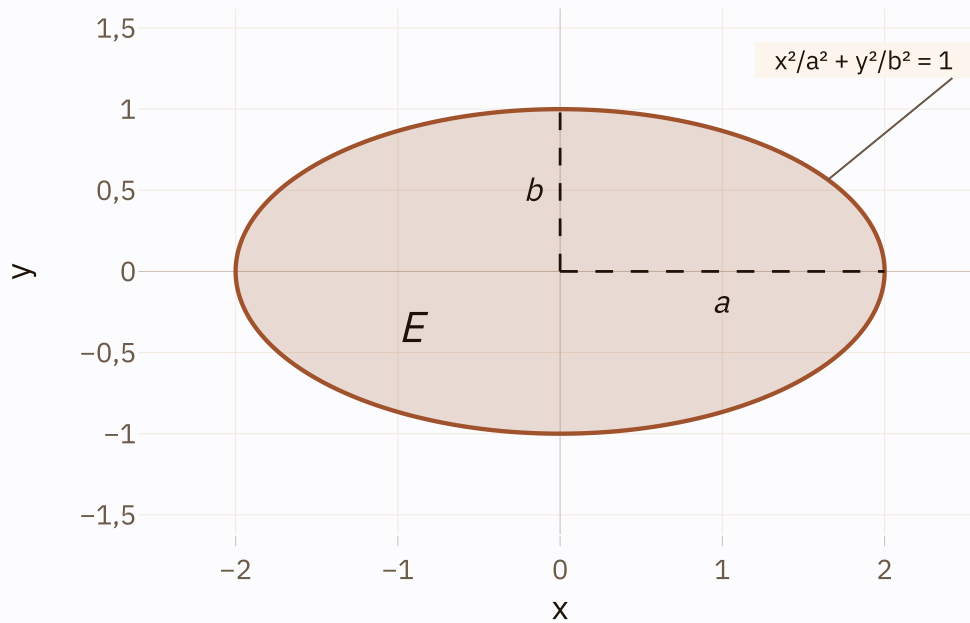
$$\boxed{dA = a b r \, dr \, d\theta}$$

Området $D' = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ är då en *enhetsskiva* i (r, θ) -planet — typiskt mycket enklare än ellipsen.

Exempel 5 — arean av en ellips

Beräkna arean av ellipsen

$$E = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}, \quad a, b > 0.$$

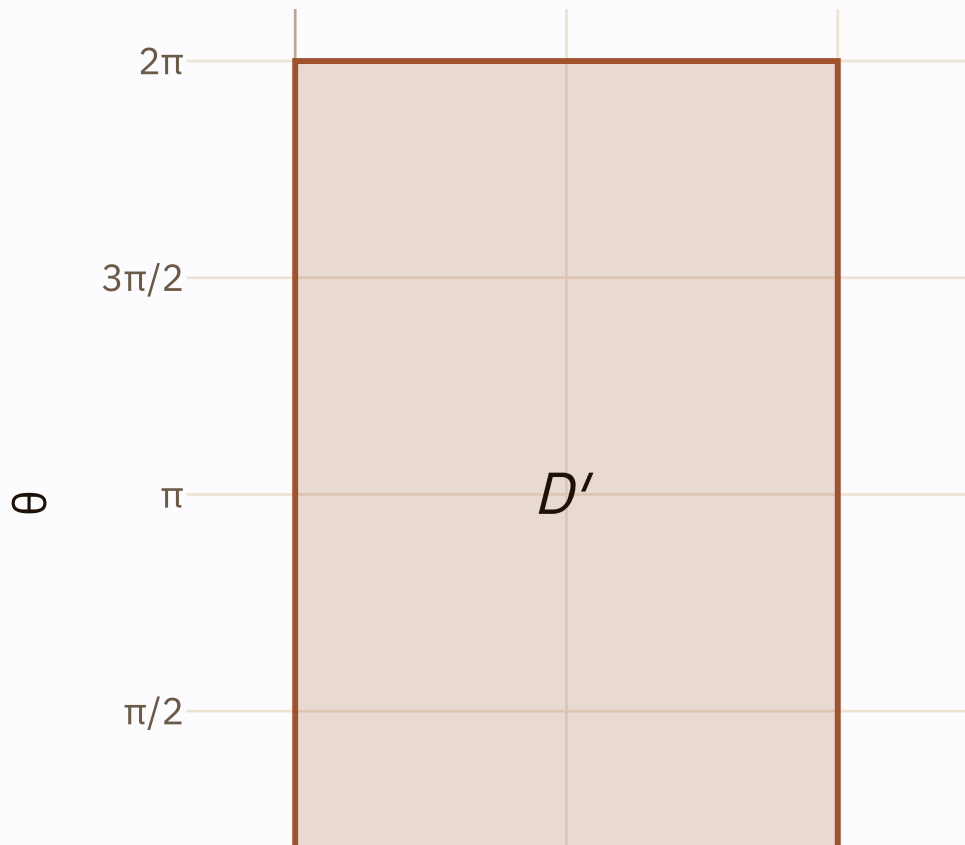


Varför generaliserat polärt? Ellipsen är inte rotationssymmetrisk, men den är vad som kallas *affint ekvivalent* med en cirkel: en skalning med faktor a längs x -axeln och b längs y -axeln gör om enhetscirkeln till just E . Det är precis vad bytet $x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$ gör.

Områdesöversättning. Sätt in i ellipsens ekvation:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2,$$

så $r^2 \leq 1$, dvs. $0 \leq r \leq 1$. Området blir alltså enhetsskivan $D' = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ i (r, θ) -planet.



Räkningen. Med $dA = ab r dr d\theta$ (härlett ovan):

$$\iint_E 1 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 ab r dr d\theta = ab \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\pi ab}.$$

Rimlighetskontroll.

- $a = b = 1$: $\pi \cdot 1 \cdot 1 = \pi$ – enhetscirkelns area. Stämmer.
- $a = b = R$: πR^2 – generell cirkel. Stämmer.
- Skalning: om vi dubblar a (gör ellipsen dubbelt så bred) ska arean dubblas. Och $\pi(2a)b = 2 \cdot \pi ab$. Stämmer.

Affin tolkning

Bytet $(x, y) = (ar \cos \theta, br \sin \theta)$ kan ses som *först* polära koordinater på enhetsskivan, *sedan* en linjär skalning $\text{diag}(a, b)$. Jacobianen blir produkten av de två stegens Jacobianer: r från det polära steget gånger ab från skalningen, dvs. abr . Det är värt att hålla i bakhuvudet — många byten kan förstås som *kompositioner* av enklare byten.

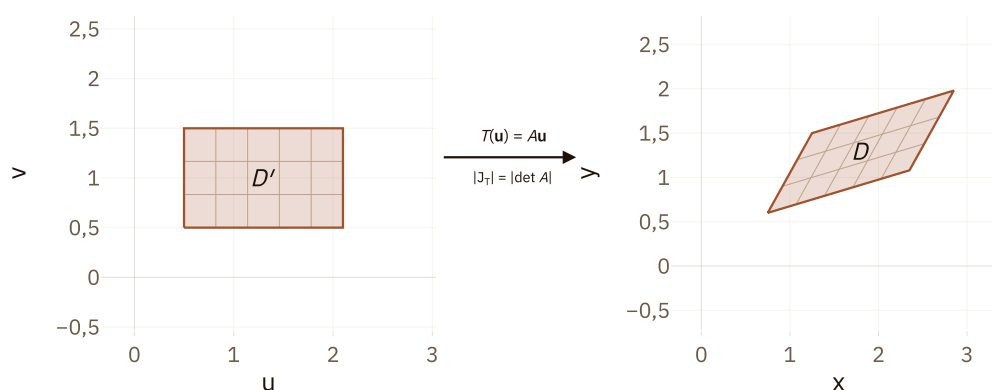
7. Andra användbara byten

Affina (linjära) byten

Om D är begränsad av räta linjer som inte är axelparallella kan ett *linjärt* byte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

förvandla D till en rektangel. Här är $J_T = \det A$, en *konstant* — den lokala skalfaktorn är samma överallt.



Ett affint byte deformerar alltså rektangeln likformigt: alla små rektanglar i D' blir parallelogram av samma form i D . Det är därför Jacobianen blir konstant och inte beror på position.

Sum- och differenssbyte

Bytet $u = x + y$, $v = x - y$ är vanligt när integranden eller området innehåller just de kombinationerna. Inversen är

$$x = \frac{u + v}{2}, \quad y = \frac{u - v}{2},$$

och

$$J_T = \det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}, \quad |J_T| = \frac{1}{2}.$$

Hyperboliska / produktbyten

Vid områden begränsade av kurvor som $xy = c$ kan $u = xy$, $v = y/x$ vara naturligt. Sådana byten kräver oftast lite arbete med Jacobianen — räkna noggrant.

Strategi för val av byte

Variabelbytet ska göra antingen *integranden* eller *området* enklare — gärna båda. Identifiera först områdets symmetri:

- Cirkulär symmetri $\Rightarrow$ polära koordinater.
- Elliptisk symmetri $\Rightarrow$ generaliserade polära.
- Begränsad av räta linjer $\Rightarrow$ affint byte.
- Integranden innehåller $x + y$, xy , y/x , etc. $\Rightarrow$ låt dessa kombinationer vara nya variabler.

8. Metodik – steg för steg

Hur man genomför ett variabelbyte

1. **Välj transformationen** $(x, y) = T(u, v)$ utifrån områdets symmetri eller integrandens form.
2. **Översätt området:** hitta D' i (u, v) -planet så att $T(D') = D$. Rita gärna båda områdena bredvid varandra.
3. **Beräkna Jacobianens determinant** J_T och ta absolutbeloppet $|J_T|$.
4. **Skriv om integranden** $f(x, y)$ i de nya variablerna: $f(x(u, v), y(u, v))$.
5. **Skriv ihop integralen** med $|J_T| du dv$ och beräkna den itererat över D' .
6. **Kontrollera:** jämför enheter, gör en rimlighetskontroll med en känd integral (t.ex. $\iint_D 1 dA = \text{area}(D)$).

Vanliga fallgropar

- Glömt att uppdatera *gränserna* till D' .
- Glömt $|J_T|$ — utan den blir resultatet fel storleksordning.
- Vid polära koordinater: tillåtit $r < 0$. Om man gör det kan man råka täcka planet två gånger.
- T inte injektiv på D' — kontrollera att inverteringen är entydig (utom på en mängd med area noll).

9. Sammanfattning

Den allmänna substitutionsformeln är

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D'} f(T(u, v)) |J_T(u, v)| \, du \, dv$$

med standardfallen sammanfattade i tabellen:

Byte	Formel	dA
Polärt	$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$	$r \, dr \, d\theta$
Generaliserat polärt	$x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$	$ab \, r \, dr \, d\theta$
Affint	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$	$ A \, du \, dv$
Sum/differens	$u = x + y, v = x - y$	$\frac{1}{2} \, du \, dv$

Läsning

- [15.4 Double Integrals in Polar Coordinates](#)
- [15.5 Triple Integrals](#) — för analogi i 3D

Se även

- [Dubbelintegraler](#)
- [Variabelbyte i trippelintegraler](#)
- [Variabelbyte i integraler](#)
- [Polära koordinater](#)
- [Kryssprodukt](#)
- [Kedjeregeln](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Determinanten](#) — tolkning av determinant som arealskala (Riktigt bra)
- [Khan Academy: Double integrals in polar](#)
- [Wikipedia: Integration by substitution \(multiple variables\)](#)

Trippelintegraler

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #integral

Kurs: M0068M Förkunskaper: Dubbelintegraler

1. Idén bakom trippelintegralen

En enkel integral summerar funktionsvärden längs en linje, en **dubbelintegral** längs ett område i planet, och en trippelintegral längs ett område i rummet. I varje steg är det *en dimension mer* för domänen, men funktionen f själv ändrar inte karaktär.

Grundtanken

Man summerar f 's värden i varje punkt i ett 3D-område och viktar med ett litet volymelement dV . Resultatet är en *skalär* — inte en bild i någon högre dimension.

Geometrisk tolkning

Geometriskt har vi kunnat tolka en enkel integral som en *area* och en dubbelintegral som en *volym*. Då borde en trippelintegral beskriva något i den fjärde dimensionen — något som är betydligt skummare att visualisera än de tidigare fallen. Därför föreslår Stephan McCormick ett alternativt sätt att se trippelintegralen.

Anledningen att integralen är en dimension högre än funktionen är att man summerar funktionsvärden i varje punkt och lyfter värdena som en egen dimension. Man ska fortfarande (om man kan) rita upp en bild för att föreställa sig domänen — *från vad till vad ska jag integrera?* Det hjälper också med valet av koordinatsystem.

Det är möjligt att beskriva en trippelintegral som en **hypervolym**, men det är sällan lämpligt.

2. Definition

Integralen av en funktion f över ett område $V \subset \mathbb{R}^3$ skrivs

$$\iiint_V f(x,y,z) dV$$

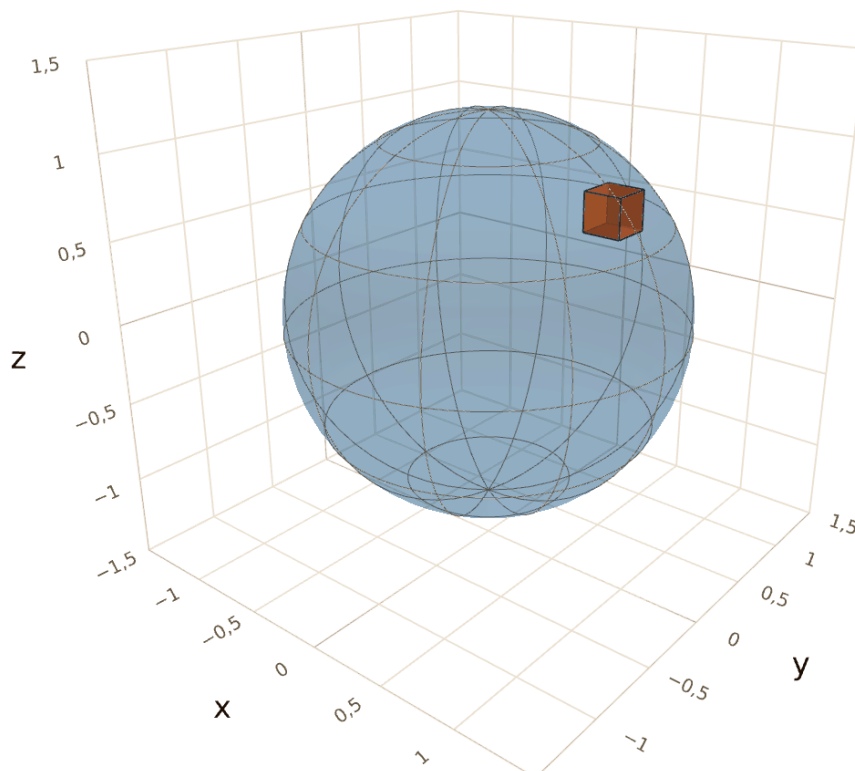
och tolkas som summan av f :s värden viktade med ett volymelement dV över hela V . I kartesiska koordinater är $dV = dx dy dz$.

Specialfall – volym

Med $f \equiv 1$ blir integralen *volymen* av V :

$$\text{vol}(V) = \iiint_V 1 dV.$$

-  område V
-  volymelement dV



3. Itererad integration (Fubini)

Om V kan beskrivas av nästlade gränser

$$a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \quad h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y),$$

ger Fubinis sats att integralen kan skrivas som tre itererade enkelintegraler:

$$\iiint_V f \, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z) \, dz \, dy \, dx.$$

🔄 Ordning får väljas

Vilken variabel som integreras *innerst* är fritt att välja — det är samma integral oavsett. Välj ordning så att gränserna blir så enkla som möjligt; ofta avgör områdets form vad som är lättast.

⚠ Vanlig fallgrop

När man byter integrationsordning måste alla gränser översättas — *både inre och yttre*. En blandning av gränser från två olika ordningar är en av de vanligaste felkällorna.

4. Vanliga koordinatsystem

För områden med rotations- eller sfärisk symmetri lönar sig nästan alltid ett variabelbyte (se [Variabelbyte i trippelintegraler](#)).

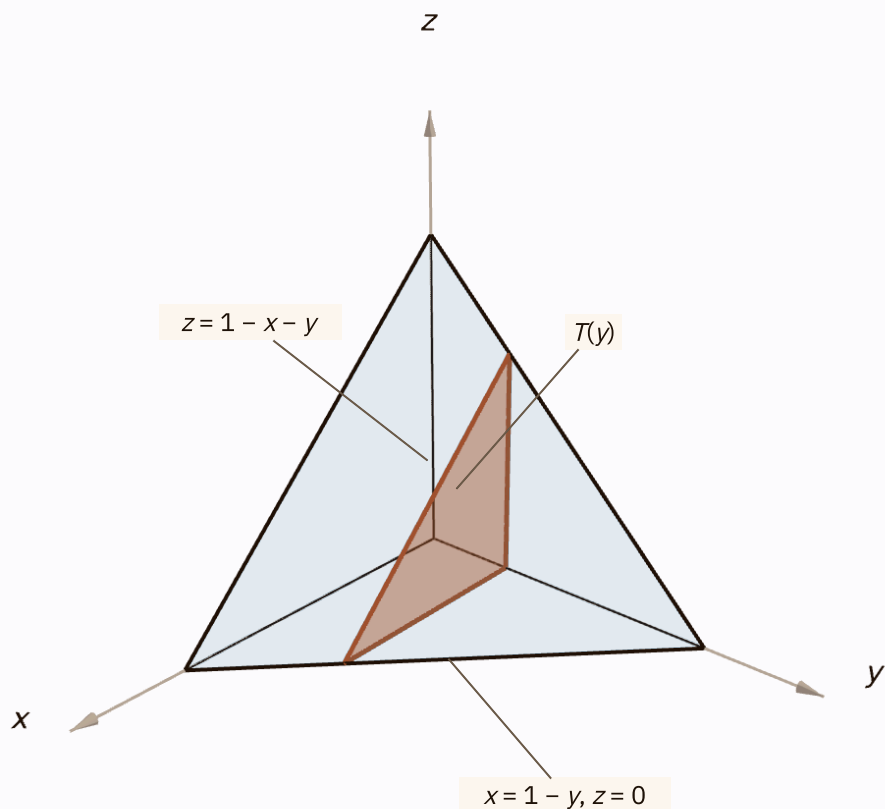
Koordinater	Variabler	Volymelement
Kartesiska	(x, y, z)	$dV = dx \, dy \, dz$
Cylindriska	(r, θ, z)	$dV = r \, dr \, d\theta \, dz$
Sfäriska	(ρ, ϕ, θ)	$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

5. Exempel

☰ Exempel 1 – tetraedern $x + y + z \leq 1$ i första oktanten

Området V begränsas av planet $x + y + z = 1$ och de tre koordinatplanen:

$$V : \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$



Samma område kan beskrivas med olika integrationsordningar. Två typiska val:

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} f \, dx \, dy \, dz$$

eller

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-x-z} f \, dy \, dx \, dz.$$

Sanity-check (volym). Med $f \equiv 1$:

$$\text{vol}(V) = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} (1-y-z) \, dy \, dz.$$

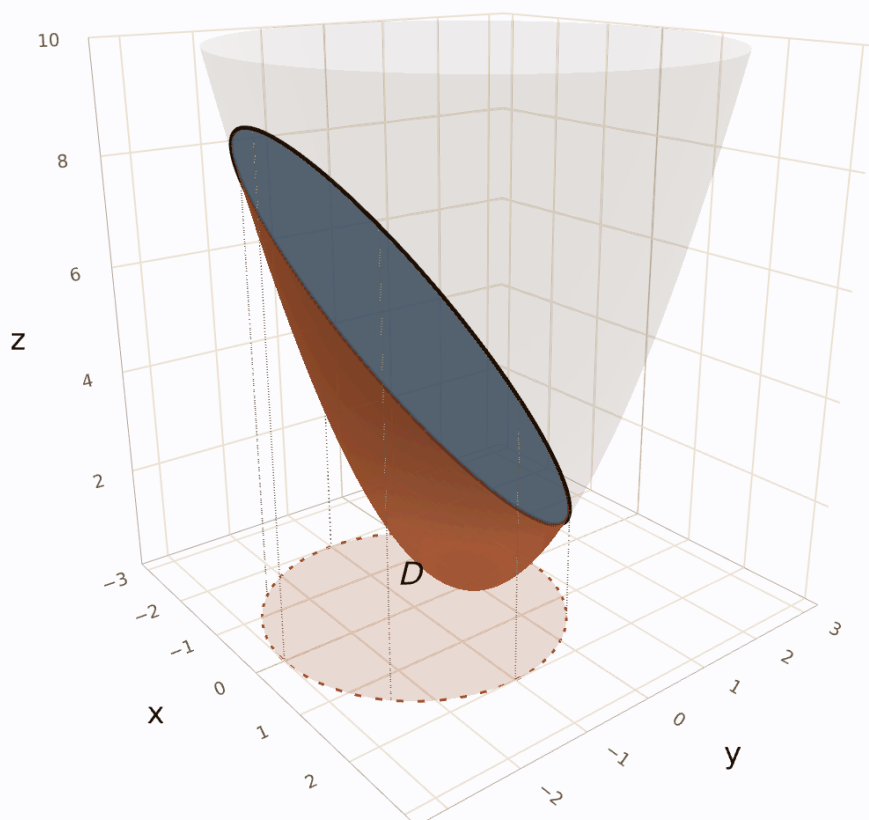
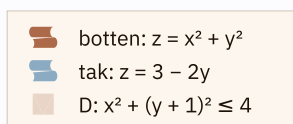
Den inre ger $[(1-z)y - \frac{1}{2}y^2]_0^{1-z} = \frac{1}{2}(1-z)^2$, och slutligen

$$\text{vol}(V) = \int_0^1 \frac{(1-z)^2}{2} \, dz = \frac{1}{6}.$$

Det stämmer med formeln för en tetraeder: $V = \frac{1}{6} \cdot \text{base} \cdot \text{height} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$.

Exempel 2 – volym mellan paraboloid och plan

Hitta volymen av området som ligger ovanför paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och under planet $z = 3 - 2y$.



Vilket är D_{xy} ? Skärningen ges av $3 - 2y = x^2 + y^2$, dvs.

$$x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \iff x^2 + (y + 1)^2 = 4.$$

Det är en cirkelskiva med radie 2 och centrum i $(0, -1)$. Kalla den D_{xy} .

Volymintegralen. Med z som inre variabel:

$$V = \iiint_V dV = \iint_{D_{xy}} \int_{x^2+y^2}^{3-2y} dz \, dA = \iint_{D_{xy}} (3 - 2y - x^2 - y^2) \, dA.$$

Skift och polärt. Sätt $u = x$, $v = y + 1$, vilket centrerar skivan i origo. Då blir

$$3 - 2y - x^2 - y^2 = 3 - 2(v - 1) - u^2 - (v - 1)^2 = 4 - u^2 - v^2,$$

och D_{xy} blir skivan $\{u^2 + v^2 \leq 4\}$. Polära koordinater $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$ ger

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r \, dr \, d\theta.$$

Inre integralen:

$$\int_0^2 (4r - r^3) \, dr = \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 8 - 4 = 4.$$

Alltså

$$V = 2\pi \cdot 4 = \boxed{8\pi}.$$

Rimlighetskontroll. Det maximala värdet av $z = 3 - 2y$ minus $z = x^2 + y^2$ uppstår i centrum av skivan ($u = v = 0$), där det blir 4, och avtar till 0 på randen. Volymen $8\pi \approx 25,1$ är samma som en cirkulär cylinder med radie 2 och höjd 2 – vilket är vad man förväntar sig av ett "halvfullt" lock över skivan.

6. Användning

- **Volym** av V – sätt $f = 1$.
- **Massa** av kropp med densitet $\rho(x, y, z)$: $m = \iiint_V \rho \, dV$.
- **Masscentrum** av kropp: $\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_V x \rho \, dV$, $\bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_V y \rho \, dV$, $\bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_V z \rho \, dV$.
- **Tröghetsmoment** kring en axel.
- **Sannolikheter** för 3D-fördelningar i statistik.

7. Metodik – steg för steg

Hur man räknar en trippelintegral

1. **Rita området.** Identifiera vilket koordinatsystem som passar (kartesiskt, cylindriskt, sfäriskt).
2. **Välj integrationsordning.** Inre variabel ska ha gränser som är enklast.
3. **Sätt upp gränserna.** Yttersta gränsen är konstanter; varje inre gräns får bero på de yttre variablerna.
4. **Beräkna inifrån och ut,** en enkelintegral i taget.
5. **Kontrollera.** Sätt $f = 1$ för en sanity-check mot kända volymformler.

Läsning

- [15.5 Triple Integrals](#)

Se även

- Dubbelintegraler
- Variabelbyte i trippelintegraler
- Hypervolym
- Masscentrum
- Masströghetsmoment

Resurser

- [Khan Academy: Triple integrals](#) 
 - [Wikipedia: Multiple integral](#) 
-

Variabelbyte i trippelintegraler

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #integral

Kurs: M0068M **Förkunskaper:** Trippelintegraler, Variabelbyte i dubbelintegraler, Jacobian i 2D

1. Idén – direkt analog till 2D

Variabelbytet i 3D är direkt analogt med 2D-fallet (se [Variabelbyte i dubbelintegraler](#)): det areaelement som vägdes med $|J_T|$ ersätts av ett *volymelement* som vägs med Jacobianens determinant i 3D.

Grundtanken

Ett område med rotations- eller sfärisk symmetri är obehagligt i kartesiska koordinater men *snällt* i polära/sfäriska. Bytet kostar ett `|J_T|`, men sparar enormt mycket gränssättning.

2. Allmän substitutionsformel

För en transformation $T : (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ som är bijektiv och C^1 med $\det J_T \neq 0$ gäller

$$\iiint_V f dV = \iiint_{V'} f(T(u, v, w)) |\det J_T| du dv dw$$

där

$$J_T = \det \begin{pmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v & \partial x / \partial w \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v & \partial y / \partial w \\ \partial z / \partial u & \partial z / \partial v & \partial z / \partial w \end{pmatrix}.$$

Strategi

Välj koordinater efter områdets symmetri: cylindersymmetri kring en axel ger cylindriska koordinater, sfärisk symmetri kring en punkt ger sfäriska.

3. Cylindriska koordinater

Polära koordinater i xy -planet, plus oförändrad z :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

med $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ och $z \in \mathbb{R}$. Jacobianen ärvs från det polära fallet (se [Variabelbyte i dubbelintegraler](#)) eftersom z -raden bidrar med en etta:

$$J_T = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r,$$

så

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz$$

≡ Exempel 1 – volym under paraboloid $z = x^2 + y^2$ inne i cylindern $x^2 + y^2 \leq 1$

Området är den del av rummet som ligger under paraboloiden, ovanför $z = 0$, och inom enhetscylindern.

I cylindriska: $x^2 + y^2 = r^2$, så paraboloiden blir $z = r^2$. Området är

$$V' : 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq r^2.$$

Räkningen.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cdot r^2 \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr \, d\theta.$$

Inre: $\int_0^1 r^3 \, dr = \frac{1}{4}$. Yttre: faktorn 2π . Alltså

$$V = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

Rimlighetskontroll. En cylinder med radie 1 och höjd 1 har volym $\pi \approx 3,14$; vårt område är en *halv* sådan cylinder (paraboloiden klipper bort hälften), och $\pi/2 \approx 1,57$ stämmer.

4. Sfäriska koordinater

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi,$$

med $\rho \geq 0$, $\phi \in [0, \pi]$ (polvinkel från +z-axeln) och $\theta \in [0, 2\pi)$ (azimutvinkel i xy-planet).

En direkt determinanträkning ger

$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Vinkelkonvention

ϕ mäts från positiva z-axeln (polvinkel), θ är azimutvinkeln i xy-planet. Vissa böcker byter rollerna på ϕ och θ – kontrollera alltid bokens definition innan formeln används.

Geometrisk bild av $\rho^2 \sin \phi$

Ett litet sfäriskt rektangelement har sidor:

- radiell: $d\rho$
- polär (cirkelbåge i meridian): $\rho \, d\phi$
- azimutal (cirkelbåge på en parallell): $\rho \sin \phi \, d\theta$

Volymen blir produkten: $d\rho \cdot \rho \, d\phi \cdot \rho \sin \phi \, d\theta = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$. Faktorn $\sin \phi$ kompenserar för att azimutalcirkelarna krymper mot polerna.

Exempel 2 – volymen av en boll med radie R

Bollen $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ blir i sfäriska

$$B' : 0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Med $f \equiv 1$:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Eftersom integranden separerar:

$$V = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin \phi d\phi}_{=2} \cdot \underbrace{\int_0^R \rho^2 d\rho}_{=R^3/3} = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Det är den välkända volymformeln. Variabelbytet ger den i tre rader.

≡ Exempel 3 – integral av z över halvbollen

Beräkna $\iiint_V z dV$ där V är den övre halvbollen $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

I sfäriska blir $z = \rho \cos \phi$, och övre halvan ger $0 \leq \phi \leq \pi/2$:

$$\iiint_V z dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$$

Separation:

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi d\phi \cdot \int_0^1 \rho^3 d\rho.$$

- $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$
- $\int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi d\phi = \left[\frac{1}{2} \sin^2 \phi\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$
- $\int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}.$

Alltså

$$\iiint_V z dV = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

Tolkning. Med massa $m = \frac{2}{3}\pi$ (halvbollens volym vid konstant densitet 1) blir $\bar{z} = \frac{\pi/4}{2\pi/3} = \frac{3}{8}$ – masscentrum för en halvboll med radie 1 ligger på höjd $3/8$, ett välkänt resultat.

5. Generaliserade sfäriska koordinater (ellipsoid)

För en ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

använder man

$$x = a\rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = b\rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = c\rho \cos \phi,$$

vilket ger Jacobianen $abc\rho^2 \sin \phi$, dvs.

$$dV = abc \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

≡ Exempel 4 – volymen av en ellipsoid

Med $f \equiv 1$ och $\rho \in [0, 1]$, $\phi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi)$:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 abc \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = abc \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{4}{3}\pi abc}.$$

Specialfallet $a = b = c = R$ ger $\frac{4}{3}\pi R^3$ – bollvolymen.

6. Sammanfattning

Byte	Formler	dV
Cylindriska	$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$	$r dr d\theta dz$
Sfäriska	$x = \rho \sin \phi \cos \theta, y = \rho \sin \phi \sin \theta, z = \rho \cos \phi$	$\rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$
Generaliserade sfäriska	$x = a\rho \sin \phi \cos \theta$ etc.	$abc \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$

🔗 Strategin på en rad

Cylindersymmetri kring en axel $\Rightarrow$ cylindriska. Sfärisk symmetri kring en punkt $\Rightarrow$ sfäriska. Ellipsoid $\Rightarrow$ skala först, sfäriska sedan.

Läsning

- 15.6 Change of Variables in Triple Integrals
- Sfäriska koordinater
- Cylinderkoordinater

Se även

- Trippelintegraler

- Variabelbyte i dubbelintegraler
- Polära koordinater
- Dubbelintegraler

Resurser

- [Khan Academy: Triple integrals in spherical coordinates](#) 
 - [Wikipedia: Spherical coordinate system](#) 
-

Vektorfält

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #vektoranalys

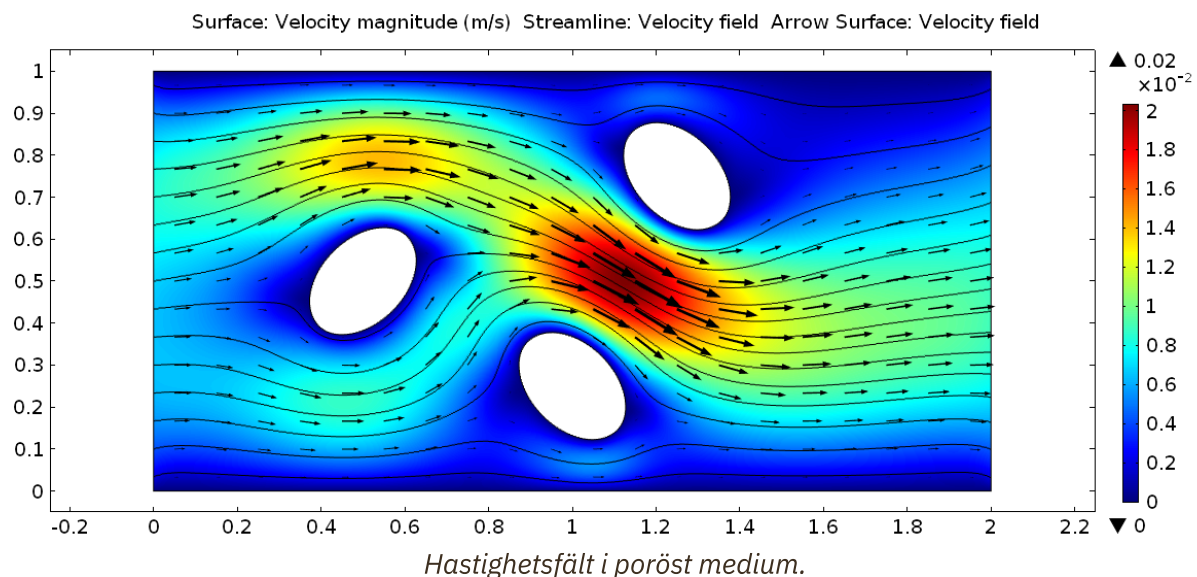
Kurs: M0068M Förkunskaper: Funktioner av flera variabler

1. Idén bakom ett vektorfält

En vanlig funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ger ett *tal* i varje punkt — ett skalärfält. Ett vektorfält gör samma sak, men ger en *vektor* i varje punkt.

Grundtanken

Föreställ dig en vätska i rörelse: i varje punkt har vattnet en hastighetsvektor. Det är ett vektorfält. På samma sätt har gravitationen, elektriska fält och magnetfält en *riktning och styrka* i varje punkt — alla är vektorfält.



2. Definition

Ett **vektorfält** är en avbildning som tilldelar varje punkt i rummet en vektor:

$$\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)),$$

eller i 3D

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Notation

Vi skriver $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ eller $\vec{F} = (P, Q, R)$ omväxlande. Komponenterna P, Q, R är vanliga skalärfunktioner.

 **Exempel – fältet** $\vec{F}(x, y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}.$$

För att veta vart en “partikel” i $(1, 0)$ skulle röra sig stoppar man bara in punkten:

$$\vec{F}(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektorn pekar uppåt. Räknar man fler punkter syns att fältet roterar motsols kring origo med växande styrka mot kanten.

Typiska exempelfält

- Hastighetsfält i en vätska.
- Kraftfält (**gravitation**, elektriskt).
- **Gradienten** ∇f av en skalärfunktion.

3. Integralkurvor – kurva som följer fältet

En naturlig fråga är: vilken kurva $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ har $\vec{F}$ som tangent i varje punkt? Vi kräver

$$\vec{r}'(t) = \lambda(t) \vec{F}(\vec{r}(t)).$$

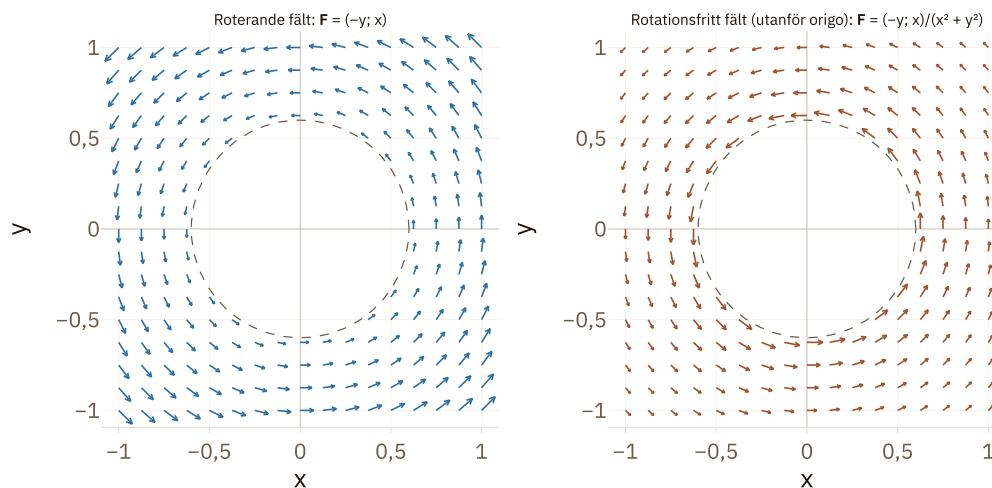
Med $\vec{F} = (F_1, F_2)$ ger detta

$$\frac{dx}{dt} = \lambda F_1, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda F_2,$$

och genom att dela ekvationerna elimineras parametern:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_2}{F_1} \iff \int F_1 dy = \int F_2 dx.$$

För exemplet $\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$ ger detta cirkulära flödeslinjer kring origo (radien bevaras), vilket stämmer med bilden av en stelkroppsrotation.



Vektorfält med synliga flödeslinjer.

4. Konservativa fält och skalär potential

Definition

$\vec{F}$ kallas **konservativt** om det finns en skalärfunktion ϕ – en *potential* – så att

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi.$$

ϕ är en sorts “primitiv” till $\vec{F}$; den bestäms upp till en konstant.

Konsekvens – vägoberoende

För ett konservativt fält gäller

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a)),$$

dvs. **kurvintegralen** beror bara på *ändpunkterna*, inte på vägen. Som specialfall blir $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ längs varje sluten kurva.

≡ Exempel – hitta potential till $\vec{F} = (y, x, z^2)$

Vi söker ϕ så att $\vec{\nabla}\phi = \vec{F} = \begin{bmatrix} y \\ x \\ z^2 \end{bmatrix}$. Det ger systemet

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= y &\implies \phi &= xy + C(y, z), \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= x &\implies \phi &= xy + D(x, z), \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= z^2 &\implies \phi &= \frac{1}{3}z^3 + E(x, y). \end{aligned}$$

Sammanfogning ger

$$\boxed{\phi = xy + \frac{1}{3}z^3} \text{ (+ konstant).}$$

Konstanten i första raden skrivs $C(y, z)$ eftersom den får bero på de variabler som inte deriverats; dessa beroenden hittas när de övriga ekvationerna används.

Kontroll: $\vec{\nabla}\phi = (y, x, z^2) = \vec{F}$. Stämmer.

5. Test för konservativitet

För ett 2D-fält $\vec{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j}$ med $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$ måste blandade andraderivator av ϕ stämma:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

💧 Nödvändigt villkor

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}}$$

Om likheten *inte* gäller är $\vec{F}$ inte konservativt. För 3D kontrolleras alla tre permutationer; det räcker att hitta ett par som inte stämmer för att utesluta konservativitet.

⚠️ Nödvändigt – inte alltid tillräckligt

Villkoret är *nödvändigt*, men för områden med hål (t.ex. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) räcker det inte. Se virvelfältet i [Greens sats](#) – där gäller villkoret men fältet är ändå inte konservativt globalt.

≡ Exempel – visa att $\vec{F} = e^{x^2y}\hat{i} + 2y\hat{j} + z^2\hat{k}$ inte är konservativt

Antag motsatsen, dvs. $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$ för något ϕ . Då måste blandade andraderivator stämma, t.ex.

- $\frac{\partial F_1}{\partial y} = x^2 e^{x^2y},$
- $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0.$

Eftersom dessa inte är lika är $\vec{F}$ inte konservativt. Det spelar ingen roll vilket par av komponenter man jämför – välj det par som ser enklast ut.

6. När fältet är "nästan" konservativt

Inte alla fält är konservativa, men ett fält kan ofta delas upp som

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi + \vec{G}$$

där $\vec{\nabla}\phi$ är den konservativa delen och $\vec{G}$ är resten. Den konservativa delen ger noll kring slutna kurvor, så bara $\vec{G}$ -delen behöver beräknas direkt.

≡ Exempel – Stephans "weird example"

Beräkna

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad C : 4x^2 + y^2 = 4, \text{ motsols,}$$

där

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} e^x \sin y + 3y \\ e^x \cos y + 2x - 2y \end{bmatrix}.$$

Konservativitetskoll. Om fältet vore konservativt vore svaret 0. Vi testar:

- $\frac{\partial F_1}{\partial y} = e^x \cos y + 3,$
- $\frac{\partial F_2}{\partial x} = e^x \cos y + 2.$

Inte lika — alltså inte konservativt. Men det är *nära*.

Tricket. Identifiera den konservativa delen $\vec{C} = \vec{\nabla}\phi$ med

$$\phi = e^x \sin y + 2yx - y^2,$$

så att

$$\vec{F} = \vec{C} + \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Då blir

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\oint_C \vec{C} \cdot d\vec{r}}_{=0} + \oint_C \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \cdot d\vec{r}.$$

Parametrisera ellipsen. Från $4x^2 + y^2 = 4$ följer $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, så

$$x = \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Då blir

$$\oint_C \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} 2 \sin t \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ 2 \cos t \end{bmatrix} dt = \int_0^{2\pi} -2 \sin^2 t \, dt.$$

Med $-2 \sin^2 t = \cos(2t) - 1$:

$$\int_0^{2\pi} (\cos(2t) - 1) dt = 0 - 2\pi = \boxed{-2\pi}.$$

Termen $\int_0^{2\pi} \cos(2t) \, dt$ blir noll eftersom det är integration över två hela perioder.

Jämför. Samma exempel räknas i **Greens sats** med en ren $dQ/dx - dP/dy$ -räkning. Båda metoderna ger -2π .

7. Sammanfattning

Begrepp	Formel / villkor
Vektorfält	$\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
Potential	$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$
Konservativitet (2D, nödv.)	$\partial F_1/\partial y = \partial F_2/\partial x$
Vägoberoende	$\int_C \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = \phi(b) - \phi(a)$

Begrepp**Formel / villkor**

Slutna kurvor (konservativt) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Läsning

- 16.1 Vector and Scalar Fields
.....
- 16.2 Conservative Fields
.....

Se även

- [Gradient och riktningsderivata](#)
- [Divergens och rotation](#)
- [Kurvintegraler av vektorfält](#)
- [Greens sats](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Divergence and curl](#) — geometrisk intuition.
 - [Khan Academy: Vector fields](#)
 - [Wikipedia: Vector field](#)
-

Kurvintegraler

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #integral

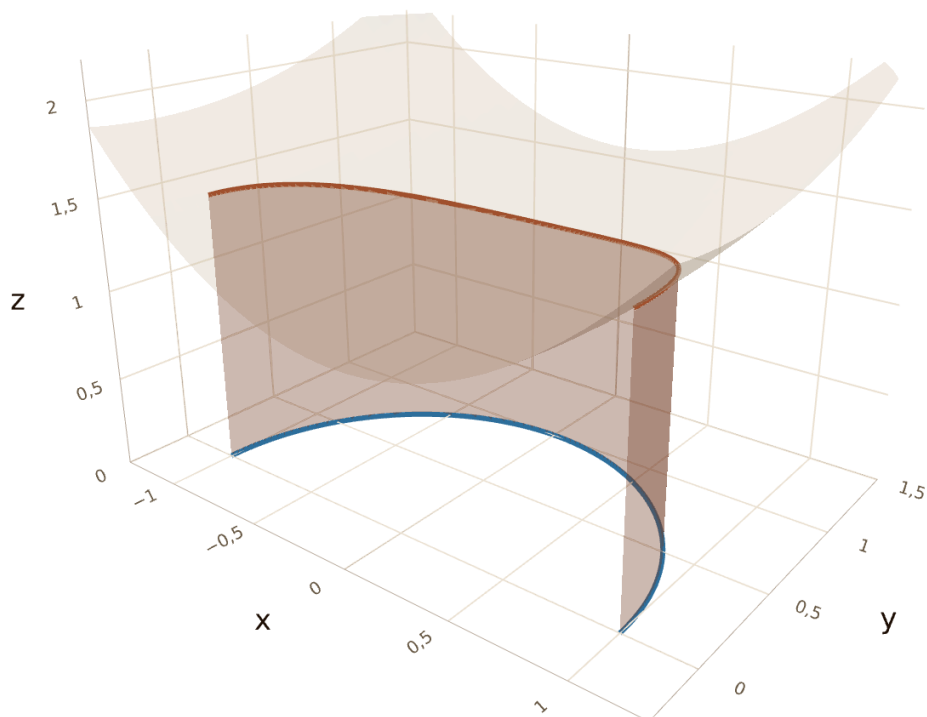
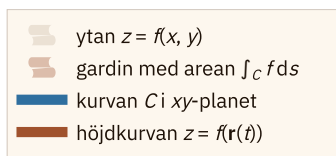
Kurs: M0068M **Förkunskaper:** Parametriserade kurvor, Integraler

1. Idén bakom kurvintegralen

Vanliga integraler $\int_a^b f(x) dx$ summerar funktionsvärden längs ett rakt intervall på reella linjen. *Kurvintegralen* generaliserar detta till en *krokig väg* i planet eller rummet.

Grundtanken

Tänk dig en böjd vajer som följer en kurva C , och en densitet $f(x, y)$ som varierar längs vajern. Massan blir summan av “lite längd $\times$ lokal densitet” — och det är precis $\int_C f ds$.



2. Definition

För en kurva $C : \vec{r}(t), t \in [a, b]$, och en skalärfunktion f definierad på C :

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

där ds är ett *båglängdselement*.

Härledning av ds

En liten bit av kurvan motsvarar ett litet steg Δt i parametern. Pythagoras längs kurvan ger

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \|\vec{r}'(t)\| dt$$

dvs. båglängdselementet är *farten* i parametriseringen, gånger dt .

 3D-fall

Allt fungerar likadant i $\mathbb{R}^3$ med $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$.

3. Oberoende av parametrisering

Resultatet beror endast på kurvan som *geometriskt objekt*, inte på hur den parametriseras. Att byta parameter $t \rightarrow \tau(t)$ med $\tau'(t) > 0$ ger samma värde, så länge orientering och spår bevaras.

 Praktisk konsekvens

Välj den parametrisering som ger snyggast räkning — du behöver inte oroa dig för att svaret ska bero på valet.

4. Användning

- **Längd** av kurva: $f \equiv 1$ ger $\int_C ds = \text{längd}(C)$.
- **Massa** av tråd med (linjär) densitet $\rho(x, y)$: $m = \int_C \rho ds$.
- **Masscentrum** av tråden: $\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x \rho ds$ etc.
- **Medelvärde** av f längs kurvan: $\bar{f} = \frac{1}{\text{längd}(C)} \int_C f ds$.

5. Exempel

 Exempel 1 — längden av en halvcirkel (sanity check)

Låt C vara övre halvan av enhetscirkeln. Parametrisera $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$. Då

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t), \quad \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1.$$

Längden:

$$\int_C ds = \int_0^\pi 1 dt = \boxed{\pi}.$$

Stämmer — halvomkretsen av enhetscirkeln är just π .

Exempel 2 — massa av vajer med inhomogen densitet

Finn massan av en vajer som följer $y = x^2$ från $(0, 0)$ till $(1, 1)$ med densiteten $\rho(x, y) = x$.

$$m = \int_C \rho(x, y) \, ds.$$

Parametrisering. Sätt $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ för $t \in [0, 1]$, så

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}, \quad \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}.$$

Räkningen.

$$m = \int_0^1 x(t) \|\vec{r}'(t)\| \, dt = \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} \, dt.$$

Substitutionen $u = 1 + 4t^2$, $du = 8t \, dt$ ger

$$\int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} \, dt = \frac{1}{8} \int_{u=1}^{u=5} \sqrt{u} \, du = \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^5 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1).$$

Alltså

$$m = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12} \approx 0,847.$$

Rimlighetskontroll. Vajerns längd är $\int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} \, dt \approx 1,48$, och densiteten varierar från 0 (i origo) till 1 (i $(1, 1)$). En *medelmassa* skulle ligga kring $0,5 \cdot 1,48 \approx 0,74$ – vårt svar 0,85 är något högre, vilket stämmer med att den tjockare delen av vajern (hög x) också är längre eftersom $y = x^2$ är brantare där.

Exempel 3 — medelvärde av höjd över en spiral

Låt C vara en hel cirkel av radie R i xy -planet. Beräkna medelvärdet av $f(x, y) = x^2$ längs C .

Parametrisera $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Då $\|\vec{r}'(t)\| = R$, och

$$\int_C x^2 \, ds = \int_0^{2\pi} (R \cos t)^2 \cdot R \, dt = R^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = R^3 \cdot \pi = \pi R^3.$$

Längden av C är $2\pi R$, så medelvärdet blir

$$\bar{f} = \frac{\pi R^3}{2\pi R} = \frac{R^2}{2}.$$

Tolkning. Eftersom medelvärdet av $\cos^2$ över en hel period är $1/2$, får vi $\overline{x^2} = R^2/2$. Det är samma resultat som av symmetriskäl $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{(x^2 + y^2)/2} = R^2/2$.

6. Metodik – steg för steg

Hur man räknar $\int_C f \, ds$

1. **Parametrisera kurvan** C med $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Välj den parametrisering som gör räkningarna minst smärtsamma.
2. **Räkna farten** $\|\vec{r}'(t)\|$.
3. **Uttryck integranden** f längs kurvan: $f(\vec{r}(t))$.
4. **Beräkna enkelintegralen** $\int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| \, dt$.
5. **Sanity-check.** För $f \equiv 1$ ska du få längden av C .

Vanliga fallgropar

- Glömt $\|\vec{r}'(t)\|$ – utan den blir resultatet fel storleksordning.
- Felaktig t -intervall som täcker kurvan flera gånger eller bara delvis.
- Räknat $\int f(t) \, dt$ istället för $\int f(\vec{r}(t)) \, ds$ – funktionsvärdet *i punkten*, inte i parametern.

Läsning

- [16.3 Line Integrals](#)

Se även

- [Kurvintegraler av vektorfält](#)
- [Parametriserade kurvor](#)
- [Båglängd och rotationsarea](#)

Resurser

- [Khan Academy: Line integrals](#) 
- [Wikipedia: Line integral](#) 

Kurvintegraler av vektorfält

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #vektoranalys

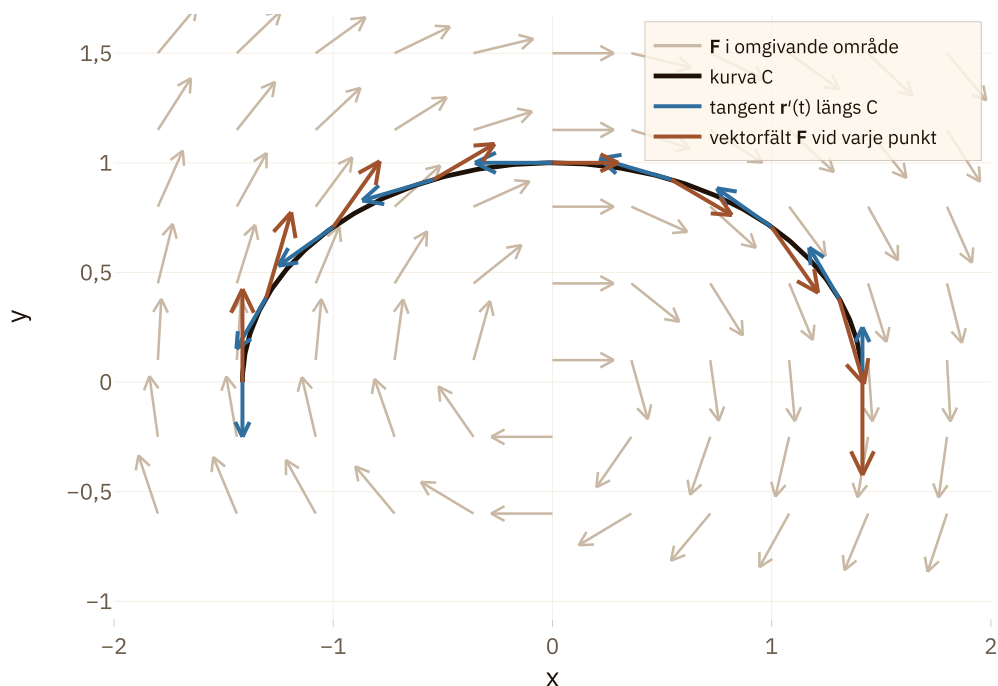
Kurs: M0068M **Förkunskaper:** Vektorfält, Parametriserade kurvor

1. Definition

För ett **vektorfält** $\vec{F}$ längs en orienterad kurva $C : \vec{r}(t), t \in [a, b]$ definieras

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Tolkningen är *arbetet* utfört av kraftfältet längs kurvan.



≡ Intuitivt exempel – fisken i strömmen

Tänk dig ett vektorfält som beskriver vattnets flöde i en å, och en fisk som rör sig i vattnet. Fisken följer inte strömmen utan tar sin egen väg. Vi vill veta arbetet $\vec{W} = \vec{F} \cdot \vec{x}$, men kraftens riktning och rörelseriktningen sammanfaller inte. Lösningen är att projicera kraftvektorn på rörelseriktningen,

$$W = |\vec{F}_{\parallel}| |\vec{x}| = |\vec{F}| |\vec{x}| \cos \theta,$$

och i kontinuerlig form (efter Stephans välkända "magic"):

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C F_1 dx + F_2 dy = \int_C F_1 dx + \int_C F_2 dy.$$

Med

- $\vec{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix},$
- $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt,$

följer

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt.$$

2. Beräkningsexempel – vägberoende

Låt $\vec{F} = y^2\hat{i} + 2xy\hat{j} = \begin{bmatrix} y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}$ och beräkna $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ längs tre olika vägar från $(0, 0)$ till $(1, 1)$:

1. C : rät linjen $y = x$ (enklast, enligt Stephan).
2. C : parabeln $y = x^2$.
3. C : två rät linjesegment, först $(0, 0) \rightarrow (0, 1)$, sedan $(0, 1) \rightarrow (1, 1)$.

≡ Väg 1 – uppställning

Parametrisering: $x(t) = t, y(t) = t, 0 \leq t \leq 1$, så

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad \vec{r}'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Då blir $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \dots$

(Färdigräkning lämnas som övning; vägarna 2 och 3 ställs upp på samma sätt.)

3. Oberoende av väg

Om $\vec{F} = \vec{\nabla}f$ – alltså om fältet är *konserverativt* (se [Vektorfält](#)) – gäller

$$\int_C \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

och integralen är **oberoende av vägen** mellan ändpunkterna. Som specialfall blir kurvintegralen längs varje sluten kurva noll.

Läsning

- 16.4 Line Integrals of Vector Fields

Se även

- [Vektorfält](#)
- [Greens sats](#)
- [Kurvintegraler](#)

Greens sats

19 okt. 2026, 7 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #vektoranalys

Kurs: M0068M **Förkunskaper:** Kurvintegraler av vektorfält, Dubbelintegraler

1. Idén bakom satsen

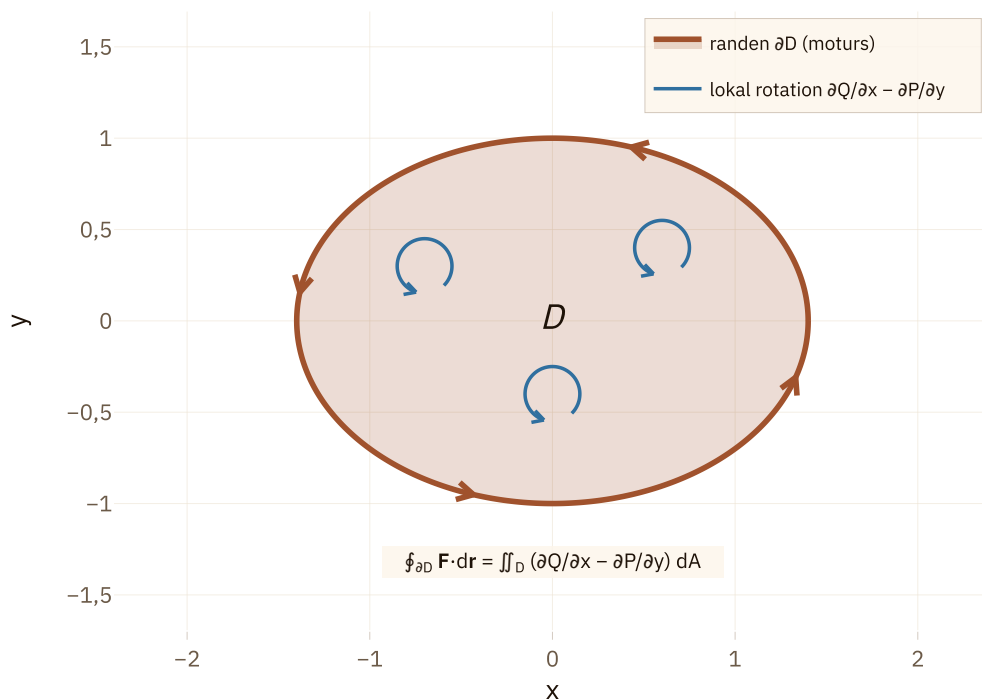
Det finns två naturliga sätt att mäta vad ett vektorfält $\vec{F}$ "gör" över ett område $D \subset \mathbb{R}^2$:

- **Längs randen:** kurvintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ summerar fältets komponent längs $C = \partial D$ — cirkulationen.
- **Inne i området:** dubbelintegralen av en lokal "swirl-täthet" $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ summerar hur mycket fältet snurrar i varje punkt.

Greens sats säger att dessa två storheter är *samma sak*. Det är 2D-versionen av Stokes sats.

Grundtanken

Det som händer på randen kan räknas ut genom att summera något lokalt inne i D — och tvärtom. Ett globalt randvärde är samma sak som en lokal täthet integrerad över området.



2. Satsen

För ett vektorfält $\vec{F} = (P, Q)$ som är C^1 på en omgivning av D , och en positivt orienterad styckevis C^1 -rand $C = \partial D$:

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Positiv orientering

“Positivt orienterad” betyder att C traverseras motsols, så att D ligger till *vänster* när man rör sig längs randen. Vänd man riktningen byter både sidorna tecken samtidigt — likheten gäller fortfarande.

$\vec{F}$ måste vara definierat överallt i D

Om $\vec{F}$ har en singularitet inne i D — t.ex. blir oändlig i en punkt — gäller satsen *inte* direkt. Då måste man skära ut singulariteten, vilket ger en korrektionsterm. Se Exempel 3.

3. Lokal tolkning – curlen som cirkulationstäthet

Varför ser integranden i högerled ut just så? En kort heuristik: betrakta en mycket liten rektangel R med hörn i (x, y) och sidor $\Delta x, \Delta y$. Cirkulationen längs randen ∂R , taget motsols, blir efter linjär approximation

$$\oint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y.$$

Det är därför integranden i Greens sats *är* just denna kombination – den mäter cirkulation per ytenhet i punkten.

Bygger man upp D av massor av små rektanglar och summerar cirkulationen längs allas ränder, så *kancellerar* alla inre kanter (varje inre kant traverseras en gång i varje riktning av två grannrektanglar). Bara den yttre randen C överlever, och man får

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{\text{rektanglar}} \oint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Mnemonic

Tänk på $\partial Q / \partial x - \partial P / \partial y$ som "swirl-tätheten" i en punkt. Greens sats säger: *summa av lokal swirl = total cirkulation kring randen.*

4. Kopplingen till curl

På svenska är det $\text{rot}(\vec{F}) = \text{"rotationen av } \vec{F} \text{"}$

Integranden i högerled är exakt $\hat{k}$ -komponenten av **curlen** $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ när $\vec{F}$ ses som ett 3D-fält $(P, Q, 0)$:

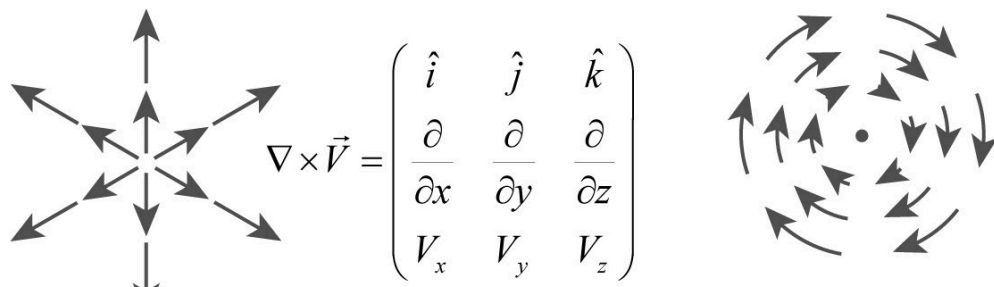
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Med $F_3 = 0$ försvinner $\hat{i}$ - och $\hat{j}$ -komponenterna och kvar blir

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k}.$$

Swirliness är trademark av Stephan.

VECTOR REVIEW: DIVERGENCE & CURL OF A VECTOR FIELD



$$\nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Greens sats kan därför skrivas

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{k} dA,$$

vilket är precis hur 3D-versionen (**Stokes sats**) ser ut för en plan yta i xy -planet.

5. Specialfall – area

Sätt $P = -y/2$, $Q = x/2$. Då blir integranden

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1,$$

så dubbelintegralen reduceras till arean. Det ger

$$A = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

dvs. arean av D läses av direkt från en kurvintegral längs randen.

≡ Exempel – arean av en ellips via Greens sats

Beräkna arean av ellipsen

$$E = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

 Lösning

Parametrisering av randen (motsols):

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Då blir $dx = -a \sin t \, dt$ och $dy = b \cos t \, dt$, så

$$x \, dy - y \, dx = (a \cos t)(b \cos t) \, dt - (b \sin t)(-a \sin t) \, dt = ab(\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = ab \, dt.$$

Greens sats ger

$$A = \frac{1}{2} \oint_C (x \, dy - y \, dx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \, dt = \boxed{\pi ab}.$$

Rimlighetskontroll. För $a = b = R$ (cirkel) blir $A = \pi R^2$. Stämmer.

6. Exempel

≡ **Exempel 1 – verifiera Greens sats för** $\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$

Låt D vara enhetsskivan och $C = \partial D$ enhetscirkeln, motsols. Beräkna både $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ och $\iint_D (\partial Q / \partial x - \partial P / \partial y) \, dA$ och visa att de ger samma värde.

 Lösning

Vänsterled (kurvintegralen). Parametrisera $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}(t)) &= \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, & \vec{r}'(t) &= \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}. \\ \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Högerled (curl-integralen). Med $P = -y$, $Q = x$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2.$$

Alltså

$$\iint_D 2 \, dA = 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 2\pi.$$

Båda sidor ger $\boxed{2\pi}$ — Greens sats verifierad.

Tolkning. Curlen är $2\hat{k}$ överallt, så fältet “snurrar” likformigt med konstant cirkulationstäthet 2. Det stämmer med bilden av $\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$ som en stelkroppsrotation kring origo.

≡ Exempel 2 — när det är *enklare* att gå via Greens sats

Beräkna

$$\oint_C (e^x \sin y + 3y)dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)dy$$

längs ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$, motsols.

Lösning

Direkt parametrisering blir blodigt — men Greens sats ger en genväg. Med $P = e^x \sin y + 3y$ och $Q = e^x \cos y + 2x - 2y$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y + 2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y + 3,$$

så

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1.$$

De obehagliga e^x -termerna kancellerar — det som blir kvar är konstant. Då blir

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D (-1) dA = -\text{area}(D).$$

Ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$, dvs. $x^2 + y^2/4 = 1$, har halvaxlar $a = 1$, $b = 2$, så area är $\pi ab = 2\pi$. Alltså

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \boxed{-2\pi}.$$

Jämför. Samma exempel räknades i [Vektorfält](#) genom att splitta $\vec{F}$ i en konservativ del plus en rest — den vägen krävde att man gissade en potential. Med Greens sats reduceras hela problemet till derivering och en känd area.

Exempel 3 — virvelfältet, och varför singulariteten spelar roll

Betrakta fältet

$$\vec{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{j}.$$

Beräkna $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ och $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ längs enhetscirkeln motsols. Förklara varför Greens sats inte verkar gälla.

Lösning

Curlen. En direkt räkning ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-(x^2 + y^2) - (-y) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

så $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 0$ överallt där fältet är definierat.

Vad ger kurvintegralen? Längs enhetscirkeln $x = \cos t$, $y = \sin t$ är $x^2 + y^2 = 1$, så $\vec{F} = (-\sin t, \cos t)$, samma som i Exempel 1. Alltså

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

Paradox? Curlen är noll överallt i D , men $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi \neq 0$. Greens sats verkar bryta.

Upplösning. $\vec{F}$ är *inte* definierat i origo, som ligger inne i D . Förutsättningen i §2 — att $\vec{F}$ är C^1 på hela D — är därmed inte uppfylld, och satsen ger inget direkt utfall här. Värdet 2π är "ingången" från singulariteten i origo.

Tolkning

Det här exemplet visar att lokal information (curl = 0) *inte räcker* för att räkna ut globala kurvintegraler om området har hål. Talet 2π är ett *topologiskt* fingeravtryck — det räknar hur många varv C går runt origo.

Exempel 4 – polära koordinater

Beräkna

$$\oint_C (x - y^3) dx + (y^3 + x^3) dy,$$

där $\vec{F} = \begin{bmatrix} x - y^3 \\ y^3 + x^3 \end{bmatrix}$ och C är randen, motsols, till kvartskivan D med radie 2 i första kvadranten.

Lösning

Notationen $\oint$ är ledtråden att Greens sats ska användas:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dA.$$

Med $F_1 = x - y^3$ och $F_2 = y^3 + x^3$:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3x^2 - (-3y^2) = 3(x^2 + y^2).$$

I polära koordinater $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $dA = r dr d\theta$:

$$\iint_D 3(x^2 + y^2) dA = 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \cdot r dr d\theta = 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 4 = \boxed{6\pi}.$$

Exempel 5 – triangelområde, tre rätlinjiga sidor

Låt C beteckna den moturs orienterade kurva i planet som med räta linjer förbinder punkterna $A = (-1, 0)$, $B = (0, -1)$, $P = (1, 1)$. Beräkna

$$\oint_C xy dx + (x^2 + 3x) dy.$$

Ledning 1 – Greens sats

$$\oint_C A dx + B dy = \iint_D \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} dA.$$

Ledning 2 – dela upp randen

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

där $C_1 = \overline{AB}$, $C_2 = \overline{BP}$, $C_3 = \overline{PA}$.

Lösning

Saknas i underlaget – fyll i när författaren räknat klart.

7. Strategi

När är Greens sats användbart?

Använd Greens sats när:

- Kurvintegralen är besvärlig att parametrisera direkt, men $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ är *enkel* (Exempel 2).
- Området D är geometriskt enkelt så att dubbelintegralen blir rättfram.
- Du vill räkna en *area* från en parametrisering av randen (specialfallet i §5).

Använd den *omvända* riktningen – kurvintegral istället för dubbelintegral – när:

- Dubbelintegralen ser jobbig ut men randen är enkelt parametriserbar.

Och kontrollera alltid att $\vec{F}$ är C^1 på hela D . Singulariteter kräver särbehandling (Exempel 3).

8. Sammanfattning

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Specialfall	Val av (P, Q)	Resultat
Allmänt	godtyckliga C^1 -funktioner	cirkulation = curl-integral
Area	$P = -y/2$, $Q = x/2$	$A = \frac{1}{2} \oint (x \, dy - y \, dx)$

Specialfall	Val av (P, Q)	Resultat
Cirkulation av rotation	$P = -y, Q = x$	$\oint = 2 \cdot \text{area}(D)$

Läsning

- [17.3 Green's Theorem in the Plane](#)

Se även

- [Stokes sats](#)
- [Gauss sats](#)
- [Kurvintegraler av vektorfält](#)
- [Vektorfält](#)
- [Divergens och rotation](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Divergence and curl](#) — geometrisk intuition för curl och Greens sats.
- [Khan Academy: Green's theorem](#)
- [Wikipedia: Green's theorem](#)

Parametriserade ytor

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #yta

Kurs: M0068M **Förkunskaper:** Parametriserade kurvor, Partiella derivator, Kryssprodukt

1. Från kurvor till ytor

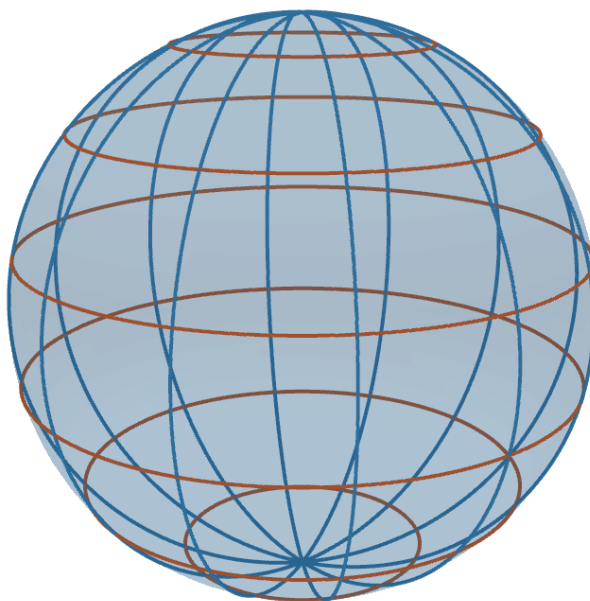
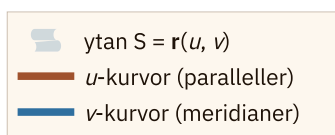
En **parametriserad kurva** beskriver en endimensionell väg i rummet via *en* parameter t . Att parametrisera en **yta** är samma idé, men man behöver *två* parametrar — en längs varje “riktning” på ytan. Resultatet är en avbildning

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

som rullar ut det plana området D till en yta S i $\mathbb{R}^3$.

Grundtanken

Tänk på (u, v) som “koordinater på ytan”. När u varierar med v fastnat ritar du en kurva som löper i en riktning över ytan, och tvärtom när v varierar. Ytan är hela bunten av sådana kurvor.



I bilden ser man en sfär parametriserad med polvinkel och azimut — meridianerna är v -kurvor (varierar u) och parallellerna är u -kurvor (varierar v).

2. Standardexempel

2.1 Graf av en funktion

Om ytan är grafen $z = f(x, y)$ är parametriseringen självskriven:

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}.$$

2.2 Sfär av radie R

$$\vec{r}(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} R \sin \phi \cos \theta \\ R \sin \phi \sin \theta \\ R \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi).$$

Här är ϕ polvinkel och θ azimut — samma struktur som **sfäriska koordinater**.

2.3 Cylinder av radie R

$$\vec{r}(\theta, z) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ z \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi), z \in [a, b].$$

2.4 Rotationsyta

Om en kurva $z = g(r)$, $r \in [r_0, r_1]$ roteras kring z -axeln blir ytan

$$\vec{r}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ g(r) \end{pmatrix}.$$

Paraboloiden $z = x^2 + y^2$ är detta med $g(r) = r^2$.

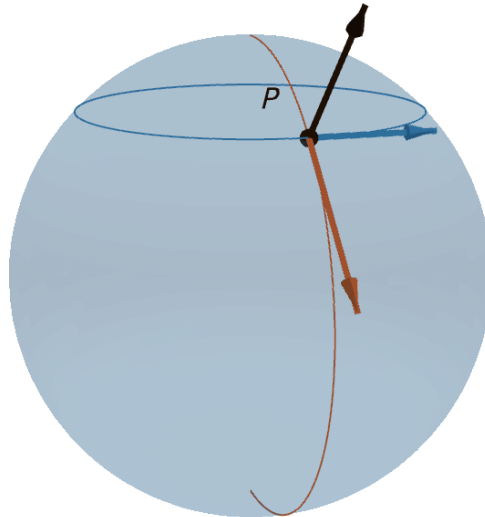
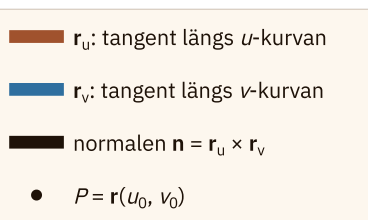
3. Tangentvektorer och normal

I varje punkt på ytan har man två naturliga tangentvektorer — en längs varje parameterriktning:

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.$$

De spänner upp **tangentplanet** till ytan i punkten. Deras **kryssprodukt** ger en normalvektor:

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$



Kryssproduktens längd är arean

$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$ är arean av den lilla parallelogram som de två tangentvektorerna spänner upp. Det är detta som blir **arealelementet** dS när man integrerar över ytan — se [Ytintegraler](#).

⚠ Singulära punkter

Om $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{0}$ någonstans är parametriseringen *degenererad* där. Det händer t.ex. vid sfärens poler. Det är inget allvarligt om det bara sker på en mängd med area noll — integraler bryr sig inte om sådana punkter — men man bör vara medveten om det när man räknar.

4. Areallementet

Den lokala “areavikten” som följer med en parametrisering är

$$dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

Specialfall – graf $z = f(x, y)$

Med $\vec{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ blir

$$\vec{r}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix},$$

och en direkt räkning ger

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}.$$

Alltså

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy \quad (\text{graf-fallet})$$

Det är värt att lägga på minnet — det dyker upp i alla ytintegraler över en graf.

Specialfall – sfär av radie R

För sfärparametriseringen i §2.2:

$$\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = R^2 \sin \phi \hat{r}, \quad dS = R^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta.$$

Det stämmer med **sfäriska koordinaters** vinkeldel.

5. Orientering

Valet av parametrisering bestämmer också ytans **orientering** — riktningen på normalvektorn. Om man byter parameterordningen från (u, v) till (v, u) vänder normalvektorn (eftersom $\vec{r}_v \times \vec{r}_u = -\vec{r}_u \times \vec{r}_v$).

Detta är viktigt för **flödesintegraler** och för **Stokes sats**; se **Orientering (kurvor och ytor)** för detaljer.

6. Räknemetod **Hur du jobbar med en parametriserad yta**

1. **Skriv ner** $\vec{r}(u, v)$ och (u, v) -området D .
2. **Räkna** $\vec{r}_u$ och $\vec{r}_v$ komponentvis.
3. **Räkna kryssprodukten** $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$.
4. **Ta längden** för dS , eller behåll vektorn för flödesintegraler.
5. **Sätt upp dubbelintegralen** över D med rätt arealvikt.

≡ Exempel – area av en paraboloid-cap

Beräkna arean av den del av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ som ligger under planet $z = 1$.

Parametrisering. Använd grafform:

$$\vec{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Arealelement. Med $f(x, y) = x^2 + y^2$ får vi $f_x = 2x$, $f_y = 2y$, så

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy.$$

Räkningen. Byt till polärt:

$$\text{area} = \iint_D dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr \, d\theta.$$

Inre integralen med substitutionen $u = 1 + 4r^2$, $du = 8r \, dr$:

$$\int_0^1 r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr = \frac{1}{8} \int_1^5 \sqrt{u} \, du = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (5^{3/2} - 1) = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}.$$

Yttre faktorn 2π ger

$$\text{area} = \left[\frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1) \right] \approx 5,33.$$

≡ Exempel – area av en sfär (sanity check)

Med sfärparametriseringen och $dS = R^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta$:

$$\text{area} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta = R^2 \cdot 2\pi \cdot 2 = \boxed{4\pi R^2}.$$

Den klassiska formeln, ut på tre rader.

Läsning

- [16.5 Surfaces and Surface Integrals](#)

Se även

- [Parametriserade kurvor](#)

- Ytintegraler
- Flödesintegraler
- Orientering (kurvor och ytor)
- Kryssprodukt

Resurser

- [Khan Academy: Surfaces and parametrizations](#)
 - [3Blue1Brown: Manifolds and parametrizations](#) — generell intuition.
 - [Wikipedia: Parametric surface](#)
-

Ytintegraler

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #integral

Kurs: M0068M Förkunskaper: Parametriserade ytor, Dubbelintegraler

1. Idén – integrera över en yta istället för ett område

En vanlig **dubbelintegral** summerar funktionsvärden över ett plant område $D \subset \mathbb{R}^2$. En **ytintegral** gör samma sak, men över en krökt yta S i rummet. Två naturliga tolkningar:

- **Massa:** om S är ett tunt skal med ytdensitet $\rho(x, y, z)$ är massan $\iint_S \rho \, dS$.
- **Medelvärde:** om f representerar en storhet (temperatur, höjd, ...) längs ytan är dess medelvärde $\frac{1}{\text{area}(S)} \iint_S f \, dS$.

Konstrukten är direkt analog till **kurvintegralen** $\int_C f \, ds$ – bara att vi summerar över en $2D$ -yta istället för en $1D$ -kurva, och båglängdselementet ds ersätts av ett *arealelement* dS .

Grundtanken

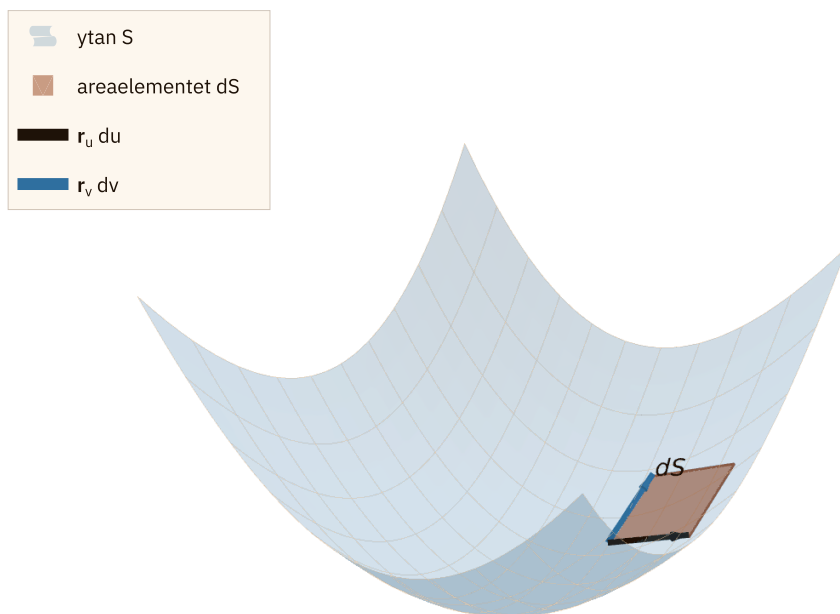
$\iint_S f \, dS$ summerar f längs ytan, vägt med den lokala arean. När $f \equiv 1$ får man ytans area.

2. Definition via parametrisering

Låt S vara given av en **parametrisering** $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$. Då definieras

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du \, dv$$

Faktorn $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$ är den lokala arealförstoringen – hur en liten rektangel $du \, dv$ i parameterplanet blir när den lyfts upp på ytan.



I bilden visar den lilla parallelogrammen exakt detta: $\vec{r}_u du$ och $\vec{r}_v dv$ spänner upp en liten yta vars area är $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv = dS$.

3. Användbara specialfall

Graf $z = f(x, y)$ över $D \subset \mathbb{R}^2$

Med parametriseringen $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ blir

$$\iint_S g dS = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

Sfär av radie R

Med $\vec{r}(\phi, \theta)$ och $dS = R^2 \sin \phi d\phi d\theta$:

$$\iint_S g dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\vec{r}(\phi, \theta)) R^2 \sin \phi d\phi d\theta.$$

Cylinder av radie R , höjd h

Med $\vec{r}(\theta, z)$ och $dS = R d\theta dz$:

$$\iint_S g \, dS = \int_0^h \int_0^{2\pi} g(R \cos \theta, R \sin \theta, z) R \, d\theta \, dz.$$

4. Egenskaper

Ytintegralen ärver de vanliga räknereglerna från dubbelintegralen:

- **Linjäritet:** $\iint_S (\alpha f + \beta g) \, dS = \alpha \iint_S f \, dS + \beta \iint_S g \, dS$.
- **Additivitet:** om $S = S_1 \cup S_2$ med $S_1 \cap S_2$ av area noll, summerar integralen.
- **Oberoende av parametrisering:** värdet beror bara på S som geometriskt objekt, inte på det val av $\vec{r}(u, v)$ man råkade göra (så länge den täcker S bijektivt utom på en mängd med area noll).
- **Oberoende av orientering:** till skillnad från **flödesintegralen** byter inte $\iint_S f \, dS$ tecken om man vänder normalen. Det är en *skalär* ytintegral.

5. Exempel

≡ Exempel 1 – yta av halvsfär

Beräkna $\iint_S z \, dS$ där S är övre halvan av enhetssfären.

Parametrisering. Med $\phi \in [0, \pi/2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$z = \cos \phi, \quad dS = \sin \phi \, d\phi \, d\theta.$$

Räkningen.

$$\iint_S z \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi \, d\phi \, d\theta.$$

Separation:

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi \, d\phi = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2 \phi \right]_0^{\pi/2} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\pi}.$$

Tolkning. Halvsfären har area 2π , så medelhöjden över halvsfären blir $\pi/2\pi = 1/2$ – masscentrum för en halvsfärisk skal ligger på höjden $\bar{z} = 1/2$.

≡ Exempel 2 – area av paraboloid-cap (samma som i Parametriserade ytor)

Beräkna arean av $z = x^2 + y^2$ under $z \leq 1$.

Med grafformeln och polärt byte blir

$$\text{area} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1+4r^2} r dr d\theta = \boxed{\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)}.$$

Exempel 3 – massa av ett halvfäriskt skal

Ett tunt skal S : halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$ har ytdensiteten $\rho(x, y, z) = z$. Bestäm massan.

Med sfärparametrisering: $z = R \cos \phi$, $dS = R^2 \sin \phi d\phi d\theta$. Eftersom $z \geq 0$ kräver $\phi \in [0, \pi/2]$.

$$m = \iint_S \rho dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R \cos \phi \cdot R^2 \sin \phi d\phi d\theta.$$

Separation:

$$= 2\pi R^3 \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi d\phi = 2\pi R^3 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\pi R^3}.$$

Rimlighetskontroll. Skalet har area $2\pi R^2$ och densiteten varierar från 0 vid randen till R vid toppen – medeldensitet $R/2$ ger massa πR^3 . Stämmer.

6. Metodik – steg för steg

Räkneschema för $\iint_S f dS$

1. Välj parametrisering $\vec{r}(u, v)$ och området D .
2. Beräkna $dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$ – eller använd specialformlerna i §3.
3. Uttryck f längs ytan: $f(\vec{r}(u, v))$.
4. Skriv ner dubbelintegralen över D och beräkna iterativt.
5. Sanity-check med $f \equiv 1$ – då ska du få $\text{area}(S)$.

Vanliga fallgropar

- Glömmer $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$ – utan den blir resultatet bara dubbelintegralen i parameterplanet.
- Använder $dS = dA$ utan att fundera över krökningen – funkar bara för plana ytor.
- Slarvar med definitionsområdet D , så att ytan täcks dubbelt eller missas.

Läsning

- 16.5 Surfaces and Surface Integrals

Se även

- Parametriserade ytor
- Flödesintegraler
- Dubbelintegraler
- Kurvintegraler
- Variabelbyte i trippelintegraler

Resurser

- [Khan Academy: Surface integrals](#) 
 - [Wikipedia: Surface integral](#) 
-

Flödesintegraler

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #vektoranalys

Kurs: M0068M **Förkunskaper:** Vektorfält, Parametriserade ytor, Ytintegraler, Orientering (kurvor och ytor)

1. Idén – hur mycket “rinner igenom”?

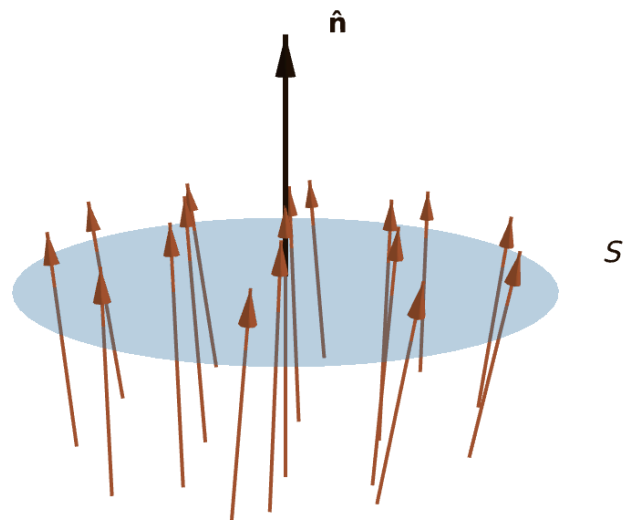
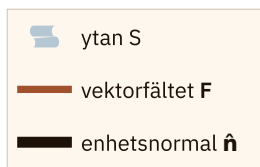
Tänk dig att $\vec{F}$ är hastighetsfältet i en strömmande vätska. Genom en yta S flödar det med en viss takt – så och så många liter per sekund. **Flödesintegralen** mäter exakt den takten. Mer abstrakt: den mäter hur mycket av $\vec{F}$ som *passerar* S , räknat med tecken efter en vald sida.

Tre saker att hålla isär:

- **Storleken** av $\vec{F}$ i punkten styr hur stor den lokala genomströmningen är.
- **Riktningen** av $\vec{F}$ relativt ytan avgör om det räknas som flöde *genom* – bara komponenten *vinkelrät* mot S bidrar.
- **Orienteringen** av S (vilken sida som är “ut”) bestämmer tecknet.

Grundtanken

Endast $\vec{F}$'s normalkomponent bidrar till flödet. Tangentialdelen “glider längs” och passerar aldrig ytan.



2. Definition

Låt S vara en orienterad yta med enhetsnormal $\hat{n}$ och $\vec{F}$ ett vektorfält. Flödet av $\vec{F}$ genom S definieras som **ytintegralen**

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

där $d\vec{S} = \hat{n} dS$ är det vektorvärda arealelementet. Tecknet beror på orienteringen — se **Orientering** (kurvor och ytor).

3. Beräkning via parametrisering

Med S parametriserad av $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, är normalvektorn $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ och $dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$. Då försvinner längden mot normaliseringen:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$$

Tecknet på $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ är det som bestämmer orienteringen — om man vill ha “andra sidan” tar man minus, eller byter parameterordningen.

Specialfall – graf $z = f(x, y)$ uppåtorienterad

För $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ är $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (-f_x, -f_y, 1)$, så

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D (-F_1 f_x - F_2 f_y + F_3) dx dy.$$

4. Egenskaper

- **Linjäritet** i $\vec{F}$.
- **Additivitet** över styckvis släta ytor.
- **Orientering:** $\iint_{-S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ — byter sida, byter tecken.
- **Slutna ytor:** konventionen är *utåtorienterad* normal. Då räknar man hur mycket som strömmar *ut* från det inneslutna området, och Gauss sats blir den naturliga räknemetoden.

5. Exempel

≡ Exempel 1 – flöde av $\vec{F} = (0, 0, 1)$ genom en halvsfär

Beräkna flödet av $\vec{F} = (0, 0, 1)$ genom övre enhetshalvsfären S med uppåtorienterad normal.

Smart genväg. Eftersom $\vec{F}$ är konstant och pekar uppåt, är flödet bara $\vec{F}$:s normalkomponent integrerad över S . Men *projektion*en av S på xy -planet är enhetsdisken D med area π . Eftersom $\vec{F}$ är konstant gäller

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D F_3 dA = \pi.$$

Direktkontroll. Med sfärparametrisering $\vec{r}(\phi, \theta)$ är $\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = \sin \phi \hat{\phi}$ och $\vec{F} \cdot \hat{\phi} = \cos \phi$, alltså

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi d\phi d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\pi}. \quad \checkmark$$

≡ Exempel 2 – elektriskt flöde genom en sfär (Gauss lag)

Det elektriska fältet kring en punktladdning q i origo är

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad r = \|\vec{r}\|.$$

Beräkna flödet av $\vec{E}$ utåt genom en sfär med radie a centrerad i origo.

Sfärparametrisering ger $\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = a^2 \sin \phi \hat{n}$ och $\vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$. Alltså

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot a^2 \sin \phi d\phi d\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \boxed{\frac{q}{\epsilon_0}}.$$

Tolkning. Detta är **Gauss lag** för elektrostatik — flödet ut genom *vilken som helst* sluten yta som omsluter laddningen är samma. Att resultatet är oberoende av a är inte en slump; det är en konsekvens av att $\vec{E} \propto 1/r^2$ och att sfärens area växer som r^2 . Klassisk fysik, klassisk matematik.

≡ Exempel 3 — flöde av $\vec{F} = (x, y, z)$ genom enhetssfärens yta

Med $\vec{F} = (x, y, z) = \vec{r}$ och $\hat{n} = \vec{r}/\|\vec{r}\| = \vec{r}$ på enhetssfären:

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = \|\vec{r}\|^2 = 1.$$

Alltså

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S 1 dS = \text{area}(S) = 4\pi.$$

Kollas mot **Gauss sats**: $\nabla \cdot \vec{F} = 3$, och $\iiint_B 3 dV = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi = 4\pi$. ✓

6. Räknemetod

🔄 Räknescema för $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$

1. Välj parametrisering $\vec{r}(u, v)$ och området D .
2. Bestäm orienteringen — räkna $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ och kolla att den pekar åt rätt håll (annars byter tecknet eller parameterordningen).
3. Räkna ut $\vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$ som funktion av (u, v) .
4. Integrera över D .

Alternativ: är ytan sluten kan **Gauss sats** ofta ersätta hela ytintegralen med en *trippelintegral* över divergensen — oftast mycket snabbare.

 Skalär ⇄ **vektor**

$\iint_S f \, dS$ är en **skalär** ytintegral — tecken-okänslig. $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ är **flödesintegralen** — orienteringsberoende. Förväxla inte de två.

Läsning

- [16.6 Oriented Surfaces and Flux Integrals](#)

Se även

- Ytintegraler
- Vektorfält
- Orientering (kurvor och ytor)
- Gauss sats
- Stokes sats
- Divergens och rotation

Resurser

- [Khan Academy: Flux in 3D](#)
- [Wikipedia: Flux](#)

Divergens och rotation

19 okt. 2026, 9 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #vektoranalys

Kurs: M0068M Förkunskaper: Vektorfält, Partiella derivator

Två frågor om ett flöde

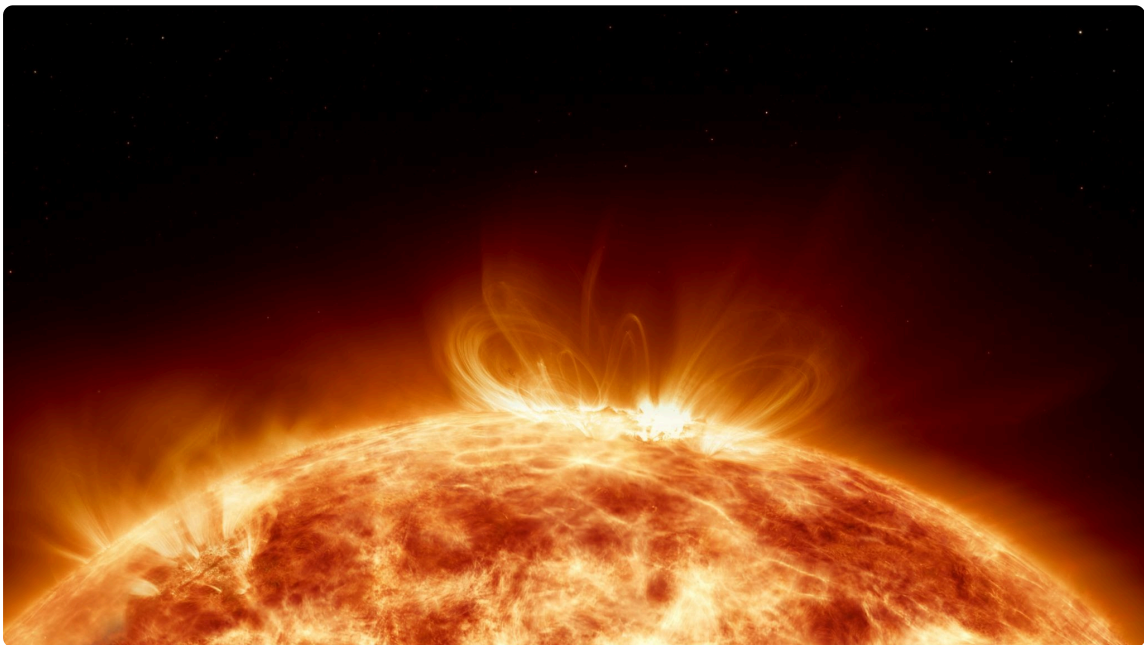
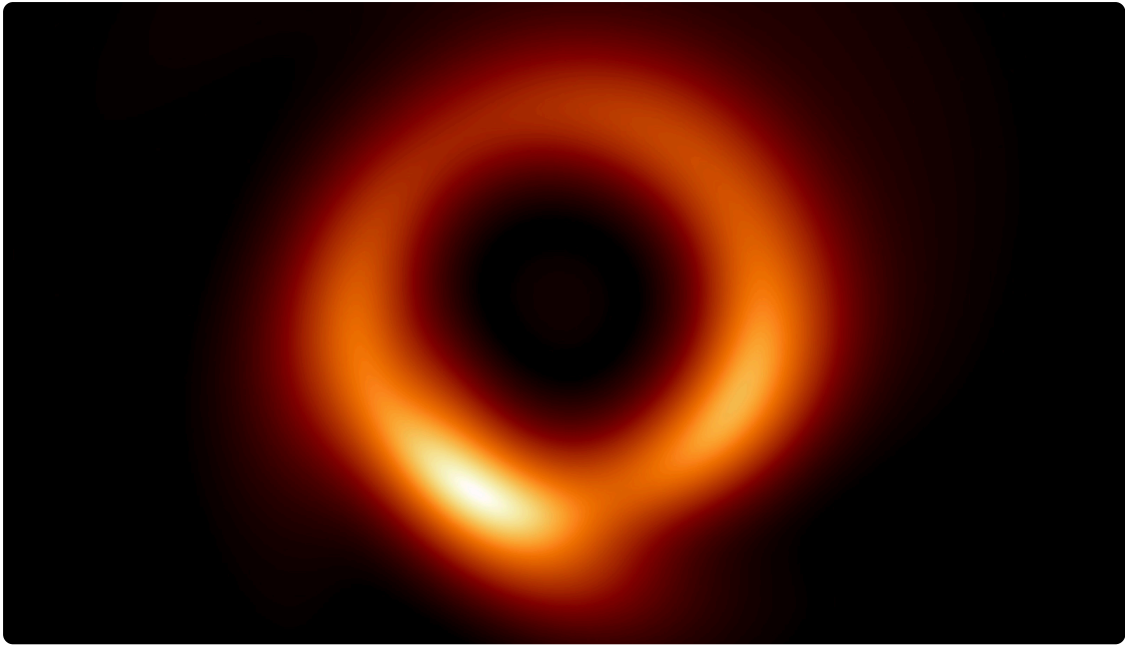
Tänk dig att vektorfältet $\vec{F}$ beskriver hastigheten hos en vätska — vid varje punkt i rummet finns en pil som säger åt vilket håll och hur snabbt vätskan rör sig just där. När man står med ett sådant fält framför sig dyker två frågor upp naturligt:

1. **Tar det slut på vatten någonstans?** Finns det punkter där vätska liksom dyker upp ur tomma luften, eller försvinner ner i ett dolt avlopp?
2. **Snurrar det?** Om man stoppar ner en liten skovel i vätskan vid en punkt — börjar den rotera?

Den första frågan svarar **divergensen** på. Den andra svarar **rotationen** på. Det är allt. Resten är bokföring.

Divergens

Föreställ dig en punkt i rummet och en liten boll runt den. Mät hur mycket vätska som flödar **ut** genom bollens yta minus hur mycket som flödar **in**. Krymp sedan bollen ner mot punkten och titta på överskottet per volym. Det talet är divergensen i punkten:



$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

- **Positiv divergens** = en *källa*. Vätska produceras här. Tänk en kran, en gnistrande elektron, en exploderande stjärna.
- **Negativ divergens** = en *sänka*. Vätska försvinner. Avloppet, det svarta hålet, den absorberande antennen.
- **Nolldivergens** = lika mycket in som ut. Vätskan bara *passerar* punkten. Detta kallas att fältet är **inkompressibelt** eller **källfritt**.

Lägg märke till att divergensen är en **skalär** — en siffra per punkt. Den säger inget om åt vilket håll något händer, bara *hur mycket netto-utströmning* det är.

Den mentala bilden

Sätt en osynlig liten badring runt punkten. Räkna pilar som pekar ut, dra bort pilar som pekar in. Resultatet — normerat mot ringens volym när den krymper — är divergensen.

Exempel som bygger intuition

- $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ pekar radiellt utåt från origo, snabbare ju längre ut man kommer. Här pumpar varje punkt ut vätska: $\nabla \cdot \vec{F} = 3$. Hela rummet är en gigantisk källa.
- $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ snurrar runt z-axeln som en virvelström. Vätska tar sig aldrig in eller ut ur en liten boll — den åker bara förbi: $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.
- $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, 0)$ ser ut som ett sadelmönster. Trots det är divergensen 0 överallt: vad som strömmar in från ett håll strömmar ut åt ett annat.

Rotation





Här är experimentet: stoppa ner en mikroskopisk skovelhjul (ett *paddle wheel*) vid en punkt. Låt vätskan trycka på skovlarna. Om hjulet börjar snurra är rotationen nollskild – och rotationsvektorn pekar längs hjulets axel, med riktning given av högerhandsregeln:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Det viktiga är inte formeln utan dess innebörd: **rotationen mäter hur fältet vrider sig kring varje punkt**, lokalt. Längden på vektorn säger hur snabbt skovelhjulet skulle snurra. Riktningen säger åt vilket håll axeln pekar.

Lokal är lokal

En vätska kan strömma i en stor cirkel utan att rotationen är nollskild — och tvärtom. Det avgörande är inte om vätskan rör sig längs en böjd bana, utan om en *liten* skovel skulle vridas runt sin egen mittpunkt.

Exempel som luras

- $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ snurrar runt z -axeln. En skovel **var som helst** i fältet snurrar — i samma takt och åt samma håll. $\nabla \times \vec{F} = (0, 0, 2)$. Hela fältet vrider sig som en stel kropp.
- $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ — det radiella fältet — har $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$. Trots att fältet “spränger ut” från origo finns ingen lokal vridning. En skovel bara skjuts utåt, den snurrar inte.
- Mer förrädisk: ett vattenfall som rinner snabbare i mitten än vid kanterna. Vätskan rör sig rakt nedåt överallt, men eftersom flödet är snabbare i mitten kommer en skovel nära kanten att börja snurra (den ena sidan trycks hårdare än den andra). **Rotation kan finnas även där allt rör sig rakt.**

Två oberoende egenskaper

Divergens och rotation mäter olika saker. Ett fält kan ha:

Divergens	Rotation	Exempel
ja	nej	Elektriskt fält från en punktladdning
nej	ja	Magnetfält runt en rak ledare
ja	ja	Allmänt strömningsfält
nej	nej	Ett “snällt” fält — gradient av en harmonisk potential

Det är inte en slump att tabellens fyra fall alla dyker upp i fysiken. **Helmholtz dekompositionsteorem** säger att varje rimligt vektorfält i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas som summan av två delar: en helt rotationsfri (gradient av en skalär) och en helt divergensfri (rotation av en vektor). Med andra ord: divergens och rotation är de två “primärfärgerna” som vektorfält målas med.

Vad satsen verkligen säger

Två integralsatser knyter divergens och rotation till saker man kan **mäta** genom integration:

- **Gauss sats** (divergenssatsen): det totala flödet ut genom en sluten yta är lika med integralen av divergensen över det innesluta volymen. Bokstavligen: räknar man källor inuti, vet man flödet ut.

- **Stokes sats**: cirkulationen runt en sluten kurva är lika med integralen av rotationens normalkomponent över en yta som spänns av kurvan. Bokstavligen: räknar man virvlar inuti, vet man cirkulationen runt.

I 2D smälter Stokes sats samman med **Greens sats** — och rotationen blir bara den ena z -komponenten.

Det här är inte djupa fakta i sig själva. Det är *definitioner*, om man tar dem på allvar: divergensen är netto-flödet ut per volym, och rotationen är cirkulationen per area. Formlerna med partiella derivator är bara vad de blir när man räknar i kartesiska koordinater.

Identiteter för grad, div och rot

Adams samlar de viktigaste sambanden i ett enda teorem (§17.2, Theorem 3). Låt ϕ, ψ vara skalärfält och $\vec{F}, \vec{G}$ vektorfält, alla tillräckligt deriverbara. Då gäller:

Vector differential identities

Förstaordnings-identiteter (varianter av produktregeln)

- (a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$
- (b) $\nabla \cdot (\phi\vec{F}) = (\nabla\phi) \cdot \vec{F} + \phi(\nabla \cdot \vec{F})$
- (c) $\nabla \times (\phi\vec{F}) = (\nabla\phi) \times \vec{F} + \phi(\nabla \times \vec{F})$
- (d) $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$
- (e) $\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \cdot \vec{G})\vec{F} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\nabla \cdot \vec{F})\vec{G} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}$
- (f) $\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F}) + (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F}$

Andraordnings-identiteter

- (g) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ (div curl = 0)
- (h) $\nabla \times (\nabla\phi) = \vec{0}$ (curl grad = 0)
- (i) $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$ (curl curl = grad div - ∇^2)

Skalärdifferentialoperatoren $(\vec{G} \cdot \nabla)$ i (e) och (f) verkar komponentvis:

$$(\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} = G_1 \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + G_2 \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + G_3 \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}.$$

Laplaceoperatoren definieras för skalärer som $\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}$ och för vektorfält komponentvis: $\nabla^2\vec{F} = (\nabla^2 F_1, \nabla^2 F_2, \nabla^2 F_3)$.

🔗 De två som bär hela maskineriet

Identiteterna (g) och (h) — $\operatorname{div} \operatorname{curl} = 0$ och $\operatorname{curl} \operatorname{grad} = 0$ — är de man stöter på överallt:

- **Rotationer har ingen divergens.** Om fältet redan virvlar runt så pumpar det inte också ut vätska. Curlfält är källfria per konstruktion.
- **Gradienter har ingen rotation.** En potentialfunktion definierar ett fält som “bara rinner nedåt” — det kan inte snurra. Konservativa fält är just de rotationsfria (i enkelt sammanhängande områden).

Tillsammans är de ryggraden i **Maxwells ekvationer** och förklaringen till varför det inte finns magnetiska monopoler. Identitet (i) är den som omvandlar Maxwell-ekvationerna till vågekvationen.

✎ Solenoidalt och irrotationellt

Adams ger två termer som används i resten av kapitlet:

- **Solenoidalt fält:** $\nabla \cdot \vec{F} = 0$. På tillräckligt snälla områden är ekvivalent: $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$ för någon vektorpotential $\vec{G}$.
- **Irrotationellt fält:** $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$. På enkelt sammanhängande områden är ekvivalent: $\vec{F} = \nabla \phi$ för någon skalärpotential ϕ .

Var det dyker upp i fysiken

- **Elektriska fält:** $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ (laddningar är källor), $\nabla \times \vec{E}$ är nollskild bara när magnetfältet förändras.
- **Magnetiska fält:** $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ alltid (inga magnetiska monopoler), $\nabla \times \vec{B}$ ges av strömtätheten.
- **Vätskeflöden:** divergensen är källtätheten, rotationen är virveltätheten.
- **Värmeledning:** temperatures gradient ger ett strömningsfält vars divergens är värmeproduktion per volym.

Räkneexempel

≡ Exempel 1 — Beräkna och tolka divergensen

Bestäm divergensen för fältet $\vec{F}(x, y) = (x^2, y^2)$ och tolka resultatet geometriskt.

 Lösning

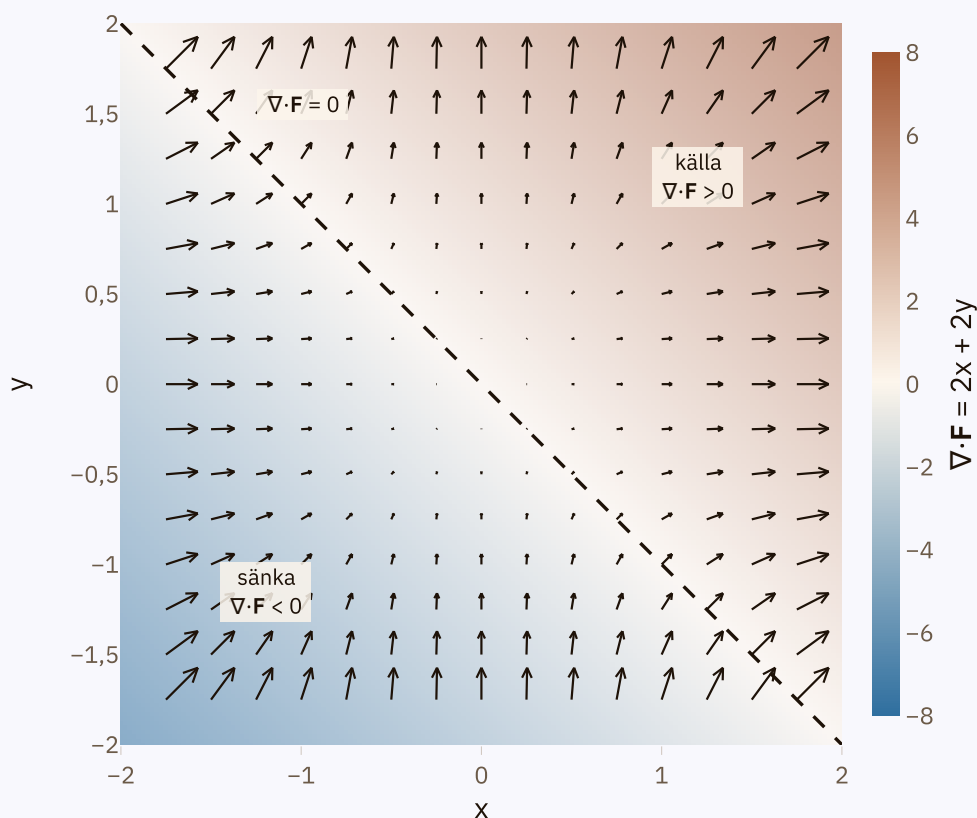
Med $P = x^2$ och $Q = y^2$ får vi

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 2x + 2y = 2(x + y).$$

Tecknet på divergensen avgörs alltså av linjen $x + y = 0$:

Region	$\nabla \cdot \vec{F}$	Tolkning
$x + y > 0$ (uppe/höger)	> 0	källa — vätska produceras
$x + y = 0$ (diagonal)	0	källfri — vätska passerar
$x + y < 0$ (nere/vänster)	< 0	sänka — vätska försvinner

$$\nabla \cdot \vec{F} = 2(x + y)$$



Pilarna växer ut radiellt i första kvadranten (där bägge komponenter är positiva) och pekar inåt mot origo i tredje kvadranten – precis vad teckenanalysen förutsäger. Diagonalen är den enda kurvan där fältet är lokalt källfritt.

Exempel 2 – Rotation i ett skjuvflöde

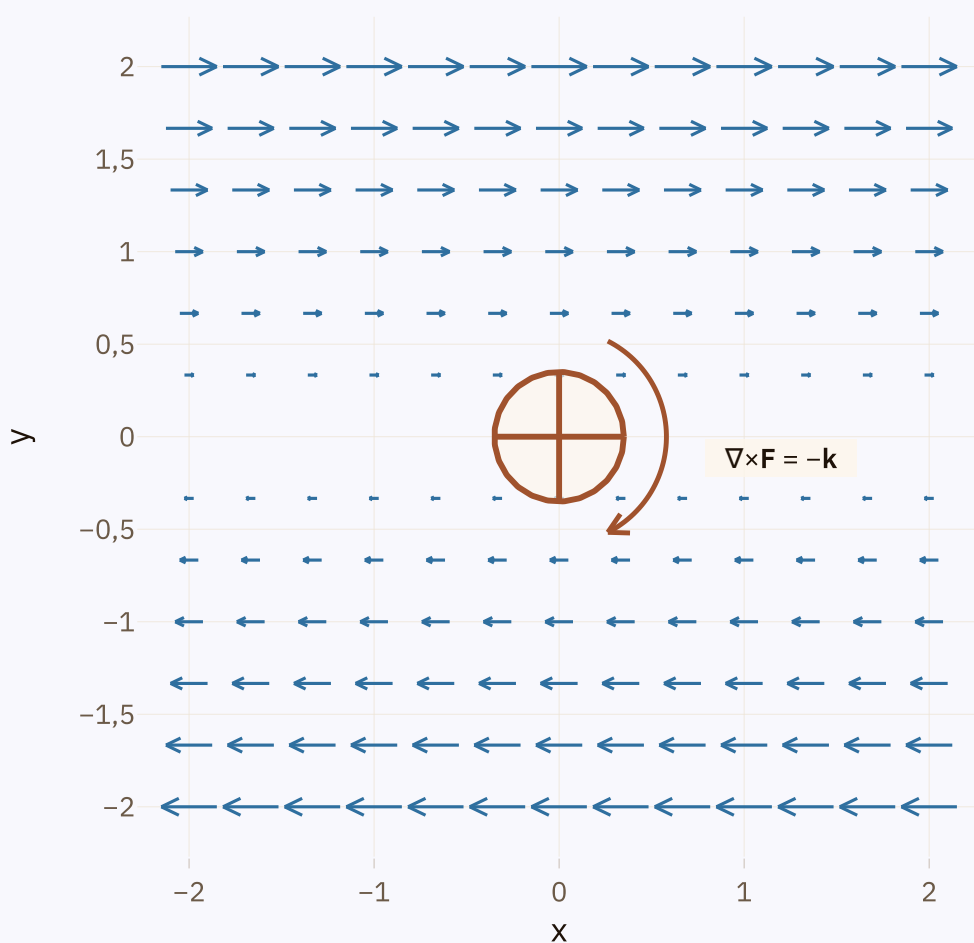
Beräkna $\nabla \times \vec{F}$ för $\vec{F}(x, y, z) = (y, 0, 0)$ – ett rakt flöde där hastigheten ökar med y .

Lösning

Med $P = y, Q = 0, R = 0$ blir

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = (0, 0, -1).$$

$$\nabla \times \vec{F} = -\hat{k}$$



Trots att vätskan rör sig rakt åt höger överallt (ovanför x -axeln) och rakt åt vänster nedanför, är rotationen *konstant* och pekar in i papperet. Förklaringen syns i bilden: skoveln har snabbare ström på sin övre kant än sin nedre — den ena sidan trycks hårdare än den andra och hjulet börjar rotera medurs. Detta är samma fenomen som vattenfallet i exempel-listan ovan: lokal vridning kräver inte böjda strömlinjer, bara att *hastigheten varierar tvärs över skoveln*.

≡ Exempel 3 — Verifiera att $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ (identitet g)

Visa identiteten konkret för $\vec{F}(x, y, z) = (xy, z^2, x^2)$.

Lösning

Steg 1: Beräkna $\nabla \times \vec{F}$.

Med $P = xy, Q = z^2, R = x^2$:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = (0 - 2z, 0 - 2x, 0 - x) = (-2z, -2x, -x)$$

Steg 2: Beräkna divergensen av rotationen.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \frac{\partial(-2z)}{\partial x} + \frac{\partial(-2x)}{\partial y} + \frac{\partial(-x)}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0. \quad \checkmark$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

Anledningen till att termerna alltid kancellerar är likheten av blandade andraderivator (Schwarz sats): $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})$ är en summa där varje blandad andraderivata $\partial^2 F_i / \partial x_j \partial x_k$ dyker upp en gång med + och en gång med −. Det är därför *varje* curlfält är solenoidalt.

Läsning

- [17.1 Gradient, Divergence, and Curl](#)
- [17.2 Some Identities Involving Grad, Div, and Curl](#)

Se även

- [Vektorfält](#)
- [Gradient och riktningsderivata](#)

- Gauss sats
- Stokes sats
- Greens sats
- Flödesintegraler
- Kurvintegraler av vektorfält

Resurser

- [3Blue1Brown: Divergence and curl](#) — den definitiva visuella förklaringen.
 - [Khan Academy: Divergence](#)
 - [Wikipedia: Helmholtz decomposition](#)
-

Gauss sats

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #vektoranalys

Kurs: M0068M **Förkunskaper:** Divergens och rotation, Flödesintegraler, Trippelintegraler

1. Idén – utflöde lika med inre produktion

Gauss sats (även kallad **divergenssatsen**) säger något oerhört naturligt: hur mycket som strömmar *ut* genom randen av en volym är lika med hur mycket som *produceras* inuti. Källor och sänkor på insidan är det enda som syns på utsidan.

Grundtanken

$\nabla \cdot \vec{F}$ mäter lokalt om en punkt är en *källa* (> 0) eller *sänka* (< 0). När man summerar över hela volymen ska det som blir över synas som ett *flöde* ut genom ytan. Det är precis vad satsen säger.

Den binder ihop tre tidigare begrepp:

Lokalt	Globalt
divergens $\nabla \cdot \vec{F}$	trippelintegral $\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dV$
vektorfältets normalkomponent	flöde $\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$

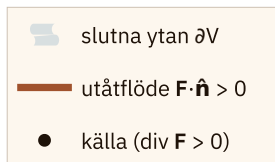
2. Satsen

Gauss sats (divergenssatsen)

Låt V vara en begränsad volym i $\mathbb{R}^3$ med styckvis slät, **utåtorienterad** rand ∂V . Låt $\vec{F}$ vara ett C^1 -vektorfält i en omgivning av V . Då

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

Den vänstra sidan är **flödet** ut genom ∂V . Den högra är “totala produktionen” av $\vec{F}$ i V . Att de är lika är en av kalkylens skönaste likheter.



3. Varför är detta sant?

Tänk er V uppdelad i många små kuber. För en enda liten kub är flödet ut genom dess sex sidor *exakt* $\nabla \cdot \vec{F}$ gånger kubens volym (det är *definitionen* av divergens i gränsen). När man nu summerar över alla kuber:

- de **inre** sidoflödena tar ut varandra — det som lämnar en kub strömmar in i grannen,
- bara de **yttre** sidoflödena överlever — de sitter på ∂V .

Summan av små “lokalt utflöde” blir alltså globalt flöde ut, vilket är exakt vad satsen påstår.

 Anlogi

Greens sats är 2D-versionen — flöde ut genom en plan kurva = dubbelintegral av divergensen. Gauss sats är samma idé en dimension upp. De är båda specialfall av den allmänna **Stokes sats** för differentialformer.

4. Exempel

≡ Exempel 1 — $\vec{F} = \vec{r}$ över valfri volym

Med $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ är $\nabla \cdot \vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3$. Gauss sats ger

$$\oint_{\partial V} \vec{r} \cdot d\vec{S} = 3 \iiint_V dV = \boxed{3 \text{ Vol}(V)}.$$

Användbart faktum. Detta är en formel för volym uttryckt som en ytintegral:

$$\text{Vol}(V) = \frac{1}{3} \oint_{\partial V} \vec{r} \cdot d\vec{S}.$$

Sanity check på enhetssfären. Det stämmer med exempel 3 i **Flödesintegraler**: flödet av $\vec{r}$ ut genom enhetssfären är 4π , och $3 \cdot \frac{4}{3}\pi = 4\pi$. ✓

≡ Exempel 2 — flöde av $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ ut ur enhetskub

Låt $V = [0, 1]^3$ och $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$. Då

$$\nabla \cdot \vec{F} = 2x + 2y + 2z, \quad \iiint_V (2x + 2y + 2z) dV.$$

Per symmetri räcker det att räkna $\iiint_V 2x dV = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 1$ och multiplicera med 3:

$$\Phi = \boxed{3}.$$

Att räkna detta direkt över de **sex** kubsidorna går också, men tar betydligt längre tid. Det är pointen med Gauss sats — den kortar ner räkningar.

≡ Exempel 3 — Gauss lag för elektrostatik

Det elektriska fältet från en punktladdning q är $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{r}/r^3$. Direktkoll visar att $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ utanför origo, men i origo finns en singular källa. För *varje* slutna yta som omsluter origo gäller (med utåtorientering)

$$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Detta är **Gauss lag** — en av Maxwells ekvationer i integralform. I differentialform: $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, där ρ är laddningstätheten.

5. När är Gauss sats användbar?

Tre situationer där satsen verkligen lönar sig

1. **Trippelintegralen är enkel, ytintegralen krånglig.** Ofta är $\nabla \cdot \vec{F}$ konstant eller mycket enkel, så $\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$ blir trivial — medan flödet över en sluten yta med flera släta bitar är mödosamt.
2. **Sluten yta saknar en bit.** Behöver du flödet genom en *öppen* yta S_1 ? Slut den med en hjälpbit S_2 (t.ex. en plan disk) så att $S_1 \cup S_2$ är sluten. Använd Gauss sats på den slutna ytan och dra av Φ_{S_2} — som ofta är enkelt.
3. **Symmetri.** Med sfär-, cylinder- eller boxsymmetri kan satsen användas baklänges för att räkna *fältet* från en känd laddningsfördelning — det är så Coulombs lag härleds från Maxwells ekvationer i fysiken.

6. Antaganden — det fina trycket

- V ska vara en *begränsad* volym med en *snäll* rand (styckvis slät, orienterbar, inåt-/utåt-distinktion meningsfull).
- $\vec{F}$ måste vara C^1 på en omgivning av hela V — inga singulariteter i det inre. I exempel 3 ovan måste man hantera origo separat eftersom $\vec{E}$ är singulärt där.
- ∂V orienteras med **yttre normal**. Inåtorientering byter tecken.

Läsning

- 17.4 The Divergence Theorem in 3-Space

Se även

- [Divergens och rotation](#)
- [Flödesintegraler](#)
- [Trippelintegraler](#)
- [Stokes sats](#)
- [Greens sats](#)

Resurser

- [Khan Academy: Divergence theorem](#)↗
 - [3Blue1Brown: Divergence and curl](#)↗ — bygger intuitionen.
 - [Wikipedia: Divergence theorem](#)↗
-

Stokes sats

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #flervariabelanalys #vektoranalys

Kurs: M0068M **Förkunskaper:** Divergens och rotation, Kurvintegraler av vektorfält, Ytintegraler, Orientering (kurvor och ytor)

1. Idén – randens cirkulation lika med inre rotation

Stokes sats är den tredimensionella generaliseringen av **Greens sats**. Den säger att den totala “snurren” $\nabla \times \vec{F}$ summerad över en yta är detsamma som *cirkulationen* av $\vec{F}$ längs ytans rand.

Grundtanken

Rotation är ett *lokalt* mått på hur fältet snurrar runt en punkt. När man summerar rotationen över en yta tar grannrotationer ut varandra i det inre, och det enda som blir kvar är hur fältet rör sig längs randen. Det är *exakt* vad satsen säger.

Det är samma princip som i **Gauss sats** — lokala bidrag tar ut varandra i det inre och bara randen överlever.

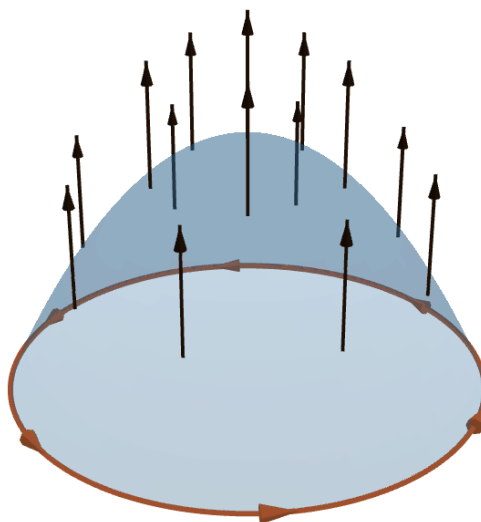
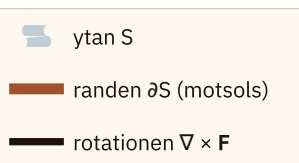
Lokalt	Globalt
rotation $\nabla \times \vec{F}$	flöde $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$
fältet längs randen $\vec{F} \cdot \vec{T}$	cirkulation $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

2. Satsen

Stokes sats

Låt S vara en orienterad styckvis slät yta i $\mathbb{R}^3$ med styckvis slät rand ∂S , orienterad konsekvent enligt högerhandsregeln (se [Orientering \(kurvor och ytor\)](#)). Låt $\vec{F}$ vara ett C^1 -vektorfält på en omgivning av S . Då

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_D \text{curl}(\vec{F}) \cdot \hat{N} dA$$



I bilden ser man en paraboloid-cap med rotationens flödesvektor pekande uppåt genom ytan, och randcirkeln traverserad motsols sett uppifrån — exakt högerhandsorienteringen.

3. Specialfall – Greens sats

Om S ligger plant i xy -planet med uppåtorientering, så är $d\vec{S} = \hat{k} dA$ och $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k} = \partial_x F_2 - \partial_y F_1$. Stokes sats blir då

$$\oint_{\partial S} (F_1 dx + F_2 dy) = \iint_S (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dA,$$

vilket är exakt **Greens sats**. Stokes är alltså Greens uttalad i ett varv högre dimension.

4. Konsekvens – ytan spelar ingen roll

En vacker konsekvens: om S_1 och S_2 är två ytor med *samma* rand C och samma orientering, så ger Stokes sats *samma* värde:

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

Detta är användbart i praktiken – man kan välja den ytan som ger lättast räkning (t.ex. en plan disk istället för en bula).

Konservativa fält

Om $\vec{F}$ är konservativt är $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, så cirkulationen längs *varje* slutna kurva är noll. Det är förklaringen till varför kurvintegralen då bara beror på ändpunkterna.

5. Exempel

Exempel 1 – ren kontroll

Låt $\vec{F} = (-y, x, 0)$ och S enhetsdisken i xy -planet med uppåtorientering.

Höger sida. $\nabla \times \vec{F} = (0, 0, 2)$, så

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_D 2 \, dA = 2\pi.$$

Vänster sida. ∂S är enhetscirkeln motsols, $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$:

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} ((-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t)) dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi. \quad \checkmark$$

Exempel 2 – bytt yta, samma resultat

Beräkna $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ för $\vec{F} = (y, -x, xyz)$ och C enhetscirkeln i xy -planet, traverserad motsols.

Direkt. Stoppa in $z = 0$ längs $C: \vec{r} = (y, -x, 0)$, vilket på enhetscirkeln blir $(\sin t, -\cos t, 0)$, och $d\vec{r} = (-\sin t, -\cos t, 0) dt$. Då blir integranden $-\sin^2 t - \cos^2 t = -1$, så

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -2\pi.$$

Via Stokes med paraboloid-cap. Välj S som övre halvsfären eller paraboloid-cap med samma rand C och uppåtorientering. Då räcker det att integrera $(\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ — och eftersom svaret är *ytberoende-fritt* enligt §4 kan man välja den enklaste ytan. Det är vinsten med Stokes.

6. När är Stokes sats användbar?

Tre situationer där satsen sparar arbete

1. **Krångligt vektorfält längs randen, enkel rotation.** Är $\nabla \times \vec{F}$ enkel (eller noll) blir högersidan trivial även när vänstersidan ser besvärlig ut.
2. **Krånglig rand, enkel rotation över en enkel yta.** Om ∂S består av många delar kan man slippa kurvintegralen helt via $\iint_S$.
3. **Bytt yta.** Behöver du beräkna en ytintegral $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$? Byt S mot en *enklare* yta med samma rand — kanske en plan disk. Samma rand $\Rightarrow$ samma värde.

7. Räknemetod

Räknescema

1. **Identifiera S och ∂S** — och kolla att randen är *en* sluten kurva (eller flera, då med rätt tecken).
2. **Bestäm orienteringen** av S (välj normal) och därmed av ∂S (högerhandsregel).
3. **Räkna rotationen $\nabla \times \vec{F}$** — eller observera att den är noll.
4. **Välj sida av satsen** beroende på vad som är enklast — ytintegralen eller kurvintegralen.
5. **Räkna.**

Krav på fältet

Stokes sats kräver C^1 på en omgivning av *hela* S — inte bara randen. Om $\vec{F}$ är singulärt i någon punkt på S måste den punkten plockas bort eller satsen tillämpas på ett mindre område.

Läsning

- 17.5 Stokes's Theorem

Se även

- [Greens sats](#)
- [Gauss sats](#)
- [Divergens och rotation](#)
- [Flödesintegraler](#)
- [Kurvintegraler av vektorfält](#)
- [Orientering \(kurvor och ytor\)](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Divergence and curl](#)[↗]
 - [Khan Academy: Stokes' theorem](#)[↗]
 - [Wikipedia: Stokes' theorem](#)[↗]
-

Hur fungerar en antenn

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#fysik #elektromagnetism #antenn

Kurs: F0051T **Förkunskaper:** Fysikaliska samband och Maxwells ekvationer

En antenn är en ledare i vilken strömmen accelereras. Accelererade laddningar utstrålar elektromagnetiska vågor.

Princip

1. Växelström i antennen ger oscillerande laddningsfördelning.
2. Tidsvarierande $\vec{E}$ skapar tidsvarierande $\vec{B}$ (Maxwell).
3. Fälten propagerar ut som en EM-våg med ljusets hastighet.

Storleksskala

Optimal antenn är i storleksordning $\lambda/2$ (halv våglängd). För FM-radio (~ 100 MHz, $\lambda \approx 3$ m) är en vanlig dipolantenn ca 1,5 m.

Mottagning

Omvänd process: inkommande EM-våg driver laddningar i antennen $\rightarrow$ inducerad spänning kan detekteras.

Läsning

- Chapter 32 Electromagnetic Waves

Se även

- Fysikaliska samband och Maxwells ekvationer
- Medieegenskaper

Vingdesign utan dator

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#fysik #aerodynamik #inspiration

Kurs: F0051T

Klassisk 2D-vingteori (Kutta–Joukowski) härleder lyftkraft utan datorer genom begreppet **cirkulation**.

Cirkulation

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

där C är en sluten kurva runt vingprofilen.

Kutta–Joukowski sats

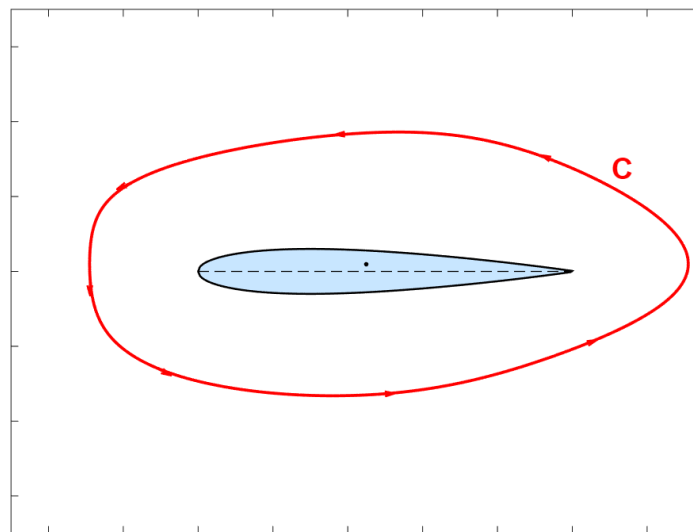
Lyftkraft per längdenhet:

$$L' = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma$$

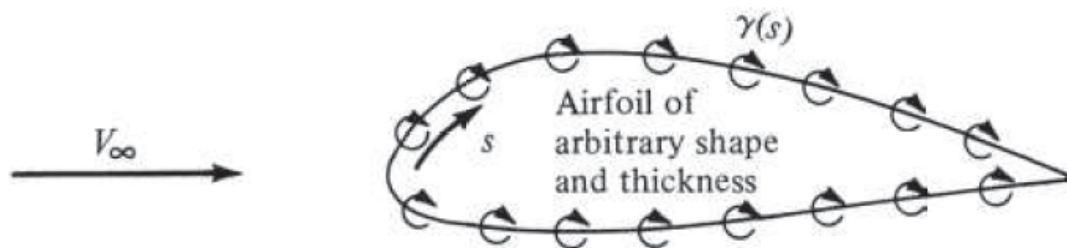
Kutta-villkor

Kräver att strömningen lämnar vingens bakkant glatt, vilket bestämmer cirkulationen entydigt.

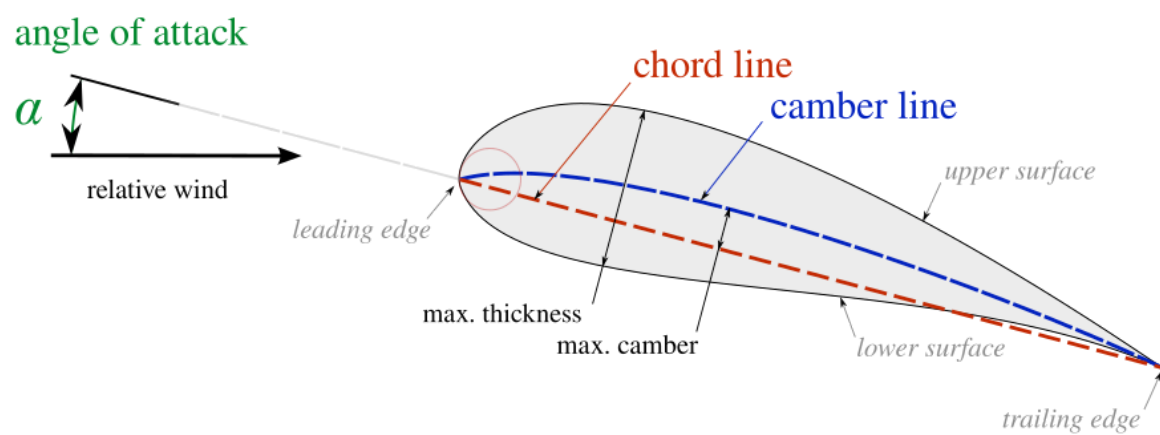
Illustrationer



Cirkulation definition



Cirkulation gamma



Vingprofilens nomenklatur

Läsning

- 12.5 Bernoulli's Equation

Se även

- Divergens och rotation
 - Vektorfält
-

Fysikaliska samband och Maxwells ekvationer

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#fysik #elektromagnetism

Kurs: F0051T **Förkunskaper:** Vektorfält, Divergens och rotation

Maxwells fyra ekvationer på differentialform:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (\text{Gauss})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{inga magnetiska monopoler})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Faraday})$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Ampère-Maxwell})$$

Tolkning

- Elektrisk laddning är källa till $\vec{E}$.
- Magnetfält har inga källor.
- Tidsvarierande magnetfält inducerar elektriskt fält.
- Ström och tidsvarierande elektriskt fält ger magnetfält.

Tillsammans ger ekvationerna elektromagnetiska vågor (ljus).

Läsning

- Chapter 32 Electromagnetic Waves

Se även

- Divergens och rotation
- Hur fungerar en antenn

Resurser

- [3Blue1Brown: Maxwell's equations visualized](#) 
-