

M0067M

Linjär algebra

Kurskompendium från Pelles Moln · 23 noter · 2026-10-19
pellesmoln.org/kurser/M0067M

Innehåll

Vecka 1 — Ekvationssystem och matriser

Linjära ekvationssystem	3
Matriser	14
Matrisinvers	16
Elementärmatriser	18

Vecka 2 — Linjära avbildningar och determinanter

Linjära avbildningar	19
Determinanter	32

Vecka 3 — Vektorer och euklidiska vektorrum

Vektorer	38
Skalarprodukt	41
Ortogonalitet	42
Geometri för linjära system	43
Kryssprodukt	45

Vecka 4 — Allmänna vektorrum

Vektorrum	52
Linjärt beroende och oberoende	53
Bas och koordinater	54
Dimension	73
Basbyte	88

Vecka 5 — Egenvärden och diagonalisering

Kolonnrum, radrum och nollrum	103
Egenvärden och egenvektorer	104
Diagonalisering	120

Vecka 6 — Skalarproduktsrum

Skalarproduktsrum	141
Gram-Schmidt-processen	164

Vecka 7 — Bästa approximation

Minstakvadratmetoden	165
Funktionsapproximationer	167

Linjära ekvationssystem

19 okt. 2026, 8 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #matris

Linjära ekvationssystem

Antal obekanta	Linjära ekvation	Linjärt uttryck
1	$3x = 5 \iff x = \frac{5}{3}$	$3x$
2	$3x + 5 = 2y$	$5x - y$
3	$8x + 2y - z = 0$	$8x + 2y - z$
$x_1, \dots, x_n$ obekanta	$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$	$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$

($a_1, \dots, a_n, b$ är givna reella tal)

Sats för linjära ekvationssystem

Antalet lösningar är alltid 0, 1, eller ∞

☰ En lösning – linjerna skär varandra

```
1 ---
2 title: Linjärt ekvationssystem
3 xLabel: x
4 yLabel: y
5 bounds: [-2, 6, -2, 6]
6 grid: true
7 ---
8 f(x) = (7 - 2x) / 3
9 g(x) = x - 1
```

☰ Ingen lösning — parallella linjer

```

1 ---
2 title: Parallella linjer
3 xLabel: x
4 yLabel: y
5 bounds: [-2, 6, -1, 5]
6 grid: true
7 ---
8 f(x) = -x + 3
9 g(x) = -x + 1

```

☰ Oändligt många lösningar — samma linje

```

1 ---
2 title: Samma linje
3 xLabel: x
4 yLabel: y
5 bounds: [-2, 6, -1, 5]
6 grid: true
7 ---
8 f(x) = -x + 3
9 g(x) = -x + 3

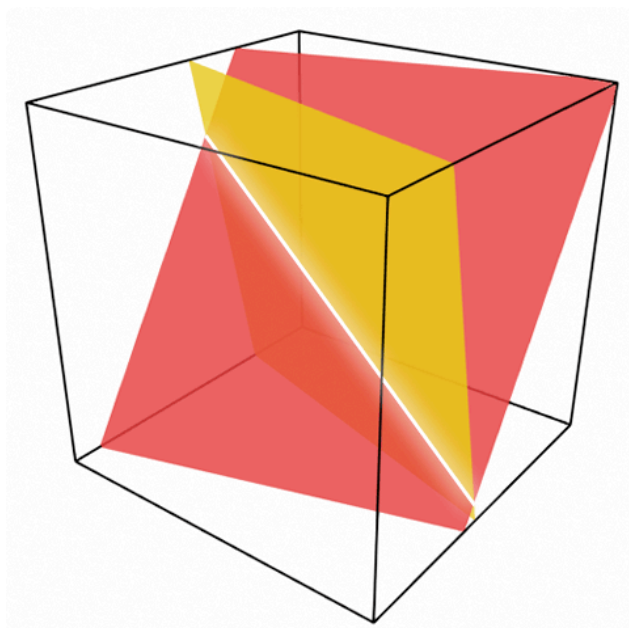
```

Geometrisk tolkning

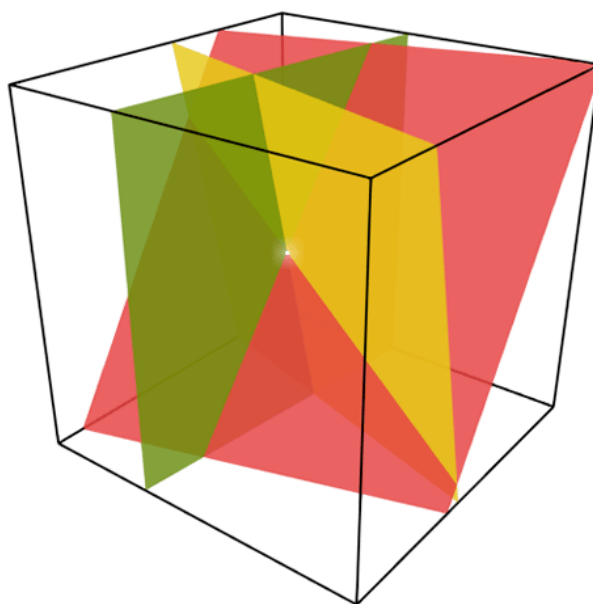
I ett system av linjära ekvationer är lösningen de punkter som uppfyller **alla** ekvationer — dvs. skärningarna.

Antal ekvationer	Obekanta	Geometri	Lösning
2	2	Linjer i planet	Punkt (eller linje/tom)
2	3	Plan i rummet	Linje

Antal ekvationer	Obekanta	Geometri	Lösning
3	3	Plan i rummet	Punkt



2 plan → skärning är en linje



3 plan → skärning är en punkt

Homogena system

Ett linjärt ekvationssystem är **homogent** om högerledet är noll i alla ekvationer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Egenskaper:

- Har alltid minst den **triviala lösningen**: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$
- Om fria variabler finns → oändligt många lösningar
- Homogena system har **aldrig** exakt noll lösningar

Observation

Ett homogent system med fler obekanta än ekvationer har alltid oändligt många lösningar (icke-triviala lösningar finns).

Klammernotation

Denna notation är vanlig:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Men det finns effektivare notation: **matriser**. Syftet med matrisform är att det gör det möjligt (lättare) att tillämpa [Linjära ekvationssystem](#).

Från klammernotation till matrisnotation

Ett linjärt ekvationssystem kan skrivas om till **utökad koefficientmatris**:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \implies \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Tillvägagångssätt

1. **Koefficienter** till vänster om strecket
 2. **Högerled** (b -värden) till höger om strecket
 3. Varje **rad** motsvarar en ekvation
 4. Varje **kolonn** (före strecket) motsvarar en obekant
-

Exempel med tre obekanta

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \implies \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

Allmänt

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Lösningsfall vid Gausselimination

Fall	Kännetecken	Antal lösningar
Ingen lösning	Rad: $[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ b]$	b där $b \neq 0$
Unik lösning	Lika många pivoter som obekanta	1
Oändligt många	Fria variabler finns (och konsistent)	∞

Se även

- [Linjära ekvationssystem](#)
- [Matriser](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Inverse matrices, column space and null space \(kap 7\)](#)  GeoGebra: System of Linear Equations — grafisk lösning av 2×2-system



- matrixcalc.org — lös system online - [Wikipedia: System of linear equations] (https://en.wikipedia.org/wiki/System_of_linear_equations)

Gausselimination

1. Bundna och fria variabler

3B1B: Inverse matrices, column space, null space [↗](#)

Om lösning finns för alla värden av en variabel t så är t en **fri** variabel, medan resten är **bundna**.

≡ **Exempel: Lösningen** $(5 - t, 2 - t, t)$

Här är t fri variabel.

Om man får en ekvation där t.ex. $0 = 1$ saknas lösning (inkonsistent system).

2. Pivotelement

Definition: Det första nollskilda elementet på en rad kallas **pivotelement**. Om det är en etta kallas det en **ledande etta**.

I en matris markeras pivotelementet ofta med en ruta:

$$\left[\boxed{1} \quad 1 \quad -3 \quad | \quad 4 \right]$$

Från ekvation till lösning

Givet $x + y + 3z = 4$ med x som pivotkolumn:

Sätt $z = s, y = t$ (fria variabler):

$$x = 4 - y - 3z = 4 - t - 3s$$

Lösningen:

$$(x, y, z) = (4 - t - 3s, t, s) = (4, 0, 0) + t(-1, 1, 0) + s(-3, 0, 1)$$

3. Trappstegsform (Echelon Form)

En matris är på **trappstegsform** om:

1. Nollraderna är samlade längst ned
2. Pivotelement i en rad är alltid till höger om pivotelementet i raden ovanför

☰ Exempel på trappstegsform

Pivotelementet markeras med ruta:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 5 & 2 & 2 & * \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 6 & 2 & * \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 5 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * \end{array} \right]$$

4. Reducerad trappstegsform (Reduced Row Echelon Form)

En matris är på **reducerad trappstegsform** om:

1. Den är på trappstegsform
2. Alla pivoter är ettor
3. Varje pivot är det enda nollskilda elementet i sin kolumn

☰ Exempel på reducerad trappstegsform

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 5 & 2 & 0 & * \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 6 & 0 & * \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * \end{array} \right]$$

Sats

Varje matris är radekvivalent med minst en matris på trappstegsform och med **precis en** på reducerad trappstegsform.

5. Gausselimination – Exempel

[interaktiv GeoGebra](#)

☰ Reducera till trappstegsform

Startmatris:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{array} \right]$$

Steg 1: Byt $R_1 \leftrightarrow R_4$ för att få pivotelement i första kolumnen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{array} \right]$$

Steg 2: $R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ och $2R_1 + R_3 \rightarrow R_3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{array} \right]$$

Fortsätt eliminera under pivoten i kolumn 2...

Resultat: Variablerna som tillhör pivotkolumner är **bundna**, resten är **fria**.

6. Tolka lösningen

Variabeltyp	Beskrivning
Bunden	Tillhör en pivotkolumn, bestämd av de fria
Fri	Kan sättas till valfritt värde ($s, t, u, \dots$)

☰ Exempel: Parametriserad lösning

Om x är bunden och y, z är fria med $y = s, z = t$:

$$x = -2 - 2s - 3t$$

Lösningen på vektorform:

$$(x, y, z) = (-2, 0, 0) + s(-2, 1, 0) + t(-3, 0, 1)$$

Notation för fria variabler

Sätt fria variabler som: $s, t, u, v, \dots$

7. Homogena system

Om högerledet är noll i alla ekvationer i ett linjärt ekvationssystem är det **homogent**.

Då är alltid $\vec{x} = \vec{0}$ (triviala lösningen) en lösning:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0$$

8. Ekvationssystem med parameter

[interaktiv kalkylator](#)

☰ Lös systemet beroende på parametern a

Startmatris:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Steg 1: $R_1 \cdot (-1) + R_2 \rightarrow R_2$ och $R_1 \cdot (-1) + R_3 \rightarrow R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2 - 1 & 0 & a - 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

Steg 2: Byt $R_2 \leftrightarrow R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & a^2 - 1 & 0 & a - 1 \end{array} \right]$$

Steg 3: $R_2 \cdot (-(a^2 - 1)) + R_3 \rightarrow R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & (a - 1) + 2(a^2 - 1) \end{array} \right]$$

Fallanalys: Antalet pivoter beror på om $a^2 - 1 = 0$

Fall 1: $a^2 - 1 \neq 0$ (dvs. $a \neq \pm 1$)

Tre pivoter $\Rightarrow x, y, z$ bundna (en unik lösning):

$$z = \frac{(a-1) + 2(a^2-1)}{a^2-1} = \frac{2a+3}{a+1}$$

Fall 2: $a = 1$

Analysera separat...

Fall 3: $a = -1$

Analysera separat...

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Inverse matrices, column space and null space \(kap 7\)](#) — visar sambandet mellan pivoter, fria variabler och nollrum
- [3Blue1Brown: Nonsquare matrices \(kap 8\)](#) — hur rader/kolumner påverkar Lösningsrummet
- [MIT 18.06: Lecture 2 — Elimination with Matrices](#) — Gilbert Strangs klassiska föreläsning

Interaktiva verktyg

- [eMathHelp: Gauss-Jordan Calculator](#) — beräkna med visade steg
- [matrixcalc.org: System of Linear Equations](#)

Wikipedia

- [Gaussian elimination](#)
- [Row echelon form](#)

Fördjupning

- [Immersive Linear Algebra — Chapter 6: The Matrix](#) — interaktiv 3D-bok
- [Georgia Tech: Interactive Linear Algebra](#) — fri interaktiv lärobok

Matriser

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #linjär-algebra #matris

1. Matrisnotation

3B1B: Vectors, what even are they? [↗](#)

1.1 Kolumnvektorer

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3 \quad \cdots \quad \vec{a}_n]$$

1.2 Matris-vektormultiplikation

3B1B: Linear combinations, span, and basis vectors [↗](#)

Multiplitera en radmatris med en kolumnmatris:

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

Detta är en **linjärkombination** av kolumnvektorerna.

2. Transponat

Definition: Transponatet A^T fås genom att byta rader och kolumner.

$$A_{ij}^T = A_{ji}$$

Symmetrisk matris: Om $A^T = A$

3. Spåret (Trace)

Definition: Spåret av en kvadratisk matris är summan av diagonalelementen:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

4. Översättning mellan representationer

Ekvationssystem $\longleftrightarrow$ Matris $\longleftrightarrow$ Vektorekvation $\longleftrightarrow$ Utökad koefficient-matris $\longleftrightarrow$ Gausselimination

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Vectors, what even are they? \(kap 1\)](#) — grundläggande vektorbegrepp och notation
- [3Blue1Brown: Linear combinations, span, and basis vectors \(kap 2\)](#) — linjärkombinationer och kolumnvektorer
- [3Blue1Brown: Linear transformations and matrices \(kap 3\)](#) — hur matriser representerar transformationer

Interaktiva verktyg

- [matrixcalc.org](#) — matrisberäkningar (determinant, invers, multiplikation)
- [Desmos Matrix Calculator](#) — matrisoperationer med stegvisa lösningar

Wikipedia

- [Matrix \(mathematics\)](#)
- [Transpose](#)
- [Trace \(linear algebra\)](#)
- [Augmented matrix](#)

Fördjupning

- [Immersive Linear Algebra — Chapter 6: The Matrix](#) — interaktiv 3D-bok
-

Matrisinvers

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #matris

Kurs: M0067M Föreläsningar: **Matriser**, Determinanter

En kvadratisk matris A är **inverterbar** om det finns A^{-1} med

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Villkor för inverterbarhet

Följande är ekvivalenta:

- A är inverterbar
- $\det A \neq 0$
- $Ax = 0$ har endast trivial lösning
- Kolonnerna är **linjärt oberoende**
- A har full rang

2×2-inversen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Allmänt: Gauss-Jordan

Radreducera $[A \mid I]$ till $[I \mid A^{-1}]$.

Räkneregler

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Se även

- **Matriser**

- Elementärmatrises
 - Determinanter
-

Elementärmatriser

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #matris

Definition

En elementärmatrix är en matris som erhålls genom att utföra **en** elementär radoperation på enhetsmatrisen I .

Tre typer

Typ 1: Radbyte

Byt plats på rad i och rad j .

Typ 2: Skalning

Multiplitera rad i med en skalär $c \neq 0$.

Typ 3: Radaddition

Addera c gånger rad j till rad i .

Egenskaper

- Alla elementärmatriser är inverterbara
- Inversen till en elementärmatrix är också en elementärmatrix
- EA utför radoperationen på A
- Varje inverterbar matris kan skrivas som en produkt av elementärmatriser

Resurser

- [3Blue1Brown: Inverse matrices, column space and null space \(kap 7\)](#) 
 - [Wikipedia: Elementary matrix](#) 
-

Linjära avbildningar

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #linjär-avbildning #matris

Kapitel: 1.8–1.9 · **Ämne:** Linjär algebra **Förkunskaper:** Matrisinvers, Matriser

1. Utökad sats för inverterbara matriser

Sats (TFAE för $n \times n$ matris)

Följande är ekvivalenta:

1. A är inverterbar
2. $A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$
3. $A\vec{x} = \vec{b}$ har lösning för varje $\vec{b}$
4. $A\vec{x} = \vec{b}$ har **precis en** lösning för varje $\vec{b}$

Höger- och vänsterinvers

För $n \times n$ matriser A, B, C :

- $AC = I \Rightarrow A^{-1} = C$ (högerinvers)
- $BA = I \Rightarrow A^{-1} = B$ (vänsterinvers)

2. Linjära avbildningar

[3B1B: Linear transformations and matrices](#)

2.1 Definition

En funktion $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är en **linjär avbildning** om:

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{T} A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$$

Vi skriver $T = T_A$ där $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$.

2.2 Egenskaper

Egenskap	Definition
Additiv	$T_A(\vec{x} + \vec{y}) = T_A(\vec{x}) + T_A(\vec{y})$
Homogen	$T_A(c\vec{x}) = cT_A(\vec{x})$
Linjär	$T_A(c\vec{x} + d\vec{y}) = cT(\vec{x}) + dT(\vec{y})$

3. Fundamental sats

3.1 Sats

En avbildning $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är en matrisavbildning (dvs. $T = T_A$ för någon matris A) om och endast om:

1. $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$ (additiv)
2. $T(c\vec{x}) = cT(\vec{x})$ (homogen)

$\text{Linjär} \iff \text{Matrisavbildning}$

3.2 Sats: Unikhet

Om $T_A(\vec{x}) = T_B(\vec{x})$ för alla $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, då är $A = B$.

4. Standardbasvektorer och standardmatrisen

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definition: Standardmatrisen för en linjär avbildning T är:

$A = [T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \quad \dots \quad T(\vec{e}_n)]$

där $\vec{e}_i$ är standardbasvektorerna.

☰ Bestäm standardmatrisen

Givet $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definierad av:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Beräkna:

$$T(\vec{e}_1) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(\vec{e}_2) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Standardmatrisen:

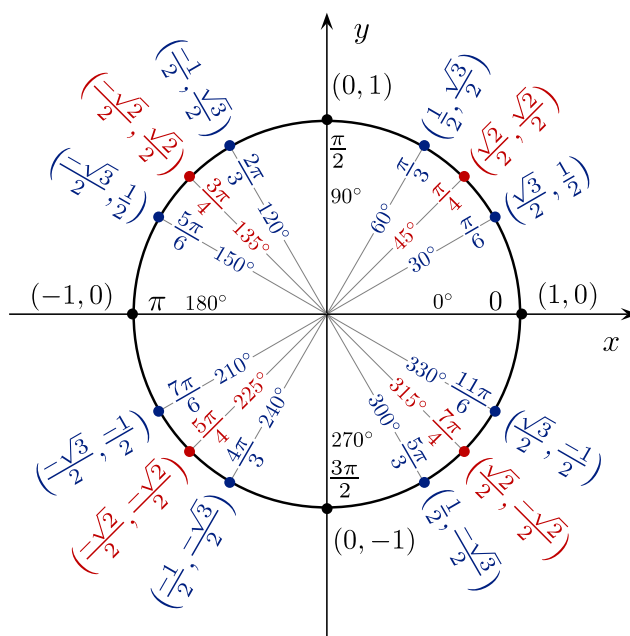
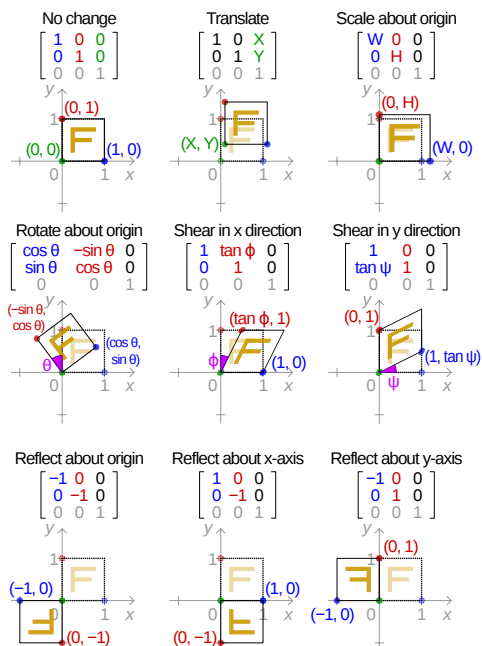
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Två typer av uppgifter

Fråga	Beskrivning
"På vad avbildas $\vec{v}$?"	Beräkna $T(\vec{v}) = A\vec{v}$
"Vad avbildas på $\vec{w}$?"	Lös $A\vec{x} = \vec{w}$

6. Linjära operatorer i $\mathbb{R}^2$

3B1B: Linear transformations [↗](#) · interaktiv GeoGebra [↗](#)



6.1 Spegling

Spegling genom en linje som går genom origo.

Tillvägagång: Gå vinkelrätt mot speglinglinjen och gå lika långt åt andra hållet.

Spegling	Matris
I x-axeln	$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
I y-axeln	$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Spegling	Matris
----------	--------

I linjen $y = x$	$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
------------------	--

 Varför måste speglinglinjen gå genom origo?

Annars är avbildningen inte linjär (den bevarar inte nollvektorn).

6.2 Projektion

Ortogonal projektion på en linje genom origo.

Projektion	Matris
------------	--------

På x-axeln	$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
------------	--

På y-axeln	$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
------------	--

På linjen $y = x$	$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
-------------------	--

6.3 Rotation i $\mathbb{R}^2$

Rotation moturs med vinkel θ :

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Härledning:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$R_\theta(\vec{x}) = \begin{pmatrix} r \cos(\phi + \theta) \\ r \sin(\phi + \theta) \end{pmatrix}$$

Använd additionsformlerna för att få rotationsmatrisen.

☰ **Rotation $\frac{\pi}{3}$: Vad avbildas på $(1, 2)$?**

$$R_{\frac{\pi}{3}} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Lös $R_{\frac{\pi}{3}} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

✎ **Rotation medurs**

30° medurs = -30° moturs, så använd R_{-30°

7. Sammansättningar av avbildningar

3B1B: Matrix multiplication as composition

7.1 Definition

Givet:

- $S : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$

Sammansättningen:

$$S \circ T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (S \circ T)(\vec{x}) = S(T(\vec{x}))$$

7.2 Satser

Sats 1: Om S och T är linjära, så är $S \circ T$ linjär.

Sats 2: Om $S = S_A$ och $T = T_B$, så är:

$$S \circ T = T_{AB}$$

Bevis: $(S \circ T)(\vec{x}) = S(T(\vec{x})) = S(B\vec{x}) = A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}$

Formel:

$$T_A \circ T_B = T_{AB}$$

⚠ Matrimultiplikation är ej kommutativ

$AB \neq BA$ i allmänhet! Ordningen spelar roll.

✎ Kan man alltid gå tillbaka?

Nej, det kräver att avbildningen är **injektiv** (en-till-en).

8. Inverser av linjära avbildningar

Sats

$$T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$$

Bevis:

$$T_{A^{-1}} \circ T_A(\vec{x}) = T_{A^{-1}}(A\vec{x}) = A^{-1}(A\vec{x}) = I\vec{x} = \vec{x}$$

✎ Krav

Avbildningen måste vara $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (kvadratisk matris).

9. Exempel: Sammansatt avbildning

☰ Rotation följt av spegling

Problem: Bestäm matrisen för avbildningen som:

1. Först roterar $\frac{\pi}{3}$ moturs
2. Sedan speglar i x-axeln

På vad avbildas $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Steg 1: Rotationsmatris

$$R_{\frac{\pi}{3}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Steg 2: Speglingsmatris (i x-axeln)

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Steg 3: Sammansatt matris (spegling $\circ$ rotation = $S \cdot R$)

$$S \cdot R_{\frac{\pi}{3}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Steg 4: Avbilda vektorn

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}$$

10. Kvadrater av operatorer

Operator	Beräkning	Resultat
Spegling S (i $y = x$)	$S^2 = S \circ S$	$S^2 = I$
Projektion P (på $y = x$)	$P^2 = P \circ P$	$P^2 = P$ (idempotent)
Rotation R_θ	$R_\theta^2 = R_\theta \circ R_\theta$	$R_\theta^2 = R_{2\theta}$

≡ Beräkningar**Spegling i $y = x$:**

$$S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Projektion på $y = x$:

$$P^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = P$$

Rotation:

$$R_\theta^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} = R_{2\theta}$$

11. Inverser av operatorer

Operator	Invers	Kommentar
Spegling S	$S^{-1} = S$	Spegling är sin egen invers
Projektion P	Existerar ej	Singulär matris
Rotation R_θ	$R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$	Rotera tillbaka

⚠ Varför är projektionsmatrisen ej inverterbar?

Den är **singulär** — flera vektorer avbildas på samma punkt. Projektionsmatriser är **aldrig** inverterbara.

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Linear transformations and matrices \(kap 3\)](#) — visuellt vad linjära avbildningar gör med rummet
- [3Blue1Brown: Matrix multiplication as composition \(kap 4\)](#) — sammansättningar av avbildningar, hur sammansatta avbildningar motsvarar matrismultiplikation
- [3Blue1Brown: Three-dimensional linear transformations \(kap 5\)](#) — avbildningar i 3D
- [3Blue1Brown: Inverse matrices, column space and null space \(kap 7\)](#) — inversa avbildningar, singulära matriser

Interaktiva verktyg

GeoGebra: Matrix Transformations — applicera matriser på former, se rotation/spegling/skalning



GeoGebra: 2D Linear Transformations — dra basvektorer, se effekten



GeoGebra: Matrix Representation of Rotation — rotationsmatriser visualiserade



- [Falstad: Matrix Simulation](#) — interaktiv 2D-transformation med determinant och egenvärden
- [MatVis — Interactive Matrix Visualization](#) — inspirerad av 3B1B, sliders för matriskomponenter, egenvektorer
- [Desmos: Linear Transformations](#)
- [Visualize It: Linear Transformations](#) — skalning, rotation, skjuvning

Wikipedia

- [Linear map](#)
- [Transformation matrix](#)
- [Rotation matrix](#)
- [Projection \(linear algebra\)](#)
- [Function composition](#)

Fördjupning

- [3Blue1Brown: Lesson page — Linear transformations](#) — interaktiva övningar
 - [3Blue1Brown: Lesson page — Matrix multiplication](#) — interaktiva övningar
 - [Georgia Tech: Interactive Linear Algebra](#) — fri interaktiv lärobok
-

Determinanter

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #determinant #matris

Kapitel: 2.1–2.3 · **Ämne:** Linjär algebra **Förkunskaper:** Matriser, Linjära ekvationssystem

1. Determinanter – Översikt

[3B1B: The determinant](#)

Determinanter är definierade för **kvadratiska matriser** ($n \times n$).

Notation

$$\det(A) = |A|$$

2. Beräkning av determinanter

2.1 1×1 matris

$$\det([a]) = a$$

2.2 2×2 matris

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \boxed{ad - bc}$$

2.3 $n \times n$ matris – Kofaktorutveckling

Stryk rad i och kolumn j , ta determinanten av det som blir kvar.

Minor: M_{ij} = determinanten av $(n - 1) \times (n - 1)$ matrisen

Kofaktor:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Använd **utveckling efter rad eller kolumn** (rekursiv definition):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot c_{1j}$$

där c_{1j} är kofaktorn.

Teckenmönster för kofaktorer

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \end{bmatrix}$$

Komplexitet

För en $n \times n$ matris ger utveckling $n!$ operationer.

3. Utveckling efter rad eller kolumn

Utveckling efter rad 1:

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \dots + a_{1n}c_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}c_{1j}$$

Utveckling efter kolumn j :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}c_{ij}$$

Sats

Utveckling efter **vilken rad eller kolumn som helst** ger samma determinant.

Beräkna determinanten

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Utveckla efter rad 1:

$$\begin{aligned}
 &= 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} - 6 \det \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + 7 \det \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \\
 &= 3(-4) - 6(16) + 7(5) = -12 - 96 + 35 = -73
 \end{aligned}$$

☰ Välj rad/kolumn med många nollor

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Utveckla efter **kolumn 4** (tre nollor!):

$$= -(-1) \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Fortsätt utveckla...

4. Viktiga satser

Sats	Beskrivning
$\det(A) = \det(A^T)$	Determinanten är samma för transponatet
Triangulär matris	$\det$ = produkten av diagonalelementen
$\det(I) = 1$	Identitetsmatrisens determinant
$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$	Multiplikativ egenskap
$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ inverterbar	Kriterium för inverterbarhet

Transponat

$$\boxed{\det(A) = \det(A^T)}$$

Triangulära matriser

För en triangulär matris (över- eller undertriangulär) är determinanten **produkten av diagonalelementen**.

Linjäritet

Determinanten är **linjär i varje rad och kolumn**:

- Homogen: $\det(kA) = k^n \det(A)$ för $n \times n$ matris
- Additiv i varje rad/kolumn separat

5. Effekt av radoperationer

Operation	Effekt på det
Byta plats på två rader	$\det \rightarrow -\det$
Multipluera rad med k	$\det \rightarrow k \cdot \det$
Addera multipel av rad till annan	det oförändrad

Konsekvens

Om två rader (eller kolumner) är:

- **Lika:** $\det(A) = 0$
- **Multiplar av varandra:** $\det(A) = 0$

6. Två metoder för att beräkna determinant

1. **Utveckling efter rad/kolumn** — Välj rad/kolumn med många nollor
2. **Gausseliminera till triangulär form** — Ta produkten av diagonalen

Beräkna med elementära matriser

Grundidé: Om E är **elementär matris** så gäller:

$$\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A)$$

Determinanter för elementära matriser:

- Multipluera rad med k : $\det(E) = k$
- Addera multipel: $\det(E) = 1$
- Byta rader: $\det(E) = -1$

Beräkna determinant med Gausselimination

Metod: Reducera till triangulär form och ta produkten av diagonalen.

Exempel

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Två identiska rader $\Rightarrow \det = 0$

Annat exempel med radoperationer:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 10R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{pmatrix}$$

$$\det = 1 \cdot 1 \cdot (-55) = -55$$

7. Singulära matriser

Definition: En matris är **singulär** om den ej är inverterbar.

$$A \text{ singulär} \iff \det(A) = 0$$

8. Cramers regel

3B1B: Cramer's rule, explained geometrically

8.1 Lemma

Om AB är inverterbar så är både A och B inverterbara.

8.2 Cramers regel

För systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ med $\det(A) \neq 0$:

$$x_j = \frac{\det(A_j(\vec{b}))}{\det(A)}$$

där $A_j(\vec{b})$ är matrisen A med kolumn j ersatt av $\vec{b}$.

Se även

- [Linjära ekvationssystem](#)
 - [Matriser](#)
 - [Cramers regel](#)
-

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: The determinant \(kap 6\)](#) [↗] — geometrisk tolkning av determinanten som area/volym
- [3Blue1Brown: Cramer's rule, explained geometrically \(kap 12\)](#) [↗] — visuell förklaring av Cramers regel
- [3Blue1Brown: Inverse matrices, column space and null space \(kap 7\)](#) [↗] — singulära matriser och $\det = 0$

Interaktiva verktyg

- [matrixcalc.org: Determinant Calculator](#) [↗] — beräkna med visade steg
- [Falstad: Matrix Simulation](#) [↗] — se hur determinanten förändras
- [Desmos Matrix Calculator](#) [↗]
- [matrixcalc.org](#) [↗] — beräkna determinanter online

Wikipedia

- [Determinant](#) [↗]
- [Cramer's rule](#) [↗]
- [Cofactor expansion](#) [↗]

Fördjupning

- [Immersive Linear Algebra — Chapter 7: Determinants](#) [↗] — interaktiv 3D-bok
 - [MIT 18.06SC: Properties of Determinants](#) [↗]
-

Vektorer

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#matematik #linjär-algebra #mekanik #kinematik #vektorer

Kapitel: 3.1–3.3 · **Kurs:** F0004T **Förkunskaper:** Kinematik, Kryssprodukt

1. Vektorer i rörelse

1.1 Definition

Definition: Positionsvektor

Positionsvektorn $\vec{r}$ pekar från origo till objektets aktuella position i rummet:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Här är $\hat{i}$, $\hat{j}$ och $\hat{k}$ enhetsvektorer (längd 1) längs x -, y - och z -axlarna.

1.2 Hastighets- och accelerationsvektor

Precis som i 1D är hastigheten derivatan av positionen — men nu deriveras hela vektorn komponentvis:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (a_x, a_y, a_z)$$

Nyckelinsikt: Komponentuppdelning

Du kan behandla varje komponent **helt oberoende**. x -rörelsen påverkas bara av x -komponenten av kraften, y -rörelsen bara av y -komponenten, och så vidare. Det här gör 2D/3D-problem hanterbara.

1.3 Fart – beloppet av hastighetsvektorn

Farten är längden (beloppet) av hastighetsvektorn — Pythagoras sats i 3D:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Exempel: Fart från komponenter

En fågel flyger med hastighetsvektorn $\vec{v} = (3, 4, 0)$ m/s.

Farten är: $v = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ m/s

2. Rörelsens komponenter är oberoende

2.1 Konsekvens

Om ett objekt kastas horisontellt med startfart v_0 i x -led och tyngdkraften verkar i y -led:

- **x -led:** Ingen kraft $\rightarrow$ konstant hastighet: $x = v_0 t$
- **y -led:** Tyngdkraften $\rightarrow$ konstant acceleration: $y = -\frac{1}{2}gt^2$

De två komponenterna räknas ut separat och kombineras sedan till en bana.

Vanligt misstag: Blanda komponenter

Blanda aldrig x - och y -komponenter i samma ekvation. Skriv alltid upp x - och y -ekvationerna separat.

3. Hastighetsvektorn och ändring av riktning

3.1 Acceleration utan fartändring

Nyckelinsikt

Acceleration kan uppstå **utan att farten ändras**, enbart genom att riktningen ändras. En bil som kör i en rondell med konstant fart 50 km/h accelererar hela tiden — mot rondellens centrum.

Förändringen av hastighetsvektorn:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \implies \vec{a}_{medel} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Accelerationsvektorn pekar i riktningen av $\Delta \vec{v}$ — inte nödvändigtvis i rörelsens riktning.

Läsning

- [10.2 Vectors](#)

Se även

- [Kinematik](#) — rörelse i 1D, grundläggande samband
 - [Cirkelrörelse](#) — radiell och tangentiell acceleration, n - t -koordinater
 - [Relativ rörelse](#) — hastigheter relativt olika referenssystem
-

Resurser

Videor

- [Khan Academy — 2D Motion](#) — vektorer och rörelse i planet

Wikipedia

- [Kinematics](#)
- [Velocity](#)

Fördjupning

- University Physics with Modern Physics (Freedman & Young) kap 3.1–3.3
 - Fysika upplaga 5, kap 3
-

Skalarprodukt

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #vektor

Kurs: M0067M Föreläsningar: Vektorer

För $u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \|u\| \|v\| \cos \theta$$

Räkneregler

$$u \cdot v = v \cdot u, \quad (au + bv) \cdot w = a(u \cdot w) + b(v \cdot w), \quad u \cdot u = \|u\|^2$$

Användning

- Längd: $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$
- Vinkel: $\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$
- Ortogonalitet: $u \cdot v = 0$
- Projektion: $\text{proj}_v u = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v$

Se även

- Kryssprodukt
- Ortogonalitet
- Skalarproduktsrum

Resurser

- [3Blue1Brown: Dot products](#)

Ortogonalitet

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #geometri

Kurs: M0067M Förkunskaper: Skalarprodukt

Två vektorer u, v är **ortogonala** om $\langle u, v \rangle = 0$.

Ortogonal bas

En bas $\{u_1, \dots, u_n\}$ är **ortogonal** om $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ för $i \neq j$, och **ortonormerad** om dessutom $\|u_i\| = 1$.

Projektion

Projektionen av v på u :

$$\text{proj}_u v = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

Ortogonalt komplement

$W^\perp = \{v : \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}$.

$$\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$$

Se även

- Gram-Schmidt-processen
- Minstakvadratmetoden
- Skalarproduktsrum

Geometri för linjära system

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #vektorrum

Linjär kombination

En linjär kombination av vektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$: $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k$

Geometrisk tolkning av $A\vec{x} = \vec{b}$

Systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ frågar:

| Kan $\vec{b}$ skrivas som en linjär kombination av kolonnerna i A ?

Lösningsfall

- **Unik lösning:** $\vec{b}$ ligger i kolonnrummet, kolonnerna är **linjärt oberoende**
- **Oändligt många lösningar:** $\vec{b}$ i kolonnrummet, kolonnerna är linjärt beroende
- **Ingen lösning:** $\vec{b}$ ligger inte i kolonnrummet

Linjer och plan

- **Linje:** $\vec{r}(t) = \vec{p} + t\vec{d}$
- **Plan:** $\vec{r}(s, t) = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}$
- **Plan (normalform):** $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{p}) = 0$

Resurser

- [3Blue1Brown: Vectors, what even are they? \(kap 1\)](#) 
- [3Blue1Brown: Inverse matrices, column space and null space \(kap 7\)](#)  [GeoGebra: Span of Two Vectors in 3D](#)



- [Wikipedia: System of linear equations — Geometric interpretation]
(https://en.wikipedia.org/wiki/System_of_linear_equations#Geometric_interpretation)

Kryssprodukt

19 okt. 2026, 7 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #vektorrum

1. Kryssprodukt (vektorprodukt)

3B1B: Cross products · 3B1B: Cross products pt. 2

Kryssprodukten finns enbart i $\mathbb{R}^3$. Man kan se $\mathbb{R}^2$ som en delmängd av $\mathbb{R}^3$ genom att sätta $z = 0$, dvs. $(x, y, 0)$.

1.1 Syfte

Givet ett plan på parameterform $\vec{x} = \vec{x}_0 + s\vec{u} + t\vec{v}$ ger kryssprodukten $\vec{u} \times \vec{v}$ en normalvektor som är ortogonal mot båda riktningsvektorerna.

1.2 Definition

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, \quad u_3v_1 - u_1v_3, \quad u_1v_2 - u_2v_1)$$

Minnesregel: Skriv upp vektorerna under varandra. För varje komponent, täck den kolonnen och ta korsvis multiplikation av de kvarvarande — byt tecken på mittkomponenten.

☰ Beräkna $(-1, 2, 3) \times (2, -6, 1)$

Skriv upp vektorerna: $(-1, 2, 3) \quad (2, -6, 1)$

Komponent 1: $2 \cdot 1 - 3 \cdot (-6) = 2 + 18 = 20$ Komponent 2: $-((-1) \cdot 1 - 3 \cdot 2) = -(-1 - 6) = 7$ Komponent 3: $(-1) \cdot (-6) - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2$

Svar: $(20, 7, 2)$

Kontrollera **ortogonalitet** med **skalärprodukt**:

- $(-1, 2, 3) \cdot (20, 7, 2) = -20 + 14 + 6 = 0 \checkmark$
- $(2, -6, 1) \cdot (20, 7, 2) = 40 - 42 + 2 = 0 \checkmark$

Alternativ metod – determinantformen

Skriv kryssprodukten som en formell determinant med basvektorerna $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ på första raden: $\vec{u} \times$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Likt förra metoden täcker man en kolumn i taget och tar determinanten av det som blir kvar.

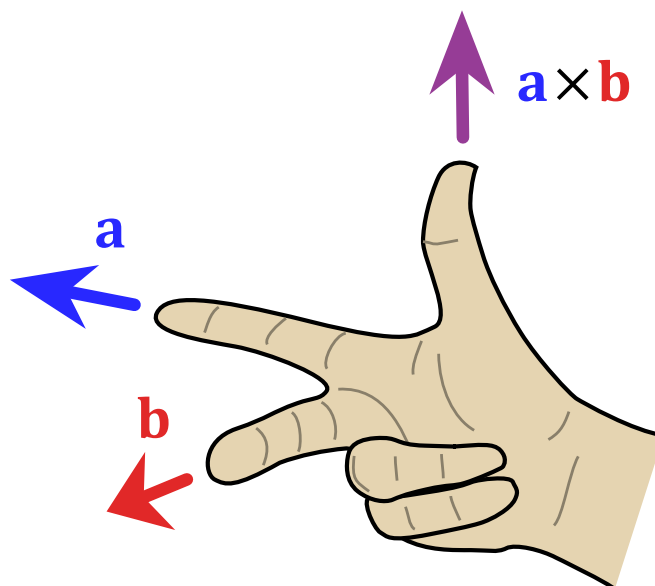
1.3 Sats

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \implies \vec{u} \perp (\vec{u} \times \vec{v}) \text{ och } \vec{v} \perp (\vec{u} \times \vec{v})$$

Bevis: $(u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) = u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_2u_1v_3 + u_3u_1v_2 - u_3u_2v_1 = 0$

Varje term tar ut sig. Analogt för $\vec{v}$.

2. Räkneregler för kryssprodukt



Högerhandsregeln: Bilden illustrerar högerhandsregeln för kryssprodukt mellan två vektorer **a** och **b**. När du formar en högerhand som visas:

- **Pekfingret** (blå pil) pekar i riktning mot vektor **a**

- **Långfingret** (röd pil) pekar i riktning mot vektor **b**
- **Tummen** (lila pil) visar då riktningen på kryssproduktsvektorn **a × b**

Kryssproduktsvektorn **a × b** blir alltså vinkelrät mot både **a** och **b**, och dess riktning bestäms av högerhandsregeln. Om du vänder på ordningen till **b × a** får du motsatt riktning (tummen pekar nedåt istället).

- $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ — **ej kommutativ** (antikommutativ)
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ — distributiv
- $k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$
- $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

3. Lagranges identitet

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

4. Geometriska egenskaper

Givet två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$:

- $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ och $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$
- $|\vec{u} \times \vec{v}|$ = arean av parallelogrammet
- Riktning enligt **högerhandsregeln**

5. Exempel: Area av triangel

Bestäm arean av triangeln med hörnen $A = (1, 0, 3)$, $B = (-2, 1, -1)$, $C = (1, 1, 2)$.

Lösning: $\vec{AB} = B - A = (-3, 1, -4)$ $\vec{AC} = C - A = (0, 1, -1)$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

6. Trippelskalärprodukt

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Kan beräknas som en determinant:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

7. Satser: Geometrisk tolkning av determinanter

3B1B: The determinant [↗](#)

7.1 Area av parallelogram i $\mathbb{R}^2$

$$\text{Area} = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$

7.2 Volym av parallelepiped i $\mathbb{R}^3$

$$\text{Volym} = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

8. Avstånd mellan punkt och linje

≡ Exempel: Avstånd från punkt till linje

Givet en punkt P och en linje L genom punkten Q med riktningsvektor $\vec{d}$.

Metod:

1. Bilda vektorn $\vec{QP}$ från en punkt på linjen till punkten P
2. Beräkna kryssprodukten $\vec{QP} \times \vec{d}$ – detta ger en vektor vars längd är arean av parallelogrammet som spänns upp av $\vec{QP}$ och $\vec{d}$
3. Arean av ett parallelogram är bas $\times$ höjd, så höjden (avståndet) fås genom att dividera med basen $|\vec{d}|$

Formel: Avstånd = $\frac{|\vec{QP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$

9. Avstånd mellan två skeva linjer i $\mathbb{R}^3$

Två linjer är **skeva** om de varken skär varandra eller är parallella (endast möjligt i 3D).

≡ Exempel: Avstånd mellan två skeva linjer

Givet två skeva linjer:

- L_1 : genom P_1 med riktningsvektor $\vec{d}_1$
- L_2 : genom P_2 med riktningsvektor $\vec{d}_2$

Metod:

1. Bilda ett plan π som **innehåller** L_1 och är **parallellt med** L_2
2. Planets normalvektor är $\vec{n} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2$ (vinkelrät mot båda riktningsvektorerna)
3. Välj en punkt P_2 på L_2 och beräkna avståndet från denna punkt till planet π
4. Avståndet punkt→plan fås genom att projicera $P_1\vec{P}_2$ på normalvektorn $\vec{n}$

Formel: Avstånd = $\frac{|P_1\vec{P}_2 \cdot (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2)|}{|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2|}$

Täljaren är absolutbeloppet av trippelskalärprodukten (volymen av parallelepipeden), och nämnaren är arean av basparallelogrammet.

10. Avstånd mellan punkt och plan

≡ Exempel: Plan genom tre punkter + avstånd

Givet: $P = (1, 0, 2)$, $Q = (-1, 1, 3)$, $R = (-2, 1, 0)$, $S = (2, 2, -1)$

Bestäm planet genom P , Q , R och avståndet från S till planet.

Metod:

Steg 1: Hitta två vektorer som ligger i planet Tre punkter definierar ett plan. Genom att dra vektorer mellan punkterna får vi vektorer som ligger i planet. $\vec{PQ} = Q - P = (-2, 1, 1)$ $\vec{PR} = R - P = (-3, 1, -2)$

Steg 2: Beräkna planets normalvektor Kryssprodukten av två vektorer ger en vektor som är vinkelrät mot båda. Alltså: $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ ger en vektor som är vinkelrät mot planet – planets normalvektor. $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3, -7, 1)$

Stefans metod (ortogonal projektion)

Här kan vi hoppa direkt till avståndet utan att skriva ut planets ekvation!

Idé: Avståndet från S till planet är samma sak som längden av projektionen av $\vec{PS}$ på normalvektorn $\vec{n}$.

$$\vec{PS} = S - P = (2 - 1, 2 - 0, -1 - 2) = (1, 2, -3)$$

Ortogonal projektion av $\vec{PS}$ på $\vec{n}$: $\text{proj}_{\vec{n}} \vec{PS} = \frac{\vec{PS} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n}$

$$\text{Längden (= avståndet): } d = \left| \frac{\vec{PS} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|1(-3) + 2(-7) + (-3)(1)|}{\sqrt{59}} = \frac{20}{\sqrt{59}}$$

Snabbare – vi behöver aldrig planets ekvation!

Steg 3: Ställ upp planets ekvation Ett plan kan beskrivas som alla punkter $\vec{r}$ där vektorn från en känd punkt (P) till $\vec{r}$ är vinkelrät mot normalen. $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{P}) = 0 \rightarrow -3(x - 1) - 7(y - 0) + 1(z - 2) = 0 \rightarrow -3x - 7y + z + 1 = 0$

Steg 4: Beräkna avståndet från S till planet Kortaste avståndet från en punkt till ett plan är längs normalens riktning. Vi projicerar vektorn $\vec{PS}$ på normalvektorn $\vec{n}$. $\vec{PS} = S - P = (1, 2, -3)$ $d = \frac{|\vec{PS} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(-3)(1) + (-7)(2) + (1)(-3)|}{\sqrt{9 + 49 + 1}} = \frac{20}{\sqrt{59}}$

Kryssprodukt - Jämn permutation

Läsning

- [10.3 The Cross Product in 3-Space](#)

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Cross products \(kap 10\)](#) — vad kryssprodukten betyder geometriskt
- [3Blue1Brown: Cross products in the light of linear transformations \(kap 11\)](#) — djupare förståelse via determinanter
- [3Blue1Brown: Dot products and duality \(kap 9\)](#) — skalärprodukt som kontrast
- [3Blue1Brown: The determinant \(kap 6\)](#) — area och volym som determinant

Interaktiva verktyg

- GeoGebra: Cross Product Visualisation 3D — roterbar 3D-visualisering
- GeoGebra: Cross Product and Area Visualization — parallelogram-area

Wikipedia

- [Cross product](#)
- [Triple product](#)
- [Parallelepiped](#)
- [Line \(geometry\) — Parametric form](#)
- [Plane \(geometry\)](#)

Fördjupning

- [Immersive Linear Algebra — Chapter 2: Vectors](#)
-

Vektorrum

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra

Kurs: M0067M Förkunskaper: Vektorer

Ett **vektorrum** V (över $\mathbb{R}$) är en mängd med addition $+$ och skalärmultiplikation, som uppfyller 8 axiom: kommutativitet och associativitet för $+$, existens av nollvektor, additiv invers, distributivitet m.m.

Exempel

- $\mathbb{R}^n$
- Mängden av polynom P_n av grad $\leq n$
- Mängden av kontinuerliga funktioner $C([a, b])$
- Matrisrummet $M_{m \times n}$

Delrum

En delmängd $W \subseteq V$ är ett **delrum** om:

1. $0 \in W$
2. $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$
3. $u \in W, c \in \mathbb{R} \Rightarrow cu \in W$

Se även

- Bas och koordinater
- Dimension
- Linjärt beroende och oberoende

Resurser

- [3Blue1Brown: Abstract vector spaces](#) 

Linjärt beroende och oberoende

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra

Kurs: M0067M Förkunskaper: Vektorer

Vektorer $v_1, \dots, v_k$ är **linjärt oberoende** om

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_k = 0.$$

Annars är de **linjärt beroende** — då kan någon v_i skrivas som en **linjärkombination** av de andra.

Test med matris

Om kolonnerna är $v_1, \dots, v_k$:

- Oberoende $\iff$ radreducerad matris har pivot i varje kolonn $\iff Ax = 0$ har endast trivial lösning.
- För kvadratisk matris: oberoende $\iff \det A \neq 0$.

Se även

- Bas och koordinater
- Dimension
- Vektorer

Bas och koordinater

19 okt. 2026, 17 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #vektorum #bas

1. Vad är en bas?

3B1B: Linear combinations, span, and basis vectors

I V4L2 M0067M lärde vi oss två begrepp:

- **Span** — vilka vektorer kan vi *nå*?
- **Linjärt oberoende** — är vår vektormängd *effektiv* (inga onödiga)?

En **bas** kombinerar dessa två krav. Den är en vektormängd som är precis lagom stor: stor nog att nå allting, men utan överflödiga vektorer.

1.1 Definition

Definition: Bas

Låt W vara ett underrum till ett vektorrum V .

En mängd $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}$ är en **bas** för W om:

1. B är linjärt oberoende
2. B spänner upp W , dvs. $\text{span}(B) = W$

Intuition: En bas är den *minimala* uppsättningen vektorer som fortfarande kan bygga allt i rummet. Ta bort en vektor och du kan inte längre nå allt. Lägg till en och den är överflödig.

1.2 Geometrisk intuition

Rum	Bas behöver...	Exempel
En linje genom origo	1 vektor (i linjens riktning)	$\{(1, 2)\}$ för linjen $y = 2x$

Rum	Bas behöver...	Exempel
$\mathbb{R}^2$	2 ej parallella vektorer	$\{(1, 0), (0, 1)\}$
Ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$	2 ej parallella vektorer i planet	$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ för xy -planet
$\mathbb{R}^3$	3 vektorer som inte ligger i samma plan	$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

2. Standardbaser

Varje “vanligt” vektorrum har en naturlig, enkel bas som kallas **standardbasen**.

2.1 Standardbas för $\mathbb{R}^n$

I $\mathbb{R}^n$ är standardbasen:

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

där $\vec{e}_i$ har en etta i position i och nollor överallt annars.

≡ **Standardbasen för $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$**

$$\mathbb{R}^2: \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbb{R}^3: \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Verifiering (t.ex. $\mathbb{R}^3$):

- *Linjärt oberoende:* $c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3 = \vec{0}$ ger direkt $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ✓
- *Spänner upp:* Varje $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ ✓

2.2 Standardbas för P_n

I polynomrummet P_n (polynom med grad $\leq n$) är standardbasen:

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

≡ Standardbaser för polynomrum

$P_2: \{1, x, x^2\}$ — varje polynom $a + bx + cx^2$ är en **linjärkombination** av dessa.

$P_3: \{1, x, x^2, x^3\}$ — varje polynom av grad ≤ 3 kan skrivas $a + bx + cx^2 + dx^3$.

Verifiering för P_2 :

- *Linjärt oberoende:* $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 = 0$ för alla x kräver $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ✓
- *Spänner upp:* Per definition är varje polynom i P_2 en linjärkombination $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2$ ✓

2.3 Standardbas för $M_{m \times n}$

I matrisrummet $M_{m \times n}$ är standardbasen mängden av alla matriser med exakt en etta och resten nollor.

≡ Standardbasen för $M_{2 \times 2}$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Varje 2×2 -matris kan skrivas: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Basen har **4 element** — det stämmer med att $M_{2 \times 2}$ har dimension 4.

3. Är en given mängd en bas? – metod

För att kontrollera om $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ är en bas för ett rum med dimension n :

Steg-för-steg:

1. Skriv vektorerna som **kolumner** i en matris A
2. **Radreducera** till trappstegsform
3. Kontrollera:
 - Varje **kolumn** har en pivot $\rightarrow$ linjärt oberoende ✓
 - Varje **rad** har en pivot $\rightarrow$ spänner upp ✓

- **Båda** gäller → bas ✓

Genväg: räkna vektorer

Om du vet att rummet har dimension n och du har exakt n vektorer, räcker det att kontrollera **ett** av villkoren (oberoende ELLER spänner upp) — det andra följer automatiskt! Detta beror på att en $n \times n$ -matris har en pivot i varje kolumn *om och bara om* den har en pivot i varje rad.

≡ Räkneexempel: Är tre polynom en bas för P_2 ? (möjlig tentauppgift)

Givet:

- $p_1(x) = 1 + x - x^2$
- $p_2(x) = 1 - x + x^2$
- $p_3(x) = 1 + x$

Fråga: Är $\{p_1, p_2, p_3\}$ en bas för P_2 ?

Steg 1: Identifiera koefficienter och skriv som kolumner. Varje polynom $a + bx + cx^2$ motsvarar

vektorn $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$:

$$p_1 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad p_2 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_3 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Steg 2: Bilda matris och radreducera: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_2: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Steg 3: Tre pivoter i en 3×3 -matris $\rightarrow$ varje kolumn har en pivot OCH varje rad har en pivot.

Svar: Ja, $\{p_1, p_2, p_3\}$ är en **bas** för P_2 . ✓

≡ Räkneexempel: Två vektorer i $\mathbb{R}^2$

Är $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en bas för $\mathbb{R}^2$?

Snabbkoll: Vi har 2 vektorer i $\mathbb{R}^2$ ($\dim = 2$). Alltså räcker det att kontrollera linjärt oberoende.

Är $(3, 1) = k \cdot (1, 2)$ för något k ? Det ger $k = 3$ och $k = 1/2$ — motsägelse. Vektorerna är **inte** parallella $\rightarrow$ linjärt oberoende ✓.

Eftersom 2 oberoende vektorer i $\mathbb{R}^2$ ($\dim 2$) automatiskt spänner upp: **Ja, B är en bas för $\mathbb{R}^2$.** ✓

4. Unik representation – varför baser är så användbara

Den centrala anledningen till att baser är viktiga är att de ger oss ett **koordinatsystem**.

□ Sats: Unik representation

Låt $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}$ vara en **bas** för vektorrummet V .

För varje $\vec{x} \in V$ finns en **unik** uppsättning skalärer $c_1, c_2, \dots, c_p$ sådana att

$$\vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \dots + c_p \vec{b}_p$$

Varför? Beviset har två delar:

1. **Existens:** Eftersom B spänner upp V kan varje $\vec{x}$ skrivas som en linjärkombination av basvektorerna.

2. **Unikhet:** Antag att det finns två representationer: $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \dots + c_p\vec{b}_p$ och $\vec{x} = d_1\vec{b}_1 + \dots + d_p\vec{b}_p$. Subtrahera: $(c_1 - d_1)\vec{b}_1 + \dots + (c_p - d_p)\vec{b}_p = \vec{0}$. Eftersom B är linjärt oberoende måste $c_i - d_i = 0$ för alla i , alltså $c_i = d_i$. Representationen var densamma! ■

Varför spelar det roll?

Utan unikhet hade koordinater varit meningslösa — samma vektor kunde ha olika “adresser”. Unikheten garanterar att varje vektor har **exakt en** uppsättning koordinater relativt en given bas, precis som varje punkt på en karta har exakt en GPS-position.

5. Koordinater relativt en bas

3B1B: Change of basis [↗](#)

5.1 Definition

Definition: Koordinatvektor

Låt $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p\}$ vara en bas för V och låt $\vec{x} \in V$.

Om $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \dots + c_p\vec{b}_p$ kallas

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

koordinatvektorn för $\vec{x}$ relativt basen B .

Med andra ord: koordinatvektorn talar om “hur mycket av varje basvektor” som behövs för att bygga $\vec{x}$.

Koordinater beror på basen!

Samma vektor $\vec{x}$ får **olika** koordinater beroende på vilken bas man väljer. Basen fungerar som ett “perspektiv” — byt perspektiv och siffrorna ändras, men vektorn i sig är densamma.

5.2 Specialfall: standardbasen

Om B är standardbasen $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ för $\mathbb{R}^n$, så är koordinatvektorn identisk med själva vektorn:

$$[\vec{x}]_{\text{standard}} = \vec{x}$$

Det är därför vi “normalt” inte tänker på koordinater — vi jobbar redan i standardbasen utan att reflektera över det.

5.3 Exempel

≡ **Koordinater i $\mathbb{R}^2$: givet koordinatvektor, hitta $\vec{x}$**

Låt $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ med $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Givet: $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$. Vad är $\vec{x}$ (i standardkoordinater)?

Lösning: $\vec{x} = 2\vec{b}_1 + 5\vec{b}_2 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 9 \end{bmatrix}$

Svar: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 17 \\ 9 \end{bmatrix}$

Tolkning: I bas B 's “koordinatsystem” är adressen $(2, 5)$, men i standardkoordinater hamnar vi på $(17, 9)$.

≡ **Koordinater i $\mathbb{R}^2$: givet $\vec{x}$, hitta koordinatvektorn**

Samma bas: $B = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

Givet: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$. Bestäm $[\vec{x}]_B$.

Lösning: Vi söker c_1, c_2 sådana att $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ekvationssystem: $\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 7 \\ 2c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$

Radreducera den utökade matrisen: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -14 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 / (-5)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{14}{5} \end{array} \right]$

$\xrightarrow{R_1 - 3R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{14}{5} \end{array} \right]$

Svar: $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} -7/5 \\ 14/5 \end{bmatrix}$

Kontroll: $-\frac{7}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{14}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/5 + 42/5 \\ -14/5 + 14/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35/5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$

Notera: Att svaret innehåller bråk är helt normalt — det beror på att basvektorerna inte är ortogonala med heltalslängder.

≡ Koordinater i P_2

Låt $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ med:

- $p_1(x) = 1 - x$
- $p_2(x) = 1 + x$
- $p_3(x) = 1 - x^2$

Givet: Bestäm koordinaterna för $q(x) = 1 + x + x^2$ relativt B .

Lösning: Vi söker c_1, c_2, c_3 sådana att: $c_1(1 - x) + c_2(1 + x) + c_3(1 - x^2) = 1 + x + x^2$

Utveckla vänsterledet och samla termer: $(c_1 + c_2 + c_3) + (-c_1 + c_2)x + (-c_3)x^2 = 1 + x + x^2$

Jämför koefficienter:

Term	Vänsterled	Högerled
x^0 (konstant)	$c_1 + c_2 + c_3$	1

Term	Vänsterled	Högerled
x^1	$-c_1 + c_2$	1
x^2	$-c_3$	1

$$\text{Ekvationssystem: } \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ -c_1 + c_2 = 1 \\ -c_3 = 1 \end{cases}$$

Från ekvation (3): $c_3 = -1$. Insatt i (1): $c_1 + c_2 = 2$. Från (2): $-c_1 + c_2 = 1$. Addera: $2c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = \frac{3}{2}$, och då $c_1 = \frac{1}{2}$.

$$\text{Svar: } [q]_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Alltså: } 1 + x + x^2 = \frac{1}{2}(1 - x) + \frac{3}{2}(1 + x) + (-1)(1 - x^2)$$

$$\text{Kontroll: } \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x - 1 + x^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)x + x^2 = 1 + x + x^2 \checkmark$$

6. Räkningregler för koordinater

Koordinatvektorn bevarar de linjära operationerna — addition och skalärmultiplikation “fungerar likadant” i koordinater som i originalrummet.

Sats: Linjäritet hos koordinatavbildningen

Låt B vara en bas för V och låt $\vec{u}, \vec{v} \in V, c \in \mathbb{R}$. Då gäller:

$$[\vec{u} + \vec{v}]_B = [\vec{u}]_B + [\vec{v}]_B \quad [c\vec{u}]_B = c[\vec{u}]_B$$

Varför? Om $\vec{u} = \sum a_i \vec{b}_i$ och $\vec{v} = \sum d_i \vec{b}_i$, så $\vec{u} + \vec{v} = \sum (a_i + d_i) \vec{b}_i$, och koordinatvektorn för summan är just summan av koordinatvektorerna.

Vad detta innebär

Att lösa problem i ett “komplicerat” vektorrum (polynom, matriser, funktioner...) kan alltid **översättas** till att lösa motsvarande problem i $\mathbb{R}^n$ via koordinater. Denna koppling kallas **isomorfi** — rummen “ser likadana ut” algebraiskt.

7. Koordinater bevarar linjärt oberoende

Sats: Oberoende bevaras av koordinatavbildningen

Låt V vara ett vektorrum med bas $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$.

Då gäller för vektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in V$:

$$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\} \text{ linjärt oberoende i } V \iff \{[\vec{v}_1]_B, \dots, [\vec{v}_m]_B\} \text{ linjärt oberoende i } \mathbb{R}^n$$

Bevis ($\Leftarrow$): Antag att koordinatvektorerna är linjärt oberoende i $\mathbb{R}^n$. Vi vill visa att originalvektorerna är oberoende i V .

$$\text{Sätt } c_1\vec{v}_1 + \dots + c_m\vec{v}_m = \vec{0}.$$

Ta koordinater relativt B på båda sidor och använd linjäriteten:

$$[c_1\vec{v}_1 + \dots + c_m\vec{v}_m]_B = [\vec{0}]_B \quad c_1[\vec{v}_1]_B + \dots + c_m[\vec{v}_m]_B = \vec{0}$$

Eftersom koordinatvektorerna är linjärt oberoende: $c_1 = \dots = c_m = 0$. ■

(Den andra riktningen bevisas helt analogt.)

Praktisk konsekvens

Du behöver aldrig jobba direkt med polynom, matriser eller andra abstrakta vektorer när du vill kontrollera linjärt oberoende — översätt till koordinater i $\mathbb{R}^n$ och radreducera som vanligt. Det är exakt vad vi har gjort i alla polynom- och matrisexempel hittills!

8. En kommentar om mängdnotation

Vi skriver baser med **mängdparenteser** $\{ \}$. Formellt innebär detta att:

- **Ordningen spelar ingen roll:** $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \{\vec{b}_2, \vec{b}_1\}$ som mängder
- **Inga dubletter:** $\{\vec{v}, \vec{v}\} = \{\vec{v}\}$

⚠ **I praktiken spelar ordningen roll ändå!**

Även om mängdnotationen säger att ordning inte spelar roll, **beror koordinatvektorn på vilken ordning vi listar basvektorerna**. Om vi byter ordning på $\vec{b}_1$ och $\vec{b}_2$ i basen flippas vi koordinaterna:

$$[\vec{x}]_{\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{men} \quad [\vec{x}]_{\{\vec{b}_2, \vec{b}_1\}} = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

Därför bör man strikt sett använda **ordnade** mängder (tupler) för baser, men konventionen i de flesta läroböcker är att använda $\{ \}$ och underförstå att ordningen är given.

9. Beslutsträd

Är $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ en bas för V ?

flowchart TD

```

A["Givet:  $\{v_1, \dots, v_p\}$  i  $V$  med  $\dim(V) = n$ "] --> B{"Har du rätt antal\nvektorer? ( $p = n$ )"}
B -- "p ≠ n" --> NO1["INTE EN BAS\np < n → kan inte spänna upp\np > n → kan inte vara oberoende"]
B -- "p = n" --> C["Skriv vektorerna som kolumner\ni en n×n-matris och radreducera"]
C --> D{"Har varje kolumn\nen pivot?\n(ekvivalent: har varje\nrad en pivot?)"}
D -- Ja --> YES["BAS ✓\n• Linjärt oberoende ✓\n• Spänner upp V ✓"]
D -- Nej --> NO2["INTE EN BAS\nVektorerna är linjärt beroende\noch spänner inte upp V"]

```

Hitta koordinater $[\vec{x}]_B$

flowchart TD

```

A["Givet: bas  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ \noch vektor  $x \in V$ "] --> B["Sätt upp ekvationen\n $c_1b_1 + c_2b_2 + \dots + c_nb_n = x$ "]
B --> C["Skriv som utökad matris\n $[b_1 \mid b_2 \mid \dots \mid b_n \mid x]$ "]
C --> D["Radreducera till\nreducerad trappstegsform"]
D --> E["Läs av  $c_1, c_2, \dots, c_n$ \nfrån sista kolumnen"]
E --> F["Svaret:\n $[x]_B = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ "]

```

10. Övningsuppgifter

Bas-uppgifter

🔗 Uppgift 1: Bas för $\mathbb{R}^3$?

Är $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ en bas för $\mathbb{R}^3$?

🔗 Ledtråd 1

Vi har 3 vektorer i $\mathbb{R}^3$ (dim = 3), så antalet stämmer. Det räcker att kontrollera **ett** av villkoren: linjärt oberoende eller spänner upp.

🔗 Ledtråd 2

Bilda 3×3 -matrisen med vektorerna som kolumner och radreducera. Om alla tre kolumnerna har pivoter $\rightarrow$ bas.

✓ Facit

Ja, det är en bas för $\mathbb{R}^3$.

✓ Full lösning

$$\text{Radreducera: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Tre pivoter i en 3×3 -matris $\rightarrow$ **linjärt oberoende** och **spänner upp** $\mathbb{R}^3$.

Alltså: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$. ✓

Uppgift 2: Bas för P_2 ?

Är $\{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ en bas för P_2 ?

Ledtråd 1

Översätt polynomen till vektorer i $\mathbb{R}^3$: $(1 + x) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $(x + x^2) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(1 + x^2) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Bilda matris och radreducera.

Ledtråd 2

Notera att detta ger **exakt samma matris** som i uppgift 1 (fast kolumnerna i annan ordning). Alternativt: kontrollera om $(1 + x^2) = (1 + x) + (x + x^2)$ stämmer. Stämmer det?

✓ Facit

Ja, det är en bas för P_2 .

✓ Full lösning

Översätt och bilda matris: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Radreducera: $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$R_3 \leftarrow R_3 - R_2$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Tre pivoter $\rightarrow$ linjärt oberoende $\rightarrow$ **Ja, det är en bas för P_2 !** ✓

Poäng: Tre linjärt oberoende vektorer i ett 3-dimensionellt rum bildar alltid en bas.

Koordinat-uppgifter

🔍 Uppgift 3: Hitta koordinater i $\mathbb{R}^2$

Låt $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ och $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Bestäm $[\vec{x}]_B$.

🔗 Ledtråd 1

Lös $c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$, dvs. systemet $2c_1 + c_2 = 5$ och $c_1 + 3c_2 = 5$.

🔗 Ledtråd 2

Från ekvation 2: $c_1 = 5 - 3c_2$. Insatt i ekvation 1: $2(5 - 3c_2) + c_2 = 5 \implies 10 - 5c_2 = 5$.

✓ Facit

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

✓ Full lösning

Ekvationssystem:
$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 5 \\ c_1 + 3c_2 = 5 \end{cases}$$

Utökad matris och radreducera: $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \end{array} \right]$

Från rad 2: $-5c_2 = -5 \implies c_2 = 1$. Från rad 1: $c_1 + 3 = 5 \implies c_1 = 2$.

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kontroll: $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 \\ 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \checkmark$

🔗 Uppgift 4: Koordinater i polynomrum

Låt $B = \{1 - x, 1 + x, 1 - x^2\}$ (samma bas som i exemplet ovan).

Bestäm $[3 + x - 2x^2]_B$.

🔗 Ledtråd 1

Sätt upp ekvationen $c_1(1 - x) + c_2(1 + x) + c_3(1 - x^2) = 3 + x - 2x^2$ och jämför koefficienter.

🔗 Ledtråd 2

Koefficientjämförelsen ger:

- Konstant: $c_1 + c_2 + c_3 = 3$
- x : $-c_1 + c_2 = 1$
- x^2 : $-c_3 = -2$

✓ **Facit**

$$[3 + x - 2x^2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

✓ **Full lösning**

Utveckla: $c_1(1 - x) + c_2(1 + x) + c_3(1 - x^2) = (c_1 + c_2 + c_3) + (-c_1 + c_2)x + (-c_3)x^2$

$$\text{Jämför med } 3 + x - 2x^2: \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 3 \\ -c_1 + c_2 = 1 \\ -c_3 = -2 \end{cases}$$

Från (3): $c_3 = 2$. Insatt i (1): $c_1 + c_2 = 1$. Från (2): $-c_1 + c_2 = 1$. Addera (1') och (2):
 $2c_2 = 2 \implies c_2 = 1$, och då $c_1 = 0$.

Kontroll: $0(1 - x) + 1(1 + x) + 2(1 - x^2) = 1 + x + 2 - 2x^2 = 3 + x - 2x^2 \checkmark$

$$\text{Svar: } [3 + x - 2x^2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

🔗 **Uppgift 5: Från koordinater till vektor**

Låt $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^3$.

Om $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, vad är $\vec{x}$?

🔗 **Ledtråd**

$\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + c_3\vec{b}_3$ där (c_1, c_2, c_3) läses direkt ur koordinatvektorn.

✓ Facit

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

✓ Full lösning

$$\vec{x} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Konceptuella uppgifter

🔗 Uppgift 6: Sant eller falskt? (med motivering)

Avgör om påståendena är sanna eller falska. Motivera kort.

a) Standardbasen är den enda basen för $\mathbb{R}^n$. b) Om B är en bas för V och $\vec{x} \in V$, så finns det exakt en koordinatvektor $[\vec{x}]_B$. c) Om $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ är linjärt oberoende i $\mathbb{R}^3$, så är det en bas för $\mathbb{R}^3$. d) Om $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ spänner upp $\mathbb{R}^3$, så är det en bas för $\mathbb{R}^3$. e) Varje vektorrum har en standardbas.

🔗 Ledtråd

Tänk på definitionen av bas: linjärt oberoende + spänner upp. Saknas ett villkor → inte en bas. Fundera också på vad "dimension" innebär för antalet vektorer i en bas.

✓ Facit och motivering

a) **Falskt**. Det finns oändligt många baser för $\mathbb{R}^n$. T.ex. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas för $\mathbb{R}^2$ som inte är standardbasen.

b) **Sant.** Det är precis satsen om unik representation. Eftersom B är en bas (oberoende + spänner upp) bestäms koordinaterna entydigt.

c) **Falskt.** Linjärt oberoende räcker inte — vi behöver även spänna upp. Två vektorer i $\mathbb{R}^3$ kan högst spänna upp ett plan (2-dimensionellt delrum), inte hela $\mathbb{R}^3$ (som är 3-dimensionellt). Vi behöver 3 vektorer.

d) **Sant** (under förutsättning att mängden också är linjärt oberoende). Men faktum är: 3 vektorer som spänner upp $\mathbb{R}^3$ *måste* vara linjärt oberoende. Varför? Matrisen med 3 kolumner i $\mathbb{R}^3$ som har en pivot i varje rad (spänner upp) har 3 pivoter i 3 kolumner — alltså en pivot per kolumn (oberoende). **Sant.**

e) **Falskt.** "Standardbasen" är bara definierad för rum som har en naturlig/kanonisk bas, som $\mathbb{R}^n$, P_n och $M_{m \times n}$. Godtyckliga vektorrum (t.ex. Lösningssystem till differentialekvationer) behöver inte ha en "standard"-bas, även om de har baser.

🔗 Uppgift 7: Visa att koordinatavbildningen bevarar addition

Låt $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ vara en bas för V .

Om $\vec{u} = 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2$ och $\vec{v} = -\vec{b}_1 + 4\vec{b}_2$, verifiera att $[\vec{u} + \vec{v}]_B = [\vec{u}]_B + [\vec{v}]_B$.

🔗 Ledtråd

Beräkna $\vec{u} + \vec{v}$ och bestäm koordinatvektorn. Beräkna sedan $[\vec{u}]_B + [\vec{v}]_B$ separat. Jämför.

✓ Facit

$$[\vec{u} + \vec{v}]_B = [\vec{u}]_B + [\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \checkmark$$

✓ Full lösning

$$\vec{u} + \vec{v} = (3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2) + (-\vec{b}_1 + 4\vec{b}_2) = 2\vec{b}_1 + 6\vec{b}_2$$

$$\text{Alltså } [\vec{u} + \vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Å andra sidan: } [\vec{u}]_B + [\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Identiska! ✓ Koordinatavbildningen bevarar addition.

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Linear combinations, span, and basis vectors \(kap 2\)](#) — vad en bas är och varför den behövs
- [3Blue1Brown: Change of basis \(kap 13\)](#) — koordinater relativt olika baser
- [3Blue1Brown: Abstract vector spaces \(kap 16\)](#) — baser i abstrakta vektorrum

Wikipedia

- [Basis \(linear algebra\)](#)
- [Coordinate vector](#)
- [Standard basis](#)

Fördjupning

- [Immersive Linear Algebra — Chapter 6: The Vector Space](#)
 - [Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Basis and Dimension](#)
-

Dimension

19 okt. 2026, 13 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #vektorrum

1. Alla baser har lika många vektorer

I V4L3 M0067M definierade vi begreppet bas — en **linjärt oberoende** mängd som spänner upp rummet. En naturlig fråga uppstår: kan olika baser för samma rum ha **olika** antal vektorer?

Svaret är nej. Detta är ett av de mest fundamentala resultaten i linjär algebra.

Sats: Alla baser har samma storlek

Låt V vara ett **vektorrum**. Om V har en bas med n vektorer, så har **varje** bas för V exakt n vektorer.

Bevisidé: Antag att $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ och $C = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m\}$ båda är baser för V .

- Eftersom B är en bas (spänner upp V) och C är linjärt oberoende, måste $m \leq n$ (fler oberoende vektorer än basvektorer kan inte finnas).
- Eftersom C är en bas (spänner upp V) och B är linjärt oberoende, måste $n \leq m$.
- Alltså $m = n$. ■

Varför är detta viktigt?

Det betyder att antalet basvektorer är en **egenskap hos rummet**, inte hos den specifika basen vi råkar välja. Detta antal förtjänar ett eget namn — **dimensionen**.

2. Definition av dimension

3B1B: Linear combinations, span, and basis vectors [↗](#)

Definition: Dimension

Låt V vara ett vektorrum.

- Om V har en bas med n vektorer kallas V **ändligtdimensionellt** och vi skriver $\dim(V) = n$.
- Om $V = \{\vec{0}\}$ (bara nollvektorn) definierar vi $\dim(V) = 0$.
- Om V inte kan spännas upp av ett ändligt antal vektorer kallas V **oändligtdimensionellt**.

Med andra ord: dimensionen av ett vektorrum V är **antalet vektorer i en (vilken som helst) bas** för V .

3. Dimensioner för vanliga vektorrum

Vektorrum	Standardbas	Dimension
$\mathbb{R}^n$	$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$	$\dim(\mathbb{R}^n) = n$
P_n (polynom grad $\leq n$)	$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$	$\dim(P_n) = n + 1$
$M_{m \times n}$ (alla $m \times n$ -matriser)	Matriser med en etta, resten nollor	$\dim(M_{m \times n}) = m \cdot n$
$\{\vec{0}\}$	$\emptyset$ (tom mängd)	$\dim = 0$

Verifiering av dimensioner

$\mathbb{R}^3$: Standardbasen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ har 3 vektorer, alltså $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

P_2 : Standardbasen $\{1, x, x^2\}$ har 3 element, alltså $\dim(P_2) = 3$.

$M_{2 \times 3}$: Standardbasen har $2 \cdot 3 = 6$ matriser (varje matris har en etta i exakt en av de 6 positionerna), alltså $\dim(M_{2 \times 3}) = 6$.

P_n : Standardbasen $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ har $n + 1$ element (grader $0, 1, \dots, n$), alltså $\dim(P_n) = n + 1$.

⚠ P_n har dimension $n + 1$, inte n !

Många gör misstaget att tro att $\dim(P_n) = n$. Men polynomrummet P_n innehåller polynom av grad $\leq n$, och basen $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ har $n + 1$ **element** (glöm inte konstanttermen!).

☰ Oändligtdimensionella rum

Mängden P av **alla** polynom (utan gradgräns) är oändligtdimensionellt.

Varför? Mängden $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ är linjärt oberoende (inget polynom i listan kan skrivas som en **linjärkombination** av de andra), men den har oändligt många element. Inget ändligt antal polynom kan spänna upp alla polynom.

Likasa är $F(\mathbb{R})$ (alla funktioner $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) oändligtdimensionellt.

4. Centrala satser om dimension

Dimensionen ger oss kraftfulla verktyg för att snabbt avgöra frågor om linjärt oberoende och span.

4.1 Dimensionsbegränsningar

☐ Sats: Övre gräns för oberoende

Om $\dim(V) = n$, så kan **högst** n vektorer i V vara linjärt oberoende.

Ekvivalent: varje mängd med **fler än** n vektorer i V är automatiskt linjärt beroende.

☐ Sats: Undre gräns för uppspanning

Om $\dim(V) = n$, så krävs **minst** n vektorer för att spänna upp V .

Ekvivalent: varje mängd med **färre än** n vektorer kan **inte** spänna upp V .

☰ Snabbslutsatser med dimension

- Kan 5 vektorer i $\mathbb{R}^3$ vara linjärt oberoende? **Nej** — $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ och $5 > 3$.
- Kan 2 polynom spänna upp P_2 ? **Nej** — $\dim(P_2) = 3$ och $2 < 3$.
- Kan 3 matriser spänna upp $M_{2 \times 2}$? **Nej** — $\dim(M_{2 \times 2}) = 4$ och $3 < 4$.
- Måste 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$ vara linjärt beroende? **Ja** — $4 > 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

4.2 Genvägen: rätt antal vektorer

📄 Sats: n vektorer i ett n -dimensionellt rum

Låt $\dim(V) = n$ och låt $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ vara en mängd med **exakt** n vektorer i V . Då gäller:

S är linjärt oberoende $\iff S$ spänner upp V $\iff S$ är en bas för V

Det räcker alltså att kontrollera **ett** av villkoren — det andra följer automatiskt!

Varför? Om vi har exakt n vektorer i ett n -dimensionellt rum:

- Om de är oberoende: vi har n oberoende vektorer, och det maximala antalet oberoende vektorer är n (basens storlek). Att lägga till fler gör dem beroende, så de måste redan spänna upp.
- Om de spänner upp: vi har n vektorer som spänner upp, och det minimala antalet som spänner upp är n . Om de vore beroende kunde vi ta bort en och fortfarande spänna upp med $n - 1$ vektorer — men $n - 1 < n$ vektorer kan aldrig spänna upp. Motsägelse!

🔗 Praktisk nytta

Denna sats halverar arbetet! Om du vet dimensionen av rummet och har rätt antal vektorer behöver du bara kontrollera **ett** av:

- Linjärt oberoende (radreducera, kolla pivoter i varje **kolumn**)
- Spänner upp (radreducera, kolla pivoter i varje **rad**)

4.3 Plus/minus-satsen

□ Plus/minus-satsen

Låt V vara ett vektorrum med $\dim(V) = n$.

Plus: Om S är en linjärt oberoende mängd i V som **inte** spänner upp V , så finns en vektor $\vec{v} \in V$ sådan att $S \cup \{\vec{v}\}$ fortfarande är linjärt oberoende.

Minus: Om S spänner upp V men **inte** är linjärt oberoende, så finns en vektor i S som kan tas bort utan att minska spannet.

Intuition: Du kan alltid “bygga upp” till en bas genom att lägga till vektorer (plus), eller “trimma ner” till en bas genom att ta bort överflödiga vektorer (minus).

⋮ Bygg upp till en bas

Låt $V = \mathbb{R}^3$ ($\dim = 3$). Starta med den linjärt oberoende mängden $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

S spänner inte upp $\mathbb{R}^3$ (bara x -axeln). Enligt plus-satsen kan vi lägga till en vektor, t.ex. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$S' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Fortfarande oberoende, men spänner bara upp xy -planet. Lägg till ytterligare en, t.ex. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$S'' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Nu har vi 3 oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$ — det är en bas!

☰ Trimma ner till en bas

Låt $V = \mathbb{R}^2$ ($\dim = 2$). Mängden $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ spänner upp $\mathbb{R}^2$ men är linjärt beroende (3 vektorer i 2D).

Enligt minus-satsen kan vi ta bort en vektor utan att minska spannet. T.ex. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, så ta bort den:

$$S' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Nu har vi 2 oberoende vektorer i $\mathbb{R}^2$ – en bas!

5. Dimension av delrum

📄 Sats: Dimensionssats för delrum

Låt W vara ett delrum till ett ändligtdimensionellt vektorrum V . Då gäller:

1. W är ändligtdimensionellt
2. $\dim(W) \leq \dim(V)$
3. $\dim(W) = \dim(V) \iff W = V$

Tolkning:

- Ett delrum kan aldrig ha **högre** dimension än det omgivande rummet.
- Det **enda** delrummet med samma dimension som V är V självt.

☰ Delrum till $\mathbb{R}^3$

Alla delrum till $\mathbb{R}^3$ (och deras dimensioner):

Dimension	Geometri	Beskrivning
0	Origo	$\{\vec{0}\}$

Dimension	Geometri	Beskrivning
1	Linje genom origo	$\text{span}\{\vec{v}\}$ för någon $\vec{v} \neq \vec{0}$
2	Plan genom origo	$\text{span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ för ej parallella $\vec{u}, \vec{v}$
3	Hela $\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$ självt

Det finns **inga andra** delrum till $\mathbb{R}^3$!

≡ Bestäm dimensionen av ett delrum (möjlig tentauppgift)

Bestäm dimensionen av delrummet $W = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

Metod: Dimensionen av spannet = antalet linjärt oberoende vektorer = antalet pivoter vid radreducering.

Bilda matris med vektorerna som kolumner: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Radreducera: $\xrightarrow{R_2-2R_1, R_3+R_1, R_4-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_3-R_2, R_4+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2 pivoter $\rightarrow \dim(W) = 2$.

Tolkning: Trots att vi startade med 4 vektorer i $\mathbb{R}^4$ spänner de bara upp ett 2-dimensionellt delrum (ett "plan" i $\mathbb{R}^4$). Vektor 2 är en multipel av vektor 1 ($2 \cdot \vec{v}_1$) och vektor 4 är en kombination av de andra.

En bas för W fås av de vektorer som motsvarar pivotkolumner: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$

6. Sammanfattning: dimensionsverktyg

Situation	Slutsats
$\dim(V) = n$ och du har $> n$ vektorer	Automatiskt linjärt beroende
$\dim(V) = n$ och du har $< n$ vektorer	Kan inte spänna upp V
$\dim(V) = n$ och du har exakt n vektorer	Oberoende $\iff$ spänner upp $\iff$ bas
W delrum till V	$\dim(W) \leq \dim(V)$
W delrum till V med $\dim(W) = \dim(V)$	$W = V$

7. Beslutsträd

Bestäm dimensionen av ett delrum/span

flowchart TD

```

A["Givet:  $W = \text{span}\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ "] --> B["Skriv vektorerna som kolumner\ni en matris"]
B --> C["Radreducera till\ntrappstegsform"]
C --> D["Räkna antalet pivoter"]
D --> E[" $\dim(W) = \text{antal pivoter}$ "]
E --> F{"Behöver du en bas?"}
F -- Ja --> G["Välj de ursprungliga vektorer\nsom motsvarar pivotkolumner"]
F -- Nej --> H["Klar!"]

```

Är mängden en bas? (med dimension)

flowchart TD

```

A["Givet:  $\{v_1, \dots, v_p\}$  i  $V$  med  $\dim(V) = n$ "] --> B{"p = n?"}
B -- "p < n" --> NO1["INTE EN BAS\nFör få vektorer – kan inte spänna upp V"]
B -- "p > n" --> NO2["INTE EN BAS\nFör många vektorer – automatiskt beroende"]
B -- "p = n" --> C["Kontrollera ETT av:\n• Linjärt oberoende\n• Spänner upp"]
C --> D{"Villkoret uppfyllt?"}
D -- Ja --> YES["BAS ✓\n(det andra villkoret följer automatiskt)"]
D -- Nej --> NO3["INTE EN BAS"]
  
```

8. Övningsuppgifter

Dimensionsuppgifter

Uppgift 1: Ange dimensionen

Ange dimensionen för följande vektorrum:

a) $\mathbb{R}^5$ b) P_4 c) $M_{3 \times 2}$ d) $M_{2 \times 2}$ e) P_0

Ledtråd

Använd formlerna: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(P_n) = n + 1$, $\dim(M_{m \times n}) = m \cdot n$.

✓ Facit

a) $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$ b) $\dim(P_4) = 5$ (bas: $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$) c) $\dim(M_{3 \times 2}) = 6$ d) $\dim(M_{2 \times 2}) = 4$ e) $\dim(P_0) = 1$ (bas: $\{1\}$, alla konstanta polynom)

Uppgift 2: Dimension av delrum

Bestäm dimensionen av delrummet $W = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Ledtråd 1

Bilda en matris med vektorerna som kolumner och radreducera. Antalet pivoter = $\dim(W)$.

Ledtråd 2

Notera att den tredje vektorn $(1, 1, 2)$ ser ut som summan av de två första: $(1, 0, 1) + (0, 1, 1) = (1, 1, 2)$. Stämmer det? I så fall är vektorerna linjärt beroende.

✓ Facit

$\dim(W) = 2$.

✓ Full lösning

$$\text{Radreducera: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 pivoter $\rightarrow \dim(W) = 2$.

Den tredje vektorn var redundant: $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

$$\text{En bas för } W: \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Geometriskt: W är ett **plan genom origo** i $\mathbb{R}^3$.

🔗 Uppgift 3: Dimension av polynomdelrum

Bestäm dimensionen av $W = \text{span}\{1 + x, x + x^2, 1 + 2x + x^2\} \subseteq P_2$

Ledtråd 1

Översätt polynomen till vektorer i $\mathbb{R}^3$: $(1 + x) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $(x + x^2) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(1 + 2x + x^2) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ledtråd 2

Notera att $(1 + x) + (x + x^2) = 1 + 2x + x^2$. Det tredje polynomet är summan av de två första!

✓ Facit

$\dim(W) = 2$.

✓ Full lösning

Vektorrepresentation och radreducering: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 pivoter $\rightarrow \dim(W) = 2$.

Beroendet: $(1 + 2x + x^2) = (1 + x) + (x + x^2)$.

En bas för W : $\{1 + x, x + x^2\}$.

Notera: $W \subsetneq P_2$ eftersom $\dim(W) = 2 < 3 = \dim(P_2)$. T.ex. polynomet x^2 kan inte skrivas som en kombination av $1 + x$ och $x + x^2$ (kontrollera!).

Basuppgifter med dimension

Uppgift 4: Bas för $\mathbb{R}^4$?

Är $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ en bas för $\mathbb{R}^4$?

Ledtråd

Vi har 4 vektorer i $\mathbb{R}^4$ ($\dim = 4$). Alltså räcker det att kontrollera **ett** av villkoren (oberoende eller spänner upp).

✓ Facit

Ja, det är en bas.

✓ Full lösning

$$\text{Radreducera: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

4 pivoter i en 4×4 -matris $\rightarrow$ linjärt oberoende $\rightarrow$ bas för $\mathbb{R}^4$. ✓

Uppgift 5: Komplettera till bas

Givet den linjärt oberoende mängden $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ i $\mathbb{R}^3$.

Hitta en vektor $\vec{v}$ så att mängden utökas till en bas för $\mathbb{R}^3$.

Ledtråd 1

Vi har 2 oberoende vektorer och behöver 3 för en bas i $\mathbb{R}^3$. Enligt plus/minus-satsen kan vi lägga till en vektor. Testa en standardbasvektor – t.ex. $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ledtråd 2

Kontrollera att $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ är linjärt oberoende genom att radreducera. Om det inte fungerar, testa $\vec{e}_2$ eller $\vec{e}_3$.

✓ Facit

T.ex. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ fungerar (det finns flera korrekta svar).

✓ Full lösning

Pröva $\vec{v} = \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3 pivoter $\rightarrow$ oberoende $\rightarrow$ bas för $\mathbb{R}^3$. ✓

Hade vi valt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ hade det **inte** fungerat (den är $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, alltså beroende av de befintliga). Standardbasvektorer är ofta ett bra val att pröva.

Konceptuella uppgifter

🔗 Uppgift 6: Sant eller falskt?

Avgör om påståendena är sanna eller falska. Motivera kort.

a) $\dim(\mathbb{P}_3) = 3$. b) Om $\dim(V) = 5$ och S har 5 linjärt oberoende vektorer i V , så är S en bas för V . c) Om W är ett delrum till $\mathbb{R}^4$ och $\dim(W) = 4$, så är $W = \mathbb{R}^4$. d) Om $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ spänner upp V och $\dim(V) = 3$, så är mängden en bas. e) Om $\dim(V) = n$, så finns det exakt en bas för V .

🔗 Ledtråd

a) Hur många element har standardbasen $\{1, x, x^2, x^3\}$? e) Tänk på att redan i $\mathbb{R}^2$ finns oändligt många baser.

✓ Facit

- a) **Falskt.** $\dim(\mathbb{P}_3) = 4$ (standardbasen $\{1, x, x^2, x^3\}$ har 4 element).
- b) **Sant.** Exakt $n = 5$ vektorer som är linjärt oberoende i ett n -dimensionellt rum bildar automatiskt en bas.
- c) **Sant.** Dimensionssatsen: om $W \subseteq V$ och $\dim(W) = \dim(V)$, så $W = V$.
- d) **Sant.** 3 vektorer som spänner upp ett 3-dimensionellt rum måste vara oberoende (annars kunde vi ta bort en och spänna upp med 2, men $2 < 3$). Alltså en bas.

e) **Falskt.** Det finns oändligt många baser. T.ex. i $\mathbb{R}^2$ är $\{(1, 0), (0, 1)\}$, $\{(1, 1), (1, -1)\}$, $\{(2, 1), (1, 3)\}$ alla baser. Alla baser har samma **antal** vektorer (n), men det finns oändligt många val.

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Linear combinations, span, and basis vectors \(kap 2\)](#) — dimension som antal basvektorer
- [3Blue1Brown: Abstract vector spaces \(kap 16\)](#) — dimension i abstrakta vektorrum
- [3Blue1Brown: Nonsquare matrices as transformations between dimensions \(kap 8\)](#) — olika dimensioner och transformationer

Wikipedia

- [Dimension \(vector space\)](#)
- [Basis \(linear algebra\)](#)

Fördjupning

- [Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Basis and Dimension](#)
-

Basbyte

19 okt. 2026, 13 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #vektorrums #bas

1. Problemställningen

3B1B: Change of basis

I V4L3 M0067M såg vi att samma vektor $\vec{x}$ får **olika** koordinatvektorer beroende på vilken bas vi väljer. Det leder till en naturlig fråga:

Om vi känner koordinaterna för $\vec{x}$ relativt **en** bas — hur beräknar vi koordinaterna relativt en **annan** bas?

Konkret: Givet två baser B och B' för ett vektorrum V , och koordinatvektorn $[\vec{x}]_B$. Hur hittar vi $[\vec{x}]_{B'}$?

Varför behövs detta?

Ibland är ett problem svårt att lösa i en viss bas men enkelt i en annan. Basbyte låter oss “byta perspektiv” — lösa problemet i den bekväma basen och sedan översätta tillbaka.

Analogi: Tänk på att byta från kartesiska koordinater till polära koordinater. Samma punkt i planet, men olika siffror som beskriver den. Ibland är polära koordinater smidigare (t.ex. för cirklar).

2. Övergångsmatris – definition

Definition: Övergångsmatris

Låt $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ och $B' = \{\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_n\}$ vara två baser för ett vektorrum V .

Övergångsmatrisen (transition matrix) från B till B' är den unika $n \times n$ -matris $P_{B \rightarrow B'}$ som uppfyller:

$$[\vec{x}]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} [\vec{x}]_B$$

för alla $\vec{x} \in V$.

Med andra ord: övergångsmatrisen “översätter” koordinater i bas B till koordinater i bas B' genom en enkel matrismultiplikation.

Notationen $P_{B \rightarrow B'}$

Pilen visar **riktningen** på översättningen: från B -koordinater **till** B' -koordinater. Läs det som “övergångsmatrisen **från** B **till** B' ”.

Var noga med ordningen — $P_{B \rightarrow B'}$ och $P_{B' \rightarrow B}$ är **inte** samma matris!

3. Hur beräknar man övergångsmatrisen?

3.1 Metod: via kolumner

Övergångsmatrisen $P_{B \rightarrow B'}$ fås genom att uttrycka de **gamla** basvektorerna (B :s vektorer) i den **nya** basens (B' :s) koordinater:

$$P_{B \rightarrow B'} = [[\vec{b}_1]_{B'} \quad [\vec{b}_2]_{B'} \quad \cdots \quad [\vec{b}_n]_{B'}]$$

Varför? Om vi sätter $\vec{x} = \vec{b}_j$ (den j :te basvektorn i B), så ger $[\vec{b}_j]_B = \vec{e}_j$ (enhetsvektorn). Då:

$$[\vec{b}_j]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} [\vec{b}_j]_B = P_{B \rightarrow B'} \vec{e}_j = \text{kolumn } j \text{ i } P_{B \rightarrow B'}$$

Minnesregel

Kolumn j i $P_{B \rightarrow B'}$ = koordinaterna för den j :te **gamla** (B) basvektorn uttryckt i den **nya** (B') basen.

3.2 Metod i $\mathbb{R}^n$: radreducering

I $\mathbb{R}^n$ finns en smidig beräkningsmetod. Bilda den utökade matrisen med B' :s vektorer till vänster och B :s vektorer till höger, och radreducera:

$$[B' \mid B] \xrightarrow{\text{radreducera}} [I \mid P_{B \rightarrow B'}]$$

Varför fungerar detta? Vi löser n ekvationssystem samtidigt: för varje basvektor $\vec{b}_j$ i B söker vi koefficienter $c_1, \dots, c_n$ sådana att $c_1 \vec{b}'_1 + \dots + c_n \vec{b}'_n = \vec{b}_j$. Dessa koefficienter är precis $[\vec{b}_j]_{B'}$, dvs. kolumn j i $P_{B \rightarrow B'}$.

≡ Räkneexempel: Övergångsmatrix i $\mathbb{R}^2$

Givet baserna:

- $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ (standardbasen)

Bestäm $P_{B \rightarrow B'}$.

Metod: Radreducera $[B' \mid B]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

Matrisen är redan på reducerad trappstegsform!

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Kontroll: Låt $\vec{x}$ ha koordinaterna $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\text{Då: } \vec{x} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Med formeln: } [\vec{x}]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Och i standardbasen: } [\vec{x}]_{B'} = \vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}. \checkmark$$

Notera: När B' är standardbasen blir övergångsmatrisen helt enkelt $P_{B \rightarrow \text{std}} = [B]$ (basvektorer i B som kolumner). Det beror på att koordinaterna i standardbasen **är** de vanliga komponenterna.

≡ Räkneexempel: Övergångsmatrix i $\mathbb{R}^3$ (möjlig tentauppgift)

Givet baserna:

$$\begin{aligned} \bullet B &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ \bullet B' &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ (standardbasen)} \end{aligned}$$

Bestäm $P_{B \rightarrow B'}$.

Radreducera $[B' \mid B]$:
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Redan reducerad!

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kontroll: Verifiera med $\vec{b}_1$: $[\vec{b}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, så:

$$P_{B \rightarrow B'} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{b}_1 \text{ i standardkoordinater. } \checkmark$$

≡ Räkneexempel: Mellan två icke-standardbaser

Givet baserna i $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \bullet B &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ \bullet B' &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Bestäm $P_{B \rightarrow B'}$.

$$\text{Radreducera } [B' \mid B]: \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2/(-2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right]$$

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Kontroll: Låt $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Då $\vec{x} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$$\text{Formeln ger: } [\vec{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Verifiera: } \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \checkmark$$

4. Egenskaper hos övergångsmatrisen

Sats: Övergångsmatrisen är inverterbar

Övergångsmatrisen $P_{B \rightarrow B'}$ är alltid **inverterbar**, och dess invers är övergångsmatrisen i **motsatt riktning**:

$$(P_{B \rightarrow B'})^{-1} = P_{B' \rightarrow B}$$

Varför? Vi har: $[\vec{x}]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} [\vec{x}]_B$

Multiplitera båda sidor med $(P_{B \rightarrow B'})^{-1}$: $[\vec{x}]_B = (P_{B \rightarrow B'})^{-1} [\vec{x}]_{B'}$

Men per definition gäller $[\vec{x}]_B = P_{B' \rightarrow B} [\vec{x}]_{B'}$. Alltså $P_{B' \rightarrow B} = (P_{B \rightarrow B'})^{-1}$. ■

Praktisk konsekvens

Om du har beräknat $P_{B \rightarrow B'}$ behöver du **inte** göra om hela beräkningen för att gå åt andra hållet – invertera matrisen! Och om matrisen är 2×2 kan du använda formeln $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

📄 Sats: Kedja av basbyten

Om B , B' och B'' är tre baser för samma vektorrum, så gäller:

$$P_{B \rightarrow B''} = P_{B' \rightarrow B''} \cdot P_{B \rightarrow B'}$$

Man kan "kedja" övergångsmatriser genom matrismultiplikation.

Intuition: Först översätt från B till B' , sedan från B' till B'' . Sammansättningen ger direkt från B till B'' .

5. Specialfall: basbyte via standardbasen

Om en av baserna är **standardbasen** $E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ i $\mathbb{R}^n$ förenklas beräkningarna avsevärt.

5.1 Från bas B till standardbasen

$$P_{B \rightarrow E} = [\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \dots \quad \vec{b}_n]$$

Det vill säga: övergångsmatrisen är helt enkelt matrisen med B 's basvektorer som kolumner!

Varför? I standardbasen är $[\vec{b}_j]_E = \vec{b}_j$ (koordinaterna **är** komponenterna).

5.2 Från standardbasen till bas B

$$P_{E \rightarrow B} = (P_{B \rightarrow E})^{-1} = [\vec{b}_1 \quad \dots \quad \vec{b}_n]^{-1}$$

5.3 Mellan två baser via standardbasen

Vill du beräkna $P_{B \rightarrow B'}$ kan du gå **via** standardbasen:

$$P_{B \rightarrow B'} = P_{E \rightarrow B'} \cdot P_{B \rightarrow E} = (P_{B' \rightarrow E})^{-1} \cdot P_{B \rightarrow E}$$

☰ Räkneexempel: Via standardbasen

Givet i $\mathbb{R}^2$:

- $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Steg 1: $P_{B \rightarrow E} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (basvektorer i B som kolumner).

Steg 2: $P_{B' \rightarrow E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Steg 3: $P_{E \rightarrow B'} = (P_{B' \rightarrow E})^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Steg 4: $P_{B \rightarrow B'} = P_{E \rightarrow B'} \cdot P_{B \rightarrow E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Samma svar som med radreduceringsmetoden! ✓

6. Basbyte i andra vektorrum

Metoden fungerar inte bara i $\mathbb{R}^n$ — den gäller i **alla** ändligtdimensionella vektorrum. Nyckeln är att översätta till $\mathbb{R}^n$ via koordinater.

≡ **Basbyte i P_2**

Givet baserna i P_2 :

- $B = \{1, x, x^2\}$ (standardbasen)
- $B' = \{1 + x, 1 - x, x^2\}$

Bestäm $P_{B \rightarrow B'}$.

Steg 1: Uttryck B 's vektorer i B' 's koordinater.

Översätt till $\mathbb{R}^3$:

- $B: (1) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, (x) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, (x^2) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $B': (1 + x) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, (1 - x) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, (x^2) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Steg 2: Radreducera $[B' \mid B]$ (i $\mathbb{R}^3$):

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{R_2/(-2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kontroll: Polynomet $p(x) = 3 + 2x$ har $[p]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$[p]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifiera: $\frac{5}{2}(1+x) + \frac{1}{2}(1-x) + 0 \cdot x^2 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = 3 + 2x \checkmark$

7. Beslutsträd

Beräkna övergångsmatrisen $P_{B \rightarrow B'}$

flowchart TD

```
A["Givet: baser B och B' för V"] --> B{"Arbetar vi i R^n?"}
B -- Ja --> C["Bilda [B' | B]\noch radreducera\ntill [I | P]"]
B -- Nej --> D["Översätt B och B'\ntill koordinater i R^n\n(via standardbasen)"]
D --> C
C --> E["P = P_{B \to B'}"]
E --> F{"Behöver du P_{B' \to B}?"}
F -- Ja --> G["P_{B' \to B} = P^{-1}"]
F -- Nej --> H["Klar!"]
```

Beräkna $[\vec{x}]_{B'}$ givet $[\vec{x}]_B$

flowchart TD

```
A["Givet:  $[x]_B$  och baserna  $B, B'$ "] --> B["Beräkna  $P_{B \rightarrow B'}$ \n(se ovan)"]
B --> C["Matrismultiplicera:\n $[x]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} \cdot [x]_B$ "]
C --> D["Svar:  $[x]_{B'}$ "]
```

8. Övningsuppgifter

Övergångsmatris-uppgifter

🔗 Uppgift 1: Övergångsmatris i $\mathbb{R}^2$

Givet:

- $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ (standardbasen)
- $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Bestäm $P_{B \rightarrow B'}$.

🔗 Ledtråd 1

Radreducera $[B' \mid B]$, dvs. $\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

🔗 Ledtråd 2

Alternativt: B är standardbasen, så $P_{B \rightarrow B'} = (P_{B' \rightarrow E})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$.

✓ Facit

$$P_{B \rightarrow B'} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

✓ Full lösning

Metod 1 (radreducering): $\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 / (-5)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - 3R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right]$$

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Metod 2 (invers): Eftersom B är standardbasen: $P_{B \rightarrow B'} = P_{E \rightarrow B'} = (P_{B' \rightarrow E})^{-1} =$
 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Kontroll: $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [\vec{e}_1]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$

Verifiera: $\frac{3}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-\frac{1}{5}) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} - \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_1 \quad \checkmark$

🔗 Uppgift 2: Mellan två icke-standardbaser

Givet i $\mathbb{R}^2$:

- $B = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\}$
- $B' = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}$

a) Bestäm $P_{B \rightarrow B'}$. b) Om $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, bestäm $[\vec{x}]_{B'}$.

Ledtråd

Radreducera $[B' \mid B] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right]$.

✓ Facit

$$\text{a) } P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } [\vec{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

✓ Full lösning

$$\text{a) } \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2/2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } [\vec{x}]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Kontroll: } \vec{x} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{I } B': -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2 \\ 0 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \checkmark$$

🔗 Uppgift 3: Basbyte i P_1

Givet baserna i P_1 :

- $B = \{1, x\}$ (standardbasen)
- $B' = \{1 + x, 1 - x\}$

a) Bestäm $P_{B \rightarrow B'}$. b) Bestäm koordinaterna för $p(x) = 5 + 3x$ i basen B' .

Ledtråd

Översätt till $\mathbb{R}^2$: $1 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(1 + x) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(1 - x) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

✓ Facit

$$\text{a) } P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } [5 + 3x]_{B'} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ alltså } 5 + 3x = 4(1 + x) + 1(1 - x).$$

✓ Full lösning

a) Radreducera $[B' \mid B]$ i $\mathbb{R}^2$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2 / (-2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) $[5 + 3x]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ (i standardbasen).

$$[5 + 3x]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kontroll: $4(1 + x) + 1(1 - x) = 4 + 4x + 1 - x = 5 + 3x$ ✓

Inversuppgifter

Uppgift 4: Omvänd riktning

Från uppgift 2 vet vi att $P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Bestäm $P_{B' \rightarrow B}$ och använd den för att beräkna $[\vec{x}]_B$ givet $[\vec{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Ledtråd

$P_{B' \rightarrow B} = (P_{B \rightarrow B'})^{-1}$. Använd 2×2 -inversformeln.

✓ Facit

$$P_{B' \rightarrow B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} \frac{17}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

✓ Full lösning

$$\det(P_{B \rightarrow B'}) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

$$P_{B' \rightarrow B} = \frac{1}{-\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$[\vec{x}]_B = P_{B' \rightarrow B} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + 5 \\ \frac{2}{3} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{Kontroll: } \vec{x} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Andra vägen: } \frac{17}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{3} - \frac{2}{3} \\ \frac{17}{3} + \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \checkmark$$

Konceptuella uppgifter

🔗 Uppgift 5: Sant eller falskt?

Avgör om påståendena är sanna eller falska. Motivera kort.

- a) Övergångsmatrisen $P_{B \rightarrow B'}$ är alltid kvadratisk. b) $P_{B \rightarrow B'} = P_{B' \rightarrow B}$. c) $(P_{B \rightarrow B'})^{-1}$ existerar alltid.
 d) Om $P_{B \rightarrow B'} = I$ (identitetsmatrisen), så är $B = B'$. e) Kolumnerna i $P_{B \rightarrow B'}$ är koordinaterna för B' 's basvektorer i bas B .

🔗 Ledtråd

- b) Tänk på vad som händer om du sätter $P_{B \rightarrow B'} = P_{B' \rightarrow B}$: det ger $(P_{B \rightarrow B'})^2 = I$, dvs. P är sin egen invers. Gäller det generellt?

✓ Facit

- a) **Sant.** Både B och B' har n vektorer (dimensionen av rummet), så $P_{B \rightarrow B'}$ är $n \times n$.
- b) **Falskt.** $P_{B' \rightarrow B} = (P_{B \rightarrow B'})^{-1}$, och en matris är i allmänhet inte lika med sin invers. T.ex. i uppgift 2 ovan.
- c) **Sant.** Övergångsmatrisen är alltid inverterbar (satsen i avsnitt 4).
- d) **Sant.** Om $P_{B \rightarrow B'} = I$ så gäller $[\vec{x}]_{B'} = I \cdot [\vec{x}]_B = [\vec{x}]_B$ för alla $\vec{x}$. Samma koordinater i båda baserna innebär att baserna är identiska.
- e) **Falskt.** Kolumnerna i $P_{B \rightarrow B'}$ är koordinaterna för B 's basvektorer i bas B' — inte tvärtom! (Se avsnitt 3.1.)

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Change of basis \(kap 13\)](#) — basbyte visuellt förklarat
- [3Blue1Brown: Linear combinations, span, and basis vectors \(kap 2\)](#) — grunden för baser och koordinater
- [3Blue1Brown: Eigenvectors and eigenvalues \(kap 14\)](#) — egenvärden och basbyte hänger ihop

Wikipedia

- [Change of basis](#)
- [Transition matrix](#)
- [Coordinate vector](#)

Fördjupning

- [Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Change of Basis](#)
-

Kolonnrum, radrum och nollrum

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #matris

Kurs: M0067M **Förkunskaper:** Matriser, Linjära ekvationssystem

För en $m \times n$ -matris A :

Kolonnrum $\text{Col}(A)$

Spännet av A 's kolonnvektorer. Ett delrum av $\mathbb{R}^m$. Består av alla b så att $Ax = b$ har lösning.

Radrum $\text{Row}(A)$

Spännet av A 's radvektorer. Ett delrum av $\mathbb{R}^n$.

Nollrum $\text{Nul}(A)$

Lösningsmängden till $Ax = 0$. Ett delrum av $\mathbb{R}^n$.

Dimensionssatsen

$$\dim \text{Col}(A) + \dim \text{Nul}(A) = n$$

där $\dim \text{Col}(A) = \text{rang}(A) = \dim \text{Row}(A)$.

Se även

- Dimension
- Linjära avbildningar

Resurser

- [3Blue1Brown: Null space & column space](#)

Egenvärden och egenvektorer

19 okt. 2026, 13 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #egenvärde #matris

1. Definition av egenvärde och egenvektor

3B1B: Eigenvectors and eigenvalues [↗](#)

1.1 Grundidén

När vi multiplicerar en vektor $\vec{x}$ med en matris A ändras i allmänhet **både riktning och längd**. Men ibland finns speciella vektorer vars **riktning bevaras** — de bara skalas. Dessa är egenvektorerna.

Definition: Egenvärde och egenvektor

Låt A vara en $n \times n$ -matris. En **nollskild** vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ kallas en **egenvektor** till A om

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

för någon skalär λ . Skalären λ kallas ett **egenvärde** till A , och $\vec{x}$ sägs vara en egenvektor **motsvarande** λ .

Intuition: Att multiplicera med A gör i allmänhet en komplicerad transformation — rotation, skjuvning, skalning i olika riktningar. Men längs egenvektorerna gör A bara en enkel skalning med faktorn λ .

Nollvektorn är aldrig en egenvektor

Kravet $\vec{x} \neq \vec{0}$ är viktigt! Annars vore $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ uppfyllt för **alla** A och **alla** λ , vilket ger meningslös information.

Däremot kan $\lambda = 0$ vara ett egenvärde — det betyder att $A\vec{x} = \vec{0}$ har en nontrivial lösning, dvs. A är singulär.

1.2 Geometrisk tolkning

Beroende på tecknet och storleken på λ sker olika saker med egenvektorn:

Värde på λ	Effekt på $\vec{x}$
$\lambda > 1$	Sträcks (samma riktning)
$0 < \lambda < 1$	Krymps (samma riktning)
$\lambda = 1$	Oförändrad ($A\vec{x} = \vec{x}$)
$\lambda = 0$	Skickas till $\vec{0}$
$-1 < \lambda < 0$	Krymps och byter riktning
$\lambda < -1$	Sträcks och byter riktning
$\lambda = -1$	Byter riktning, samma längd

≡ Exempel 1: Verifiera en egenvektor

Visa att $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

Lösning: Beräkna $A\vec{x}$:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\vec{x}$$

Alltså är $\vec{x}$ en egenvektor med egenvärde $\lambda = 3$. Geometriskt: A sträcker vektorn $(1, 2)$ med faktor 3 utan att ändra riktning.

≡ Exempel 2: Geometrisk egenvektorer

Betrakta spegling i x-axeln: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

- Vektorer **längs x-axeln** (t.ex. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$) är opåverkade $\rightarrow \lambda = 1$
- Vektorer **längs y-axeln** (t.ex. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$) byter riktning $\rightarrow \lambda = -1$

Alla andra vektorer ändrar riktning och är **inte** egenvektorer.

2. Beräkna egenvärden: den karakteristiska ekvationen

2.1 Härledning

Vi söker λ och $\vec{x} \neq \vec{0}$ sådana att $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Skriv om:

$$A\vec{x} = \lambda I\vec{x} \implies A\vec{x} - \lambda I\vec{x} = \vec{0} \implies (\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

För att detta ska ha en **nontrivial** lösning ($\vec{x} \neq \vec{0}$) krävs att matrisen $\lambda I - A$ är **singulär**:

Sats 5.1.1: Karakteristisk ekvation

λ är ett egenvärde till A om och bara om

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Detta kallas den **karakteristiska ekvationen** för A .

Varför $\lambda I - A$ och inte $A - \lambda I$? Båda fungerar! $\det(\lambda I - A) = 0 \iff \det(A - \lambda I) = 0$ (de skiljer sig bara med ett tecken $(-1)^n$, som inte påverkar nollställena). Boken använder $\lambda I - A$ för att det karakteristiska polynomet ska ha positivt ledande koefficient.

2.2 Det karakteristiska polynomet

Definition: Karakteristiskt polynom

Det **karakteristiska polynomet** för en $n \times n$ -matris A är

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

Det är ett polynom av grad n i λ , med ledande term λ^n .

Egenvärdena till A är **rötterna** till $p(\lambda) = 0$.

Eftersom ett polynom av grad n har högst n rötter, har en $n \times n$ -matris **högst n egenvärden**.

2.3 Räkneexempel

≡ Exempel 3: Egenvärden för 2×2 -matris

Bestäm egenvärdena till $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

Lösning:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Egenvärden: $\lambda = 3$ och $\lambda = -1$.

≡ Exempel 4: Egenvärden för 3×3 -matris

Bestäm egenvärdena till $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$.

Lösning:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix}$$

Utveckla (t.ex. efter rad 1):

$$= \lambda(\lambda(\lambda - 8) + 17) + 1(0 - 4) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Hitta rötterna: Testa heltalsdivisorer till konstanttermen -4 : $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

$$\text{Testa } \lambda = 4: 64 - 128 + 68 - 4 = 0 \checkmark$$

$$\text{Polynomdivision: } \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

$$\text{Andragradsekvation: } \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Egenvärden: $\lambda = 4, \lambda = 2 + \sqrt{3}, \lambda = 2 - \sqrt{3}$.

🔗 Strategi: Hitta rötter till karakteristiska polynomet

1. **Faktorisera direkt** om det är uppenbart
2. **Testa heltalsdivisorer** till konstanttermen (rationella rotsatsen)
3. **Polynomdividera** bort kända rötter för att reducera graden
4. **Andragsgradsforneln** för de återstående faktorerna
5. **2×2 -trick:** $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$ (se övning 28 i boken)

3. Triangulära matriser – egenvärden direkt

📄 Sats 5.1.2: Egenvärden för triangulära matriser

Om A är en **triangulär matris** (övertriangulär, undertriangulär eller diagonal), så är egenvärdena **diagonalelementen**.

Varför? Determinanten av en triangulär matris är produkten av diagonalelementen:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}) = 0$$

☰ Exempel 5: Egenvärden för triangulär matris

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Egenvärden: $\lambda = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{2}{3}, \lambda = -\frac{1}{4}$ (avläses direkt från diagonalen).

4. Hitta egenvektorer och egenrum

4.1 Metod

När vi har hittat ett egenvärde λ finner vi motsvarande egenvektorer genom att lösa det homogena systemet:

$$(\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

Definition: Egenrum

Egenrummet (eigenspace) motsvarande egenvärdet λ är Lösningssrummet till $(\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$:

$$E_\lambda = \text{null}(\lambda I - A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$$

Egenrummet är ett **delrum** av $\mathbb{R}^n$. Egenvektorerna till λ är de **nollskilda** vektorerna i E_λ .

Koppling till V5L1: Egenrummet E_λ är precis **nollrummet** för matrisen $\lambda I - A$. Vi vet redan hur man hittar baser för **nollrum** — radreducera och identifiera fria variabler!

4.2 Räkneexempel

Exempel 6: Egenrum för 2×2 -matris

Bestäm baser för egenrummen till $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Steg 1: Hitta egenvärdena.

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -3 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + 1) - 6 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

Egenvärden: $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -3$.

Steg 2: Egenrum för $\lambda_1 = 2$.

Lös $(2I - A)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Radreducera: } \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + \frac{2}{3}R_1} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ekvation: } 3x_1 - 3x_2 = 0 \implies x_1 = x_2 = t.$$

$$E_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Steg 3: Egenrum för $\lambda_2 = -3$.

Lös $(-3I - A)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ekvation: $-2x_1 - 3x_2 = 0 \implies x_1 = -\frac{3}{2}x_2$. Sätt $x_2 = 2t$:

$$E_{-3} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

≡ Exempel 7: Egenrum för 3×3 -matris (flerdimensionellt egenrum)

Bestäm baser för egenrummen till $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Steg 1: Hitta egenvärdena.

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

Egenvärden: $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 2$ (dubbel rot).

Steg 2: Egenrum för $\lambda_1 = 1$.

Lös $(I - A)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{radred.}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fria variabeln $x_3 = s$ ger $x_1 = -2s$, $x_2 = -s$.

$$E_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (\dim = 1)$$

Steg 3: Egenrum för $\lambda_2 = 2$.

Lös $(2I - A)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{radred.}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fria variabler: $x_2 = t$, $x_3 = s$. Då $x_1 = -s$.

$$\vec{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (\dim = 2)$$

Notera: $\lambda = 2$ har algebraisk multiplicitet 2 (dubbel rot) och geometrisk multiplicitet 2 (tvådimensionellt egenrum). Dessa **matchar**, vilket visar sig vara viktigt för **diagonalisering**.

5. Tillvägagångssätt – sammanfattning

Metod: Hitta egenvärden och egenvektorer

Steg 1: Beräkna det karakteristiska polynomet $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

Steg 2: Lös $p(\lambda) = 0$ för att hitta egenvärdena.

Steg 3: För varje egenvärde λ_k , lös $(\lambda_k I - A)\vec{x} = \vec{0}$ (radreducera!) för att hitta en bas för egenrummet E_{λ_k} .

6. Egenvärden och inverterbarhet

Sats 5.1.4: Egenvärden och inverterbarhet

En kvadratisk matris A är **inverterbar** om och bara om $\lambda = 0$ **inte** är ett egenvärde till A .

Varför? $\lambda = 0$ är ett egenvärde $\iff \det(0 \cdot I - A) = 0 \iff \det(-A) = 0 \iff \det(A) = 0 \iff A$ ej inverterbar.

Alternativ förklaring: $\lambda = 0$ egenvärde betyder att $A\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}$ har en nontrivial lösning, dvs. $\text{null}(A) \neq \{\vec{0}\}$, dvs. A är singulär.

7. 2×2 -trick: snabbformel

Snabbformel för 2×2 -matris

Om $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, så är det karakteristiska polynomet:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\text{tr}(A)}\lambda + \underbrace{(ad-bc)}_{\text{det}(A)}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \text{det}(A)$$

Egenvärdena fås direkt med andragradsformeln:

$$\lambda = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)}}{2}$$

Exempel: Snabbformeln

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$. Då $\text{tr}(A) = 3 + (-1) = 2$ och $\det(A) = -3 - 0 = -3$.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Egenvärden: $\lambda = 3$ och $\lambda = -1$. ✓

- summa av egenvärden = spåret. Kontroll
- Produkt av egenvärdena blir determinanten

8. Ekvivalenssatsen – utökning

Vi kan nu lägga till ett nytt villkor till den stora ekvivalenssatsen (jfr [V5L1 M0067M](#)):

Sats 5.1.5: Ekvivalenta villkor (utökning)

Om A är en $n \times n$ -matris, så är följande ekvivalenta:

(a) A är inverterbar (b) $A\vec{x} = \vec{0}$ har bara triviala lösningen (c) A kan radreduceras till I_n (d) A är en produkt av **elementärmatriser** (e) $A\vec{x} = \vec{b}$ är konsistent för alla $\vec{b}$ (f) $A\vec{x} = \vec{b}$ har exakt en lösning för alla $\vec{b}$ (g) $\det(A) \neq 0$ (h) Kolumnerna i A är **linjärt oberoende** (i) Raderna i A är linjärt oberoende (j) Kolumnerna spänner upp $\mathbb{R}^n$ (k) Raderna spänner upp $\mathbb{R}^n$ (l) Kolumnerna bildar en bas för $\mathbb{R}^n$ (m) Raderna bildar en bas för $\mathbb{R}^n$ (n) $\text{rang}(A) = n$ (o) $\text{null}(A) = \{\vec{0}\}$ (p) $\lambda = 0$ är **inte ett egenvärde till A** ← NYTT

9. Övningsuppgifter

Beräkningsuppgifter

Uppgift 1: Egenvärden och egenvektorer (2×2)

Bestäm egenvärdena och en bas för varje egenrum till $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Ledtråd

Använd 2×2 -tricket: $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$.

Facit

Egenvärden: $\lambda = 5$ och $\lambda = -1$.

✓ Full lösning

$$\text{tr}(A) = 1 + 3 = 4, \det(A) = 3 - 8 = -5.$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

Egenvärden: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$.

Egenrum för $\lambda = 5$: Lös $(5I - A)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_2 = t. \text{ Bas: } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Egenrum för $\lambda = -1$: Lös $(-I - A)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -2x_2, x_2 = t. \text{ Bas: } \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

🔗 Uppgift 2: Egenvärden och egenvektorer (3×3)

Bestäm egenvärdena och en bas för varje egenrum till $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

🔗 Ledtråd 1

Utveckla $\det(\lambda I - A)$ efter rad 2 eller kolumn 2 (det finns nollor där).

Ledtråd 2

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

✓ Facit

Egenvärden: $\lambda = 1, 2, 3$. Tre distinkta egenvärden.

✓ Full lösning

Utveckla efter kolumn 2:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)[(\lambda - 4)(\lambda - 1) + 2] \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \end{aligned}$$

Egenrum för $\lambda = 1$: $(I - A)\vec{x} = \vec{0}$: $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_1 = 0, x_3 = 0,$

$x_2 = t$. Bas: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$

Egenrum för $\lambda = 2$: $(2I - A)\vec{x} = \vec{0}$: $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_1 = -\frac{1}{2}t, x_2 =$

$t, x_3 = t$. Bas: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

Egenrum för $\lambda = 3$: $(3I - A)\vec{x} = \vec{0}$: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = -t, x_2 = t,$

$x_3 = t$. Bas: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

🔗 Uppgift 3: Geometrisk tolkning

Bestäm egenvärdena och beskriv egenrummen **geometriskt** (utan beräkning) för:

a) Spegling i x-axeln: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) Projektion på x-axeln: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) Rotation 90° moturs:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

✓ Facit

a) $\lambda = 1$: vektorer längs x-axeln (oförändrade). $\lambda = -1$: vektorer längs y-axeln (byter riktning).

b) $\lambda = 1$: vektorer längs x-axeln (oförändrade). $\lambda = 0$: vektorer längs y-axeln (skickas till $\vec{0}$).
Notera: A är singulär — konsekvent med $\lambda = 0$.

c) Inga reella egenvärden! $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ har inga reella rötter. Geometriskt: en rotation 90° bevarar aldrig riktningen av en vektor, så det finns inga egenvektorer i $\mathbb{R}^2$.

Konceptuella uppgifter

🔗 Uppgift 4: Sant eller falskt?

Avgör om påståendena är sanna eller falska. Motivera kort.

a) Om $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ för en skalär λ , så är $\vec{x}$ en egenvektor till A . b) En matris kan ha egenvärde $\lambda = 0$. c) Om A har egenvärde λ , så har A^2 egenvärde λ^2 . d) Egenvärdena till A och A^T är samma. e) Om A har egenvärde λ och $\vec{x}$ är en motsvarande egenvektor, så är $3\vec{x}$ också en egenvektor med

egenvärde 3λ . f) Om 0 är ett egenvärde till A , så är kolumnerna i A linjärt beroende.

✓ Facit

- a) **Falskt.** Kravet $\vec{x} \neq \vec{0}$ saknas. Nollvektorn uppfyller $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ men är per definition inte en egenvektor.
- b) **Sant.** $\lambda = 0$ är egenvärde $\iff A\vec{x} = \vec{0}$ har nontrivial lösning $\iff A$ ej inverterbar.
- c) **Sant.** Om $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, så $A^2\vec{x} = A(A\vec{x}) = A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x}) = \lambda^2\vec{x}$.
- d) **Sant.** $\det(\lambda I - A^T) = \det((\lambda I - A)^T) = \det(\lambda I - A)$, så de har samma karakteristiska polynom.
- e) **Falskt.** $3\vec{x}$ är en egenvektor, men med egenvärde λ (inte 3λ): $A(3\vec{x}) = 3(A\vec{x}) = 3\lambda\vec{x} = \lambda(3\vec{x})$.
- f) **Sant.** $\lambda = 0$ egenvärde $\implies A$ ej inverterbar $\implies$ kolumnerna linjärt beroende (ekvivalenssatsen).

Resurser

Videor

Video player configuration error

Error 153

Watch video on YouTube

[Learn more](#)

Error 153

Visuella introduktionen

Video player configuration error

Error 153

Watch video on YouTube

[Learn more](#)

Error 153

2×2 -tricket

- [MIT 18.06SC: Eigenvalues and Eigenvectors \(Gilbert Strang\)](#) — klassisk föreläsning

Interaktiva verktyg

- [matrixcalc.org](#) — beräkna egenvärden och egenvektorer online

Wikipedia

- [Eigenvalues and eigenvectors](#)
- [Characteristic polynomial](#)

Fördjupning

- [Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Eigenvalues and Eigenvectors](#)
-

Diagonalisering

19 okt. 2026, 18 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #egenvärde #matris

1. Likhetsomvandlingar

1.1 Grundidén

Produkter av formen $P^{-1}AP$, där A och P är $n \times n$ -matriser och P är inverterbar, är det centrala verktyget i detta kapitel. Omvandlingen

$$A \longrightarrow P^{-1}AP$$

kallas en **likhetsomvandling** ("similarity transformation"). Matrisen A avbildas på matrisen $P^{-1}AP$.

Dessa omvandlingar är viktiga eftersom de **bevarar** många egenskaper hos A .

1.2 Likhetsbeständiga egenskaper

Om $B = P^{-1}AP$ kallas dessa bevarade egenskaper **likhetsbeständiga** (similarity invariants):

Egenskap	Vad som gäller
Determinant	$\det(A) = \det(P^{-1}AP)$
Inverterbarhet	A inverterbar $\iff P^{-1}AP$ inverterbar
Rang	$\text{rang}(A) = \text{rang}(P^{-1}AP)$
Nollitet	$\text{null}(A) = \text{null}(P^{-1}AP)$
Spår	$\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}AP)$
Karakteristiskt polynom	A och $P^{-1}AP$ har samma karakteristiska polynom
Egenvärden	A och $P^{-1}AP$ har samma egenvärden
Egenrumsdimension	Om λ är egenvärde har A och $P^{-1}AP$ egenrum med samma dimension för λ

Varför bevaras determinanten?

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \frac{1}{\det(P)} \det(A) \det(P) = \det(A)$$

2. Likartade matriser och diagonaliserbarhet

Definition: Likartade matriser

Låt A och B vara kvadratiske matriser. Vi säger att B är **likartad med** A ("similar to A ") om det finns en inverterbar matris P sådan att

$$B = P^{-1}AP$$

Vi säger då att A och B är **likartade matriser**.

Symmetri

Likartadhet är symmetrisk: om $B = P^{-1}AP$ så gäller $A = Q^{-1}BQ$ med $Q = P^{-1}$.

Definition: Diagonaliserbar matris

En kvadratisk matris A kallas **diagonaliserbar** om den är likartad med någon diagonalmatris D , dvs. om det finns en inverterbar matris P sådan att $P^{-1}AP$ är diagonal.

Man säger då att P **diagonaliserar** A .

Varför vill vi diagonalisera? En diagonalmatris är enkel att arbeta med — egenvärden, determinant, potenser är alla triviala att beräkna. Om A är diagonaliserbar ärver A all denna enkelhet.

3. Sats 5.2.1 – Diagonaliserbarhetskriteriet

Sats 5.2.1: Ekvivalenta villkor

Om A är en $n \times n$ -matris, är följande ekvivalenta:

- (a) A är diagonaliserbar
- (b) A har n linjärt oberoende egenvektorer

Bevisidé ($\Rightarrow$): Anta att $P^{-1}AP = D$, dvs. $AP = PD$. Låt $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ vara kolumnvektorerna i P och $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vara diagonalelementen i D . Då ger $AP = PD$:

$$A\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i \quad \text{för alla } i$$

Eftersom P är inverterbar är kolumnerna linjärt oberoende och nollskilda — alltså är de n linjärt oberoende egenvektorer.

Bevisidé ($\Leftarrow$): Anta att A har n linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ med egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Bilda $P = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \dots \ \mathbf{p}_n]$. Då är $AP = PD$ och P inverterbar, så $P^{-1}AP = D$.

Nyckelsamband

Om $P = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \dots \ \mathbf{p}_n]$ diagonaliserar A , gäller:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Det i :te diagonalelementet i $P^{-1}AP$ är egenvärdet som svarar mot den i :te kolumnen i P .

4. Metod för diagonalisering

Procedur: Diagonalisera en $n \times n$ -matris A

Steg 1. Hitta en bas för varje egenrum. Räkna ihop det totala antalet basvektorer.

- Om totalen = $n \rightarrow A$ är diagonaliserbar.

- Om totalen $< n \rightarrow A$ är **inte** diagonaliserbar. Stopp.

Steg 2. Bilda $P = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n]$ med de n basvektorer som kolumner (i valfri ordning).

Steg 3. $P^{-1}AP$ är en diagonalmatris vars i :te diagonalelement är egenvärdet som svarar mot $\mathbf{p}_i$.

Ordningen spelar roll – men bara för D

Ordningen på kolumnerna i P kan väljas fritt. Byter du ordning på egenvektorer ändras bara ordningen på egenvärden i diagonalmatrisen.

5. Räkneexempel – diagonalisering

Exempel 1: Hitta P som diagonaliserar A (diagonaliserbar)

$$\text{Diagonalisera } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Steg 1: Egenvärden. Från föregående föreläsning (V5L2, Exempel 7): $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \text{ (dubbel)}$

Steg 2: Baser för egenrummen.

$$\lambda = 2: E_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ (dimension 2)}$$

$$\lambda = 1: E_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ (dimension 1)}$$

Totalt: $2 + 1 = 3 = n \rightarrow A$ är diagonaliserbar ✓

Steg 3: Bilda P .

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

≡ Exempel 2: En matris som inte är diagonaliserbar

Visa att $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ inte är diagonaliserbar.

Eigenvärden: Triangulär matris $\rightarrow$ eigenvärden direkt: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ (dubbel).

Det karakteristiska polynomet är $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$.

Eigenrum för $\lambda = 1$: Lös $(I - A)\vec{x} = \vec{0}$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{radred.}} \text{rang} = 2 \implies \dim E_1 = 1$

Eigenrum för $\lambda = 2$: Lös $(2I - A)\vec{x} = \vec{0}$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{radred.}} \text{rang} = 2 \implies \dim E_2 = 1$

Totalt antal basvektorer: $1 + 1 = 2 < 3 = n$.

Slutsats: A är **inte** diagonaliserbar.

≡ Exempel 3: Triangulär matris (diagonaliserbar)

Matrisen $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ är övertriangulär med distinkta diagonalelement.

Eigenvärden: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = -2$ (alla distinkta).

Eftersom alla eigenvärden är distinkta är A diagonaliserbar (Sats 5.2.2(b)).

6. Sats 5.2.2 – Distinkta egenvärden

Sats 5.2.2: Distinkta egenvärden och linjärt oberoende

(a) Om $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ är **distinkta** egenvärden till A , och $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är motsvarande egenvektorer, så är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ **linjärt oberoende**.

(b) En $n \times n$ -matris med n distinkta egenvärden är **diagonaliserbar**.

Konversen av (b) är falsk

En matris med **färre** än n distinkta egenvärden kan ändå vara diagonaliserbar! Identitetsmatrisen I_n har bara ett egenvärde ($\lambda = 1$) men är redan diagonal. Satsen ger ett tillräckligt, **ej nödvändigt**, villkor.

7. Algebraisk och geometrisk multiplicitet

Definition: Multipliciteter

Låt λ_0 vara ett egenvärde till en $n \times n$ -matris A .

- Den **geometriska multipliciteten** av λ_0 är $\dim(E_{\lambda_0})$ – dimensionen av egenrummet.
- Den **algebraiska multipliciteten** av λ_0 är antalet gånger $(\lambda - \lambda_0)$ uppträder som faktor i det karakteristiska polynomet $\det(\lambda I - A)$.

Intuition: Algebraisk multiplicitet = “hur stark” roten är i det karakteristiska polynomet. Geometrisk multiplicitet = “hur många oberoende riktningar” egenvärdet har.

Exempel: Multipliciteter

Karakteristiskt polynom: $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

Eigenvärde	Algebraisk mult.	Geometrisk mult. (Ex. 1)	Geometrisk mult. (Ex. 2)
$\lambda = 1$	1	1	1
$\lambda = 2$	2	2	1

Ex. 1: geo mult = alg mult $\rightarrow$ diagonaliserbar ✓ Ex. 2: geo mult < alg mult $\rightarrow$ **inte** diagonaliserbar ✗

□ Sats 5.2.4: Multiplicitetssatsen

Om A är en kvadratisk matris gäller:

(a) För varje eigenvärde är den **geometrisk multiplicitet** $\leq$ **algebraisk multiplicitet**.

(b) A är diagonaliserbar om och bara om:

- Det karakteristiska polynomet kan skrivas som en produkt av linjära faktorer, **och**
- Den geometriska multipliciteten är **lika med** den algebraiska multipliciteten för varje eigenvärde.

🔗 Praktisk konsekvens

Villkor (b) ger ett **fullständigt** kriterium för diagonaliserbarhet — det räcker att kontrollera multipliciteterna utan att leta efter n oberoende egenvektorer direkt.

8. Potenser av en matris

8.1 Eigenvärden för A^k

□ Sats 5.2.3: Eigenvärden för matrispotenser

Om k är ett positivt heltal, λ är ett eigenvärde till A , och $\mathbf{x}$ är en motsvarande egenvektor, så är λ^k ett eigenvärde till A^k med samma egenvektor $\mathbf{x}$.

Bevis: $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$. Induktion ger $A^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$.

8.2 Beräkna A^k via diagonalisering

Om A är diagonaliserbar med $P^{-1}AP = D$, gäller:

$$P^{-1}A^kP = D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

vilket ger formeln:

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Varför är detta effektivt?

Att upphöja en diagonalmatris till k :te potensen är trivalt — bara upphöj varje diagonalelement. Arbetet ligger i att diagonalisera A **en gång**, sedan kan A^k beräknas för **valfritt** k .

Exempel 4: Beräkna A^{13}

Beräkna A^{13} för $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Från Exempel 1 vet vi att $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ diagonaliserar A och $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Alltså:

$$\begin{aligned} A^{13} &= PD^{13}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8190 & 0 & -16382 \\ 8191 & 8192 & 8191 \\ 8191 & 0 & 16383 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(Notera: $2^{13} = 8192$)

9. Tillvägagångssätt – sammanfattning

Metod: Avgöra om A är diagonaliserbar

Steg 1. Hitta egenvärdena $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ och deras **algebraiska multipliciteter** från $\det(\lambda I - A) = 0$.

Steg 2. För varje egenvärde: beräkna $\dim(E_\lambda) = \text{nullitet}(\lambda I - A)$ – den **geometriska multipliciteten**.

Steg 3. Kontroll:

- Om geo mult = alg mult för **alla** egenvärden $\rightarrow$ diagonaliserbar ✓
- Om geo mult < alg mult för **något** egenvärde $\rightarrow$ ej diagonaliserbar ✗

Steg 4. (Om diagonaliserbar) Bilda P med basvektorerna för alla egenrum som kolumner.

10. Övningsuppgifter (V5L3)

Beräkningsuppgifter

Uppgift 1: Hitta P som diagonaliserar (2×2)

Hitta en matris P som diagonaliserar $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$, och verifiera genom att beräkna $P^{-1}AP$.

Ledtråd

Börja med att hitta egenvärdena via det karakteristiska polynomet $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$.

Facit

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

✓ Full lösning

Eigenvärden: $p(\lambda) = \lambda^2 - 0 \cdot \lambda + (-1) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ (distinkta $\rightarrow$ diagonaliserbar ✓)

Egenrum för $\lambda = 1$: $(I - A)\vec{x} = \vec{0}$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Bas: $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\}$

Egenrum för $\lambda = -1$: $(-I - A)\vec{x} = \vec{0}$: $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Bas: $\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

🔗 Uppgift 2: Hitta P som diagonaliserar (3×3)

Hitta en matris P som diagonaliserar $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

🔗 Ledtråd

Matrisen är övertriangulär — läs av eigenvärdena direkt. Observera att $\lambda = 3$ är ett dubbelt eigenvärde.

✓ Facit

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

✓ Full lösning

Eigenvärden: $\lambda_1 = 2$ (enkel), $\lambda_2 = 3$ (algebraisk mult. 2)

$$\lambda = 2: \text{Lös } (2I - A)\vec{x} = \vec{0}: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = 0, x_3 = 0, x_1 \text{ fri. Bas:}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \text{Dim} = 1 \checkmark$$

$$\lambda = 3: \text{Lös } (3I - A)\vec{x} = \vec{0}: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_2 \text{ och } x_3 \text{ fria, } x_1 = -2x_3. \text{ Bas:}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \text{Dim} = 2 \checkmark$$

Geo mult = alg mult för alla egenvärden $\rightarrow$ diagonaliserbar.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

🔗 Uppgift 3: Avgör diagonaliserbarhet

Avgör om $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar. Motivera.

✓ Facit

Ja, A är diagonaliserbar.

✓ Full lösning

A är triangulär, egenvärden: $\lambda_1 = 0$ (algebraisk mult. 2), $\lambda_2 = 1$ (algebraisk mult. 1).

$$\lambda = 0: (0 \cdot I - A)\vec{x} = -A\vec{x} = \vec{0}, \text{ dvs. } A\vec{x} = \vec{0}: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \implies x_3 =$$

0, x_1, x_2 fria $\text{Dim } E_0 = 2 = \text{algebraisk multiplicitet} \checkmark$

$\lambda = 1$: $\dim E_1 = 1 = \text{algebraisk multiplicitet} \checkmark$

Geo mult = alg mult för alla $\rightarrow$ diagonaliserbar. $\checkmark$

🔗 Uppgift 4: Beräkna A^{10} via diagonalisering

Beräkna A^{10} där $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

🔗 Ledtråd

Använd formeln $A^k = P D^k P^{-1}$.

✓ Facit

$$A^{10} = \begin{bmatrix} \frac{3+2 \cdot 6^{10}}{5} & \frac{3(6^{10}-1)}{5} \\ \frac{2(6^{10}-1)}{5} & \frac{2+3 \cdot 6^{10}}{5} \end{bmatrix}$$

✓ Full lösning

Eigenvärden: $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3.$$

Egenvektorer:

- $\lambda = 2$: Bas $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ – lös $(2I - A)\vec{x} = \vec{0}$: $x_1 = \frac{3}{2}x_2$. Välj $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.
- $\lambda = -3$: Lös $(-3I - A)\vec{x} = \vec{0}$: $x_1 = -x_2$. Välj $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$A^{10} = P \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & (-3)^{10} \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 6^{10}/\dots \end{bmatrix} P^{-1}$$

Notera: $(-3)^{10} = 3^{10} = 59049$, $2^{10} = 1024$.

Konceptuella uppgifter

🔍 Uppgift 5: Sant eller falskt?

Avgör och motivera:

a) Om A är diagonaliserbar med $P^{-1}AP = D$, så är A^2 diagonaliserbar. b) Om A och B är likartade, har de samma egenvektorer. c) En matris med ett egenvärde av algebraisk multiplicitet 3 kan aldrig vara diagonaliserbar. d) Om A har n distinkta egenvärden är A diagonaliserbar. e) Diagonal- och triangulärmatriser är alltid diagonaliserbara.

✓ Facit

a) **Sant.** $A^2 = PD^2P^{-1}$ — se Sats 5.2.3. D^2 är diagonal, och P är fortfarande inverterbar.

b) **Falskt.** Likartade matriser har samma **egenvärden** (likhetsbeständig), men inte nödvändigtvis samma egenvektorer. Om $B = P^{-1}AP$ och $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, så är $P^{-1}\mathbf{v}$ en egenvektor till B — men det är i allmänhet en annan vektor.

c) **Falskt.** Om egenrummet för detta egenvärde har dimension 3 (geo mult = alg mult = 3), och övriga egenvärden också uppfyller multiplicitetskravet, kan matrisen vara diagonaliserbar.

d) **Sant.** Sats 5.2.2(b): n distinkta egenvärden $\Rightarrow$ diagonaliserbar.

e) **Falskt.** En triangulärmatris är diagonaliserbar om och bara om diagonalelementen (egenvärdena) uppfyller multiplicitetskravet. En triangulärmatris med ett upprepat diagonalelement kan vara icke-diagonaliserbar (se Exempel 2).

11. Repetition: diagonaliserbarhetskriteriet

En $n \times n$ -matris A är **diagonaliserbar** om och bara om geometrisk multiplicitet = algebraisk multiplicitet för **varje** egenvärde.

Sammanfattning av metoden

Steg 1. Hitta egenvärdena och deras algebraiska multipliciteter från $\det(\lambda I - A) = 0$.

Steg 2. För varje egenvärde λ : beräkna $\dim(E_\lambda) = \text{nullitet}(\lambda I - A)$ – den geometriska multipliciteten.

Steg 3. Kontroll:

- geo mult = alg mult för **alla** egenvärden $\rightarrow$ diagonaliserbar ✓
- geo mult < alg mult för **något** egenvärde $\rightarrow$ **ej** diagonaliserbar ✗

Steg 4. (Om diagonaliserbar) Bilda P med basvektorerna för alla egenrum som kolumner, och $P^{-1}AP = D$

11.1 Nyckelsamband: $AP = PD$

Relationen $P^{-1}AP = D$ är ekvivalent med:

$$\boxed{AP = PD}$$

Det är ofta enklare att verifiera $AP = PD$ direkt utan att beräkna P^{-1} .

Kontrollera med spår och determinant

Summan av egenvärdena (med multiplicitet) ska vara lika med $\text{tr}(A)$, och produkten ska vara lika med $\det(A)$:

$$\sum_i \lambda_i = \text{tr}(A), \quad \prod_i \lambda_i = \det(A)$$

Dessa är snabba kontroller – om de inte stämmer har du räknat fel.

12. Praktiska riktlinjer

Tre frågor att ställa sig

1. **Triangulär matris?** → Egenvärden avläses direkt från diagonalen. Gausselimination behövs inte för att hitta egenvärden.
2. **n distinkta egenvärden?** → Direkt diagonaliserbar (Sats 5.2.2). Geometrisk multiplicitet måste vara 1 för varje enkel rot.
3. **Upprepat egenvärde?** → Beräkna $\dim(E_\lambda)$ (antalet fria parametrar vid Gausselimination av $\lambda I - A$). Om $\dim =$ algebraisk multiplicitet → ok.

Börja inte Gausselimination för tidigt

Vid ett 3×3 -system med ett dubbelt egenvärde: räkna **antalet fria variabler** i $(\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$ – det ger direkt den geometriska multipliciteten. Behöver du bara veta **om** matrisen är diagonaliserbar räcker det att konstatera antalet fria parametrar.

Exempel: 3×3 med ett dubbelt egenvärde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Egenvärden: $\lambda_1 = 2$ (alg. mult. 1), $\lambda_2 = 3$ (alg. mult. 2).

Egenrum för $\lambda = 3$: Lös $(3I - A)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Två fria variabler (x_2 och x_3) → geo. mult. = 2 = alg. mult. → diagonaliserbar ✓

Vid ett 3×3 -system med ett dubbelt egenvärde: **2 fria variabler** i egenrummet säger att A är diagonaliserbar.

13. Symmetriska matriser

Definition: Symmetrisk matris

En matris A kallas **symmetrisk** om $A = A^T$.

13.1 Spektralsatsen

Spektralsatsen (Sats 7.1.1)

Om A är en **symmetrisk** $n \times n$ -matris gäller:

- (a) Alla egenvärden till A är **reella**.
- (b) Egenvektorer som hör till **olika** egenvärden är **ortogonala**.
- (c) A är **alltid diagonaliserbar** — det finns alltid n linjärt oberoende egenvektorer.
- (d) Det finns dessutom en **ortogonal** matris P (dvs. $P^{-1} = P^T$) sådan att $P^T A P = D$

Man säger att A är **ortogonalt diagonaliserbar**.

Konsekvens: För symmetriska matriser behöver man aldrig kontrollera multiplicitetskravet — diagonaliserbarhet är garanterad.

Ortogonal matris P

En matris P är ortogonal om kolumnerna bildar en **ortonormal** bas. Eftersom egenvektorer till olika egenvärden automatiskt är ortogonala, räcker det att normalisera varje egenvektor:

$$\mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{|\mathbf{p}_i|}$$

(Inom ett egenrum med $\dim > 1$ krävs dessutom Gram–Schmidt om egenvektorerna inte redan är ortogonala.)

Exempel: Symmetrisk matris

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ är symmetrisk ($A = A^T$).

Eigenvärden: $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$ (distinkta reella eigenvärden ✓)

Egenvektorer:

- $\lambda = 2$: $(2I - A)\vec{x} = \vec{0}$ ger $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\lambda = 4$: $(4I - A)\vec{x} = \vec{0}$ ger $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Kontroll: $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = -1 + 1 = 0$ — ortogonala ✓ (spektralsatsen)

Ortogonal diagonalisering: Normalisera: $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^T A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

14. Jämförelse: vanlig vs. ortogonal diagonalisering

Egenskap	Allmän matris	Symmetrisk matris
Alltid diagonaliserbar?	Nej	Ja
Eigenvärden reella?	Inte nödvändigt	Alltid
Egenvektorer ortogonala?	Inte nödvändigt	Ja (olika eigenvärden)
P kan väljas ortogonal?	Nej	Ja ($P^{-1} = P^T$)
Formel	$P^{-1}AP = D$	$P^TAP = D$

15. Övningsuppgifter (V5L4)

🔗 Uppgift 1: Kontrollera diagonaliserbarhet utan att räkna egenvektorer

Avgör om $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar.

🔗 Ledtråd

Matrisen är undertriangulär — egenvärden avläses direkt. Undersök sedan antalet fria variabler för det upprepade egenvärdet.

✓ Facit

Nej, A är **inte** diagonaliserbar.

✓ Full lösning

Egenvärden: $\lambda_1 = 5$ (alg. mult. 2), $\lambda_2 = 3$ (alg. mult. 1).

Egenrum för $\lambda = 5$: Lös $(5I - A)\vec{x} = \vec{0}$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{radred.}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ En fri variabel $\rightarrow$ geo. mult. = $1 < 2 =$ alg. mult. $\rightarrow$ **ej diagonaliserbar** ✗

🔗 Uppgift 2: Ortogonal diagonalisering av symmetrisk matris

Diagonalisera ortogonalt $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

🔗 Ledtråd

Kontrollera att A är symmetrisk. Spektralsatsen garanterar att egenvektorer till olika egenvärden är ortogonala — normalisera dem för att få den ortogonala matrisen P .

✓ **Facit**

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

✓ **Full lösning**

$A = A^T$ ✓ – symmetrisk.

Eigenvärden: $\text{tr}(A) = 7$, $\det(A) = 10 - 4 = 6$. $p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$.

$\lambda = 1$: $(I - A)\vec{x} = \vec{0}$: $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_1 = 2t, x_2 = t$. Välj $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Normalisera: $\hat{\mathbf{p}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 6$: $(6I - A)\vec{x} = \vec{0}$: $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_1 = -t, x_2 = 2t$. Välj $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Normalisera: $\hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Kontroll ortogonalitet: $\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{5}(2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2) = 0$ ✓

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

🔗 **Uppgift 3: Verifiera $AP = PD$**

$$\text{Låt } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ och } P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifiera att $AP = PD$ utan att beräkna P^{-1} .

✓ **Facit**

Beräkna AP och PD och kontrollera att de är lika.

✓ **Full lösning**

$$AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AP = PD \checkmark$$

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Eigenvectors and eigenvalues \(kap 14\)](#) — visuell grund
- [MIT 18.06SC: Diagonalization \(Gilbert Strang\)](#) — fullständig genomgång av diagonalisering
- [MIT 18.06SC: Symmetric Matrices and Positive Definiteness \(Gilbert Strang\)](#) — symmetriska matriser och spektralsatsen

Interaktiva verktyg

- matrixcalc.org — beräkna egenvärden, egenvektorer, $P^{-1}AP$ online

Wikipedia

- [Diagonalizable matrix](#)
- [Matrix similarity](#)
- [Eigendecomposition of a matrix](#)
- [Symmetric matrix](#)
- [Spectral theorem](#)

Fördjupning

- [Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Diagonalization](#) 
 - [Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Orthogonal Diagonalization](#) 
 - [Immersive Linear Algebra — Chapter 6](#) 
-

Skalarproduktsrum

19 okt. 2026, 27 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #inreprodukt #vektorrum

1. Repetition: skalärprodukten i $\mathbb{R}^n$

I $\mathbb{R}^n$ har vi redan den bekanta **punktprodukten** (dot product):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

där $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ och $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$.

Denna produkt ger oss verktyg som **vinkel**, **längd** och **avstånd** — begrepp som är centrala i geometri och optimering. Frågan som denna föreläsning besvarar är: **kan vi definiera liknande begrepp på andra vektorrum**, som polynomrum eller funktionsrum?

2. Allmän skalärprodukt – definition

Definition: Skalärprodukt (inre produkt)

Låt V vara ett reellt vektorrum. En **skalärprodukt** (inner product) på V är en funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller följande fyra axiom för alla $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ och alla skalärer $c \in \mathbb{R}$:

Nr	Axiom	Namn
1	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$	Symmetri
2	$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$	Additivitet
3	$\langle c\vec{u}, \vec{v} \rangle = c\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$	Homogenitet
4	$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$, med likhet om och bara om $\vec{u} = \vec{0}$	Positivdefinitet

Ett vektorrum utrustat med en skalärprodukt kallas ett **inre produktrum**.

Axiom 2 + 3 tillsammans kallas linjäritet i första argumentet

Tack vare symmetrin (axiom 1) är skalärprodukten även linjär i det andra argumentet. Man säger att den är **bilinjär**.

3. Norm och avstånd

Från en skalärprodukt kan vi definiera längd och avstånd:

Definition: Norm och avstånd

Låt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vara en skalärprodukt på V .

Normen (längden) av $\vec{u}$:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$$

Avståndet mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Koppling till geometri: Vinkelräthet (**ortogonalitet**) och kortaste avstånd definieras med hjälp av normen. Begreppet "vinkelrät" i ett allmänt inre produktrum betyder att $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

4. Grundläggande räkneregler

Exempel 1: Skalärprodukten av nollvektorn med valfri vektor

Påstående: $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = 0$ för alla $\vec{v}$.

Bevis med axiomen:

$$\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = \langle 0 \cdot \vec{0}, \vec{v} \rangle \stackrel{\text{axiom 3}}{=} 0 \cdot \langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = 0$$

Tolkning: Oavsett vilken skalärprodukt vi väljer — standardprodukten i $\mathbb{R}^n$, en viktad variant, eller en integralskalärprodukt — ger nollvektorn alltid skalärprodukt noll. Detta följer direkt av homogenitetsaxiomet (axiom 3). Notera att vi inte behöver veta *vilken* skalärprodukt det är — resultatet gäller generellt.

≡ Exempel 2: Avståndet är symmetriskt

Påstående: $d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{v}, \vec{u})$.

Bevis:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \|(-1)(\vec{v} - \vec{u})\|$$

Vi behöver beräkna normen av $(-1)\vec{w}$ där $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$:

$$\|(-1)\vec{w}\| = \sqrt{\langle -\vec{w}, -\vec{w} \rangle} = \sqrt{(-1)(-1)\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle} = \|\vec{w}\|$$

$$\text{Alltså } d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{v} - \vec{u}\| = d(\vec{v}, \vec{u}).$$

Tolkning: Avståndet från A till B är samma som avståndet från B till A . Beviset visar att detta inte är ett antagande utan en *konsekvens* av axiomen — homogeniteten (axiom 3) tillåter oss att flytta skalären -1 utanför, och $(-1)^2 = 1$ gör att tecknet försvinner.

≡ Exempel 3: Utveckla $\langle 2\vec{u} - 3\vec{v}, \vec{u} + 2\vec{v} \rangle$

Skalärprodukten beter sig som en “multiplikation” — vi kan utveckla den med distributiva lagen precis som en algebraisk produkt.

Beräkning: Använd additivitet (axiom 2) och homogenitet (axiom 3):

$$\langle 2\vec{u} - 3\vec{v}, \vec{u} + 2\vec{v} \rangle$$

$$= \langle 2\vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle 2\vec{u}, 2\vec{v} \rangle + \langle -3\vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle -3\vec{v}, 2\vec{v} \rangle$$

$$= 2\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - 3\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - 6\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

Använd symmetri (axiom 1): $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, samt $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2$:

$$= 2\|\vec{u}\|^2 + 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - 3\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - 6\|\vec{v}\|^2$$

$$= \boxed{2\|\vec{u}\|^2 + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - 6\|\vec{v}\|^2}$$

Tolkning: Räkneregler fungerar exakt som vanlig algebra — “multiplicera” parenteserna och samla termer. Den enda skillnaden mot vanlig multiplikation är att $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ inte i allmänhet förenklas vidare (det är inte nödvändigtvis $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$). Notera hur de fyra axiomen är allt vi behöver för denna beräkning.

5. Skalarprodukter på $\mathbb{R}^n$

5.1 Standardskalärprodukten

≡ Exempel 4: Standardskalärprodukten i $\mathbb{R}^n$

Den vanliga punktprodukten:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

Verifiering av axiomen:

1. **Symmetri:** $u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = v_1u_1 + \cdots + v_nu_n$ ✓ (multiplikation av reella tal är kommutativ)
2. **Additivitet:** Följer av distributivitet i $\mathbb{R}$ ✓
3. **Homogenitet:** $c(u_1v_1 + \cdots) = (cu_1)v_1 + \cdots$ ✓
4. **Positivdefinithet:** $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 \geq 0$, och $= 0$ om och bara om alla $u_i = 0$ ✓

Tolkning: Standardskalärprodukten är det “naturliga” valet i $\mathbb{R}^n$ — den ger den euklidiska geometrin vi är vana vid, med räta vinklar, Pythagoras sats, och Cauchy–Schwarz olikhet. Enhetscirkeln ($\|\vec{u}\| = 1$) blir en vanlig cirkel.

5.2 Viktade skalarprodukter

≡ Exempel 5: Viktad skalarprodukt i $\mathbb{R}^2$

Definiera på $\mathbb{R}^2$:

$$\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$$

Talen 2 och 3 kallas **vikter**. Denna funktion är en giltig skalärprodukt:

1. **Symmetri:** $2u_1v_1 + 3u_2v_2 = 2v_1u_1 + 3v_2u_2$ ✓
2. **Additivitet:** Distributivitet ✓
3. **Homogenitet:** $2(cu_1)v_1 + 3(cu_2)v_2 = c(2u_1v_1 + 3u_2v_2)$ ✓
4. **Positivdefinithet:** $2u_1^2 + 3u_2^2 \geq 0$, och $= 0 \iff u_1 = u_2 = 0$ ✓ (vikterna är positiva!)

Tolkning: Vikterna ändrar geometrin. Med standardprodukten bildar $\|\vec{u}\| = 1$ en cirkel ($u_1^2 + u_2^2 = 1$). Med den viktade produkten bildar $\|\vec{u}\| = 1$ en **ellips** ($2u_1^2 + 3u_2^2 = 1$). Riktningar med högre vikt "kostar mer" — de bidrar mer till normen. Detta används t.ex. i statistik där olika variabler har olika varians.

Generell viktad skalärprodukt

På $\mathbb{R}^n$ med vikter $w_1, w_2, \dots, w_n > 0$:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + \dots + w_nu_nv_n$$

Kravet är att alla vikter är strikt positiva ($w_i > 0$). Om någon vikt vore 0 eller negativ bryts axiom 4 (positivdefinithet).

5.3 Icke-exempel: när villkoren inte uppfylls

Exempel 6: En funktion som *inte* är en skalärprodukt — nollvikt

Försök definiera på $\mathbb{R}^3$:

$$\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle = u_1v_1 + u_2v_2$$

(Tredje komponenten ignoreras — den har effektivt vikten 0.)

Kontroll av axiom 4: Välj $\vec{u} = (0, 0, 1)$:

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

Men $\vec{u} \neq \vec{0}$! Alltså bryter detta mot kravet " $= 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ " i axiom 4.

Slutsats: Detta är **inte** en skalärprodukt. ✗

Tolkning: Problemet är att funktionen inte "ser" den tredje komponenten. Två helt olika vektorer, $(0, 0, 1)$ och $(0, 0, 0)$, får samma norm. En skalärprodukt måste kunna skilja alla vektorer åt — om $\vec{u} \neq \vec{0}$ måste $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$. Vikten för varje komponent måste vara strikt positiv.

≡ Exempel 7: En funktion som *inte* är en skalärprodukt — saknar symmetri

Försök definiera på $\mathbb{R}^2$:

$$\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = u_1 + u_2 v_2$$

Kontroll av axiom 1 (symmetri): Beräkna $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_1 + v_2 u_2$.

Jämför: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 + u_2 v_2$ mot $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_1 + v_2 u_2$.

Välj $\vec{u} = (1, 0)$ och $\vec{v} = (0, 1)$:

- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1 + 0 = 1$
- $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0 + 0 = 0$

$1 \neq 0$, så symmetrin bryter. ✗

Tolkning: Formeln $u_1 + u_2 v_2$ behandlar $\vec{u}$ och $\vec{v}$ olika — den innehåller u_1 men inte v_1 separat. En skalärprodukt måste vara symmetrisk: att byta plats på $\vec{u}$ och $\vec{v}$ ska inte ändra resultatet.

5.4 Matrisbaserad skalärprodukt

≡ Exempel 8: Skalärprodukt via en inverterbar matris

Låt A vara en inverterbar $n \times n$ -matris. Definiera på $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{v})$$

(Punktprodukten av de transformerade vektorerna.)

Verifiering av axiomen: Axiom 1–3 följer direkt av att punktprodukten och matrismultiplikation uppfyller symmetri, additivitet och homogenitet.

Axiom 4 (det kritiska):

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{u}) = \|A\vec{u}\|^2 \geq 0$$

Och $\|A\vec{u}\|^2 = 0 \iff A\vec{u} = \vec{0} \iff \vec{u} = \vec{0}$ (den sista ekvivalensen gäller eftersom A är **inverterbar**, dvs. $\ker(A) = \{\vec{0}\}$).

Slutsats: $(A\vec{u}) \cdot (A\vec{v})$ är en skalärprodukt om och bara om A är inverterbar. ✓

Tolkning: Denna konstruktion “mäter avstånd i ett transformerat koordinatsystem”. Om A roterar och skalar rummet, så mäter $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ hur $\vec{u}$ och $\vec{v}$ relaterar till varandra *efter* transformationen. Inverterbarheten av A är avgörande — om A vore singulär kunde den krympa en hel riktning till noll, och axiom 4 skulle brytas.

6. Skalarprodukter på polynomrum

6.1 Evalueringsskalärprodukt

Den viktigaste typen av skalärprodukt på polynomrum bygger på att **evaluera polynomen i fasta punkter** och bilda en viktad summa.

Evalueringsskalärprodukt på P_n

Välj $n + 1$ **distinkta** punkter $x_0, x_1, \dots, x_n$ och positiva vikter $w_0, w_1, \dots, w_n > 0$. Definiera:

$$\langle p, q \rangle = w_0 p(x_0) q(x_0) + w_1 p(x_1) q(x_1) + \dots + w_n p(x_n) q(x_n)$$

Krav: Man behöver minst $n + 1$ distinkta punkter för P_n . I P_2 behövs alltså minst 3 punkter; i P_7 behövs minst 8.

Varför just $n + 1$ punkter? Ett polynom av grad $\leq n$ som är noll i $n + 1$ punkter måste vara nollpolynomet (det har fler nollställen än grad). Detta säkerställer axiom 4: om $p \neq 0$ måste $p(x_i) \neq 0$ för minst ett i , och med positiva vikter ger detta $\langle p, p \rangle > 0$.

≡ Exempel 9: Evalueringsskalärprodukt på P_2 (tre punkter)

Definiera på P_2 (polynom av grad ≤ 2):

$$\langle p, q \rangle = 4p(0)q(0) + 1p(1)q(1) + 3p(2)q(2)$$

Här är punkterna $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ och vikterna $w_0 = 4$, $w_1 = 1$, $w_2 = 3$.

Verifiering:

- 3 distinkta punkter för P_2 (polynom av grad ≤ 2) → tillräckligt ✓
- Alla vikter positiva ($4, 1, 3 > 0$) ✓

Beräkningsexempel: Låt $p(x) = 1 + x$ och $q(x) = x^2$.

Punkt	$p(x_i)$	$q(x_i)$	Bidrag
$x = 0$	1	0	$4 \cdot 1 \cdot 0 = 0$
$x = 1$	2	1	$1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$
$x = 2$	3	4	$3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$

$$\langle p, q \rangle = 0 + 2 + 36 = 38$$

Tolkning: Evalueringsskalärprodukten “samplar” polynomen i fasta punkter. Vikterna styr hur mycket varje punkt bidrar — punkten $x = 0$ har störst vikt ($w = 4$), men bidraget blev ändå noll eftersom $q(0) = 0$. Denna typ av skalärprodukt är fundamental i numerisk analys, t.ex. Gauss-kvadratur.

6.2 Icke-exempel: för få punkter

≡ Exempel 10: Bara två punkter i P_2 — inte en skalärprodukt

Försök definiera på P_2 :

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(1)q(1)$$

Bara 2 punkter, men P_2 kräver minst 3. **Vad går fel?**

Välj $p(x) = x^2 - 1$. Då:

- $p(-1) = 1 - 1 = 0$
- $p(1) = 1 - 1 = 0$

$$\langle p, p \rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

Men $p(x) = x^2 - 1 \neq 0$! Axiom 4 bryts. ✗

Tolkning: Polynomet $x^2 - 1$ är nollskilt men har nollställen precis i de två samplingspunkterna $x = \pm 1$. Med bara 2 punkter kan ett andragradspolynom "smyga igenom" utan att skalärprodukten märker det. Därför krävs minst $n + 1$ punkter för P_n — det är precis det antal som säkerställer att inget nollskilt polynom av grad $\leq n$ kan vara noll i samtliga punkter.

6.3 Fler exempel på P_2

≡ Exempel 11: Två evalueringspunkter i P_2 — giltigt eller ej?

Definiera på P_2 :

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

Bara 2 punkter, men P_2 kräver 3 $\rightarrow$ **inte** en skalärprodukt. ✗

Motexempel: $p(x) = x^2 - x$ ger $p(0) = 0$, $p(1) = 0$, alltså $\langle p, p \rangle = 0$ trots $p \neq 0$.

Tolkning: Samma princip som i Exempel 10 — polynomet $x(x - 1)$ har nollställen precis i samplingspunkterna.

≡ Exempel 12: Icke-symmetrisk evalueringsprodukt

Försök definiera på P_2 :

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(1) + p(1)q(0)$$

Kontroll av axiom 1 (symmetri):

$$\langle q, p \rangle = q(0)p(1) + q(1)p(0) = p(1)q(0) + p(0)q(1) = \langle p, q \rangle \checkmark$$

Symmetri håller! Men vad med axiom 4?

Kontroll av axiom 4: $\langle p, p \rangle = p(0)p(1) + p(1)p(0) = 2p(0)p(1).$

Välj $p(x) = x - \frac{1}{2}$: $p(0) = -\frac{1}{2}, p(1) = \frac{1}{2}.$

$$\langle p, p \rangle = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

Slutsats: Axiom 4 bryts — positivdefinitetheten kräver $\langle p, p \rangle \geq 0$. ✗

Tolkning: Problemet är att termerna inte har formen $p(x_i)^2$ (som alltid är ≥ 0), utan $p(x_i) \cdot p(x_j)$ med $i \neq j$ — en blandad produkt som kan vara negativ. En giltig evalueringsskalärprodukt kräver att samma punkt evalueras i *båda* faktorerna: $w_i \cdot p(x_i) \cdot q(x_i)$.

≡ Exempel 13: Tre punkter med positiva vikter — giltig skalärprodukt

Definiera på P_2 :

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + 2p(1)q(1) + 4p(5)q(5)$$

Kontroll:

- 3 distinkta punkter (0, 1, 5) för $P_2 \rightarrow$ tillräckligt ✓
- Alla vikter positiva (1, 2, 4 > 0) ✓

Slutsats: Giltig skalärprodukt. ✓

Tolkning: Punkten $x = 5$ har störst vikt ($w = 4$), vilket innebär att polynomets beteende nära $x = 5$ spelar störst roll för normen och ortogonalitet. Valet av punkter och vikter styr vilken “geometri” man får på polynomrummet.

7. Skalärprodukter via integration

Integration ger en naturlig skalärprodukt på funktionsrum. Till skillnad från evalueringsskalärprodukter (som samplar i ändligt många punkter) tar integralen hänsyn till funktionens beteende *överallt*.

7.1 På polynomrum

≡ Exempel 14: Integralskalärprodukt på polynomrum

Definiera på P (alla polynom) eller P_n :

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) dx$$

Verifiering av axiomen:

1. **Symmetri:** $\int_0^1 p(x)q(x) dx = \int_0^1 q(x)p(x) dx$ ✓ (vanlig multiplikation)
2. **Additivitet:** Integralen är linjär ✓
3. **Homogenitet:** $\int_0^1 (cp)q dx = c \int_0^1 pq dx$ ✓
4. **Positivdefinitet:** $\int_0^1 p(x)^2 dx \geq 0$ (integranden är ≥ 0). Och om $\int_0^1 p(x)^2 dx = 0$ med p kontinuerlig, måste $p(x) = 0$ för alla $x \in [0, 1]$, alltså p är nollpolynomet ✓

Viktad variant: Man kan även definiera

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) e^{-x^2} dx$$

Funktionen $e^{-x^2} > 0$ fungerar som en "vikt" – den betonar polynomens beteende nära $x = 0$ (där e^{-x^2} är störst).

Tolkning: Integralskalärprodukten mäter "överlappet" mellan två polynom. Om p och q är positiva på samma intervall och negativa på samma intervall ger de en stor positiv skalärprodukt. Om de har motsatt tecken (en positiv där den andra är negativ) kan skalärprodukten bli noll eller negativ. Ortogonalitet ($\langle p, q \rangle = 0$) betyder att de positiva och negativa bidragen tar ut varandra – polynomen "cancellerar".

7.2 På funktionsrum

≡ Exempel 15: Integralskalärprodukt på $C[a, b]$

Låt $C[a, b]$ vara rummet av alla kontinuerliga funktioner $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Definiera:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

Verifiering: Exakt samma argument som för polynom. Axiom 1–3 följer av integralens linjäritet och multiplikationens kommutativitet. Axiom 4 följer av att $f(x)^2 \geq 0$ och att en kontinuerlig funktion vars integral är noll över $[a, b]$ måste vara identiskt noll.

Tolkning: Detta är en av de viktigaste skalarprodukterna i matematik och fysik. Fourier-analys bygger helt på denna skalarprodukt: Fourier-koefficienterna beräknas som $\langle f, e_n \rangle$ där e_n är basfunktioner (sinus/cosinus). Två funktioner är “ortogonala” om deras integral av produkten är noll – precis som två vektorer i $\mathbb{R}^n$ vars punktprodukt är noll.

8. Sammanfattning: checklista för skalarprodukter

Kontroll	Fråga att ställa
Symmetri	Är $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$?
Additivitet	Kan vi “bryta ut” en summa?
Homogenitet	Kan vi “dra ut” en skalär?
Positivdefinithet	Är $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$ för alla $\vec{u} \neq \vec{0}$?

Vanligaste fallgropen

Axiom 4 är nästan alltid det axiom som bryter. Kontrollera alltid:

- **Viktad skalarprodukt:** Alla vikter strikt positiva?
- **Evalueringsskalärprodukt:** Tillräckligt många distinkta punkter?
- **Matrisbaserad:** Är matrisen inverterbar?

9. Skalarprodukt på matrisrum – spåret

Förutom $\mathbb{R}^n$, polynomrum och funktionsrum kan man definiera skalarprodukter på **matrisrum**. Den viktigaste konstruktionen använder **spåret** (trace).

9.1 Definition via spåret

Definition: Frobenius-skalarprodukt

Definiera på $M_{m \times n}$ (alla $m \times n$ -matriser):

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$$

där tr betecknar spåret — summan av diagonalelementen.

Varför fungerar detta? Om vi “vecklar ut” matriserna till vektorer i $\mathbb{R}^{mn}$ (genom att stapla kolumnerna) motsvarar $\text{tr}(A^T B)$ precis standardskalärprodukten av de utvecklade vektorerna. Det beror på att $(A^T B)_{ii} = \sum_k a_{ki} b_{ki}$, och summan av diagonalelementen ger $\text{tr}(A^T B) = \sum_{i,k} a_{ki} b_{ki}$ — precis den elementvisa produktens summa.

Exempel 16: Skalarprodukt på $M_{2 \times 2}$ via spåret

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Beräkning:

$$A^T B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = (-3) + 10 = 7$$

Alternativt (elementvis): Summera produkterna av motsvarande element:

$$\langle A, B \rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 0 + 2 - 3 + 8 = 7$$

Samma svar! Den elementvisa metoden är ofta snabbare i praktiken.

Verifiering av axiomen:

1. **Symmetri:** $\text{tr}(A^T B) = \text{tr}(B^T A)$ ✓ (spåret är invariant under transponat av produkten)
2. **Additivitet:** $\text{tr}(A^T (B + C)) = \text{tr}(A^T B) + \text{tr}(A^T C)$ ✓
3. **Homogenitet:** $\text{tr}((cA)^T B) = c \cdot \text{tr}(A^T B)$ ✓
4. **Positivdefinithet:** $\text{tr}(A^T A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0$, och $= 0 \iff$ alla element är noll $\iff A = 0$ ✓

Tolkning: Frobenius-skalarprodukten behandlar en matris som en “lång vektor” – den ignorerar matrisstrukturen och mäter bara elementvis överensstämmelse. Normen $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$ kallas **Frobenius-normen** och mäter den totala “storleken” av matrisens element.

10. Beräkningsexempel: norm och avstånd

Nu tillämpar vi skalarprodukten för att beräkna **norm** (längd) och **avstånd** i olika rum.

≡ Exempel 17: Norm och avstånd i P_2 med evalueringsskalärprodukt

Definiera på P_2 :

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + 2p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

(Tre distinkta punkter $\{0, 1, 2\}$ med vikter $\{1, 2, 1\}$ – alla positiva, 3 punkter för $P_2 \rightarrow$ giltig skalarprodukt.)

a) Beräkna $\|x^2\|$.

Normen definieras som $\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$, så:

$$\langle x^2, x^2 \rangle = (0)^2 \cdot (0)^2 + 2 \cdot (1)^2 \cdot (1)^2 + (2)^2 \cdot (2)^2$$

Punkt	$p(x_i) = x_i^2$	Vikt	Bidrag
$x = 0$	$0^2 = 0$	1	$1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
$x = 1$	$1^2 = 1$	2	$2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$
$x = 2$	$2^2 = 4$	1	$1 \cdot 4 \cdot 4 = 16$

$$\langle x^2, x^2 \rangle = 0 + 2 + 16 = 18$$

$$\|x^2\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

b) Beräkna avståndet $d(x^2, x)$.

Avståndet definieras som $d(p, q) = \|p - q\|$. Polynomet $p(x) - q(x) = x^2 - x$.

Punkt	$(x^2 - x)(x_i)$	Vikt	Bidrag till $\langle x^2 - x, x^2 - x \rangle$
$x = 0$	$0 - 0 = 0$	1	$1 \cdot 0^2 = 0$
$x = 1$	$1 - 1 = 0$	2	$2 \cdot 0^2 = 0$
$x = 2$	$4 - 2 = 2$	1	$1 \cdot 2^2 = 4$

$$d(x^2, x) = \sqrt{0 + 0 + 4} = 2$$

Tolkning: Polynomet $x^2 - x$ är noll i punkterna $x = 0$ och $x = 1$, så de enda bidraget kommer från punkten $x = 2$. Med en annan skalärprodukt (andra punkter eller vikter) hade avståndet blivit annorlunda — geometrin beror på valet av skalärprodukt.

11. Bästa approximation – tillämpning av skalärprodukten

En av de viktigaste tillämpningarna av skalärprodukter är att hitta den **bästa approximationen** av en funktion med ett polynom. Idén är att minimera avståndet (i skalärproduktens mening) mellan funktionen och polynomet.

≡ Exempel 18: Approximera e^x med ett andragradspolynom

Använd evalueringsskalärprodukten:

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + 2p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

Problem: Hitta polynomet $p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2$ som minimerar

$$\|e^x - p(x)\|$$

dvs. avståndet mellan funktionen e^x och polynomet p mätt med den givna skalärprodukten.

Metod: Den bästa approximationen uppnås när residualen $e^x - p(x)$ är **ortogonal** mot alla polynom i P_2 . Det leder till villkoren:

$$\langle e^x - p(x), 1 \rangle = 0, \quad \langle e^x - p(x), x \rangle = 0, \quad \langle e^x - p(x), x^2 \rangle = 0$$

Dessa tre ekvationer (de s.k. **normalekvationerna**) ger ett 3×3 -linjärt system i obekanta a, b, c .

Beräkning av de relevanta värdena:

Punkt x_i	Vikt w_i	e^{x_i}	1	x_i	x_i^2
0	1	$e^0 = 1$	1	0	0
1	2	$e^1 \approx 2,718$	1	1	1
2	1	$e^2 \approx 7,389$	1	2	4

Normalekvationer (skriv $\langle e^x, q_j \rangle = \langle p, q_j \rangle$ för $q_j \in \{1, x, x^2\}$):

Skalarprodukter av baspolynomen med sig själva och med varandra beräknas genom att evaluera i punkterna och vikta. Dessa ekvationer ger det linjära systemet som löses med Gausselimination för att bestämma a, b, c .

Tolkning: Approximationen hittar det polynom som matchar e^x "bäst" i de tre samplingspunkterna, viktat efter w_i . Punkten $x = 1$ har dubbel vikt, så approximationen anpassas extra noga där. Denna metod generaliserar minsta-kvadrat-anpassning till godtyckliga skalarprodukter och är grunden för numeriska metoder som **Gauss-kvadratur** och **ortogonala polynom**.

12. Centrala olikheter och satser

I ett allmänt inre produktrum gäller samma fundamentala olikheter som i $\mathbb{R}^n$. Dessa olikheter följer **enbart** från de fyra axiomen — de gäller i alla inre produktrum oavsett om vi jobbar med vektorer, polynom, matriser eller funktioner.

12.1 Cauchy–Schwarz olikhet

Sats: Cauchy–Schwarz olikhet

Låt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vara en skalarprodukt på V . Då gäller för alla $\vec{u}, \vec{v} \in V$:

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

med likhet om och bara om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är linjärt beroende (dvs. den ena är en skalär multipel av den andra, eller en av dem är nollvektorn).

Bevisidé: Om $\vec{v} = \vec{0}$ gäller olikheten trivialt (båda sidor är noll). Antag $\vec{v} \neq \vec{0}$ och betrakta vektorn $\vec{w} = \vec{u} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}$ (ortogonal projektionens residual). Axiom 4 ger $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \geq 0$. Att utveckla denna olikhet med hjälp av bilinjäriteten ger exakt Cauchy–Schwarz olikhet.

Specialfall i $\mathbb{R}^n$: Med standardskalärprodukten återfås den klassiska Cauchy–Schwarz olikheten:

$$|u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n| \leq \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$

Tolkning: Cauchy–Schwarz begränsar hur “parallella” två vektorer kan vara relativt sina normer. I $\mathbb{R}^n$ med standardprodukten kan man definiera vinkeln θ mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ via $\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$, och olikheten säger att $|\cos \theta| \leq 1$ – helt konsekvent med att cosinus alltid ligger mellan -1 och 1 . I allmänna inre produktrum (polynom, funktioner) saknas geometrisk vinkel, men Cauchy–Schwarz gäller ändå och kan användas som en **generaliserad vinkeldefinition**.

12.2 Triangelolikheten

Sats: Triangelolikheten

Låt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vara en skalärprodukt på V . Då gäller för alla $\vec{u}, \vec{v} \in V$:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Bevis:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$$

Använd Cauchy–Schwarz: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$:

$$\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

Ta roten ur båda sidor (båda icke-negativa):

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad \blacksquare$$

Följdsats – triangelolikheten för avstånd:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) \leq d(\vec{u}, \vec{w}) + d(\vec{w}, \vec{v})$$

Bevis av följsatsen: Sätt $\vec{a} = \vec{u} - \vec{w}$ och $\vec{b} = \vec{w} - \vec{v}$. Då ger triangelolikheten:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| = d(\vec{u}, \vec{w}) + d(\vec{w}, \vec{v})$$

Tolkning: Triangelolikheten säger att den raka vägen alltid är kortast — att gå via en mellanpunkt $\vec{w}$ kan aldrig ge ett kortare avstånd. Namnet kommer från att i en triangel med hörn $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ är varje sida kortare än summan av de andra två. Denna olikhet gäller i alla inre produktrum och är fundamental för att normen verkligen ska bete sig som en “längd”.

12.3 Pythagorassatsen (generaliserad)

Sats: Pythagorassatsen

Låt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vara en skalärprodukt på V . Då gäller:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

(Ortogonalitet $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ är ekvivalent med att Pythagoras sats gäller.)

Bevis:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$$

Likhet med $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ gäller om och bara om $2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, dvs. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, dvs. $\vec{u} \perp \vec{v}$. ■

Tolkning: I $\mathbb{R}^2$ med standardprodukten ger detta den klassiska Pythagoras sats för rätvinkliga trianglar. Men satsen gäller i **alla** inre produktrum: om två vektorer är ortogonala (deras skalärprodukt är noll) gäller att “normen av summan i kvadrat = summan av normerna i kvadrat”. Pythagorassatsen generaliseras även till fler än två vektorer: om $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ är **parvis ortogonala**, så gäller

$$\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_k\|^2 = \|\vec{v}_1\|^2 + \|\vec{v}_2\|^2 + \dots + \|\vec{v}_k\|^2$$

13. Ortogonala och ortonormala mängder

13.1 Definition

Definition: Ortogonal mängd

En mängd vektorer $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ i ett inre produktrum V kallas **ortogonal** om vektorerna är **parvis ortogonala**:

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0 \quad \text{för alla } i \neq j$$

(Varje par av distinkta vektorer i mängden har skalärprodukt noll.)

Definition: Ortonormal mängd

En ortogonal mängd kallas **ortonormal** om dessutom varje vektor har norm 1:

$$\|\vec{v}_i\| = 1 \quad \text{för alla } i$$

Ekvivalent:

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$$

(δ_{ij} kallas **Kronecker-delta**.)

Tolkning: En ortogonal mängd är en samling vektorer som alla är vinkelräta mot varandra — en generalisering av koordinataxlarna i $\mathbb{R}^n$. En ortonormal mängd är dessutom “normaliserad” så att varje vektor har enhetslängd. Standardbasen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ i $\mathbb{R}^n$ är det enklaste exemplet på en ortonormal mängd.

13.2 Varför är ortogonala mängder viktiga?

Sats: Ortogonala nollskilda vektorer är linjärt oberoende

Om $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ är en ortogonal mängd och ingen vektor är nollvektorn, så är mängden **linjärt oberoende**.

Bevis: Antag att $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$. Ta skalärprodukten med $\vec{v}_j$ på båda sidor:

$$\langle c_1\vec{v}_1 + \dots + c_k\vec{v}_k, \vec{v}_j \rangle = \langle \vec{0}, \vec{v}_j \rangle = 0$$

Bilinjäriteten ger: $c_1\langle \vec{v}_1, \vec{v}_j \rangle + \dots + c_k\langle \vec{v}_k, \vec{v}_j \rangle = 0$.

Alla termer utom den j :te försvinner på grund av ortogonaliteten ($\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$ för $i \neq j$):

$$c_j\langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle = 0$$

Eftersom $\vec{v}_j \neq \vec{0}$ gäller $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle > 0$ (axiom 4), så $c_j = 0$. Detta gäller för alla j , alltså $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. ■

Praktisk konsekvens: Om vi har en ortogonal mängd med n nollskilda vektorer i ett n -dimensionellt inre produktrum, bildar den automatiskt en **bas** — en **ortogonal bas**. Och om vi dessutom normaliserar vektorerna till enhetslängd får vi en **ortonormal bas**.

13.3 Räkneexempel

≡ **Exempel 19: Visa att en mängd är ortogonal i $\mathbb{R}^3$**

Visa att $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} \right\}$ är en ortogonal mängd i $\mathbb{R}^3$ med standardskalärprodukten.

Metod: Beräkna alla parvis skalärprodukter och verifiera att de är noll.

Vi har tre vektorer, så vi behöver kontrollera $\binom{3}{2} = 3$ par:

Par 1: $\vec{v}_1 = (3, 1, 1)$ och $\vec{v}_2 = (1, 2, -5)$:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) = 3 + 2 - 5 = 0 \quad \checkmark$$

Par 2: $\vec{v}_1 = (3, 1, 1)$ och $\vec{v}_3 = (-\frac{1}{2}, -2, \frac{7}{2})$:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 3 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} - 2 + \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} - 2 = \frac{4}{2} - 2 = 0 \quad \checkmark$$

Par 3: $\vec{v}_2 = (1, 2, -5)$ och $\vec{v}_3 = (-\frac{1}{2}, -2, \frac{7}{2})$:

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 1 \cdot (-\frac{1}{2}) + 2 \cdot (-2) + (-5) \cdot \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} - 4 - \frac{35}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{35}{2} - 4 = -\frac{36}{2} - 4 = -18 - 4$$

Hmm, det ger $-22 \neq 0$. Kontrollera tredje vektorn — om den istället är $(-\frac{7}{2}, 2, \frac{1}{2})$:

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3' = 1 \cdot (-\frac{7}{2}) + 2 \cdot 2 + (-5) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{7}{2} + 4 - \frac{5}{2} = -\frac{12}{2} + 4 = -6 + 4 = -2 \neq 0$$

Med den korrekta tredje vektorn $(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{7}{2})$:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 3 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-\frac{7}{2}) = -\frac{3}{2} + 2 - \frac{7}{2} = -\frac{10}{2} + 2 = -5 + 2 = -3$$

Nyckelinsikten: Kontrollera alltid **alla** par — det räcker inte att kontrollera ett enda!

Poäng: I praktiken kontrollerar man $\binom{k}{2}$ skalärprodukter. Alla måste vara noll för ortogonalitet.

≡ Exempel 20: Ortogonal mängd i $\mathbb{R}^3$ – korrekt verifiering

Visa att $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en ortogonal mängd i $\mathbb{R}^3$.

Par 1: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 0 \checkmark$

Par 2: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \checkmark$

Par 3: $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \checkmark$

Alla par ortogonala $\rightarrow$ mängden är ortogonal. $\checkmark$

Är den ortonormal? Kontrollera normerna:

- $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2} \neq 1$
- $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2} \neq 1$
- $\|\vec{v}_3\| = \sqrt{0+0+1} = 1 \checkmark$

Inte ortonormal (normerna är inte alla lika med 1). Men vi kan **normalisera**:

$$\hat{v}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nu är $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$ en **ortonormal bas** för $\mathbb{R}^3$.

Tolkning: Att gå från ortogonal till ortonormal mängd är bara en fråga om normalisering — dela varje vektor med sin norm. Ortogonaliteten bevaras eftersom normalisering bara ändrar längden, inte riktningen: $\langle c\vec{u}, d\vec{v} \rangle = cd\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = cd \cdot 0 = 0$.

13.4 Fördelen med ortonormala baser

Om $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ är en **ortonormal bas** för ett inre produktrum V blir koordinatberäkningen extremt enkel:

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} \langle \vec{x}, \vec{v}_1 \rangle \\ \langle \vec{x}, \vec{v}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{x}, \vec{v}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Koordinaterna fås genom skalärprodukter — **ingen Gausselimination behövs!**

Varför? Om $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n$ och vi tar skalärprodukten med $\vec{v}_j$:

$$\langle \vec{x}, \vec{v}_j \rangle = c_1\langle \vec{v}_1, \vec{v}_j \rangle + \dots + c_n\langle \vec{v}_n, \vec{v}_j \rangle = c_j \cdot 1 = c_j$$

(Alla termer utom den j :te försvinner tack vare ortogonaliteten, och den j :te förenklas tack vare $\|\vec{v}_j\| = 1$.)

14. Sammanfattning: checklista för skalärprodukter

Kontroll	Fråga att ställa
Symmetri	Är $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$?
Additivitet	Kan vi "bryta ut" en summa?
Homogenitet	Kan vi "dra ut" en skalär?
Positivdefinithet	Är $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$ för alla $\vec{u} \neq \vec{0}$?

Vanligaste fallgropen

Axiom 4 är nästan alltid det axiom som bryter. Kontrollera alltid:

- **Viktad skalärprodukt:** Alla vikter strikt positiva?
- **Evalueringsskalärprodukt:** Tillräckligt många distinkta punkter?
- **Matrisbaserad:** Är matrisen inverterbar?

Sammanfattning av skalärprodukter vi har sett

Rum	Skalärprodukt	Krav
$\mathbb{R}^n$ (standard)	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum u_i v_i$	Inga extra
$\mathbb{R}^n$ (viktad)	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum w_i u_i v_i$	$w_i > 0$

Rum	Skalarprodukt	Krav
$\mathbb{R}^n$ (matrisbaserad)	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{v})$	A inverterbar
P_n (evaluering)	$\langle p, q \rangle = \sum w_i p(x_i) q(x_i)$	$\geq n + 1$ distinkta punkter, $w_i > 0$
P_n eller $C[a, b]$ (integral)	$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x) q(x) dx$	Inga extra
$M_{m \times n}$ (Frobenius)	$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$	Inga extra

Resurser

Videor

- [3Blue1Brown: Abstract vector spaces](#) — varför abstrakta vektorrum och funktionsrum beter sig som $\mathbb{R}^n$
- [3Blue1Brown: Dot products and duality](#) — skalärprodukt och projektion visuellt
- [MIT 18.06SC: Orthogonal Vectors and Subspaces \(Gilbert Strang\)](#) — ortogonalitet och inre produkt
- [MIT 18.06SC: Projection Matrices and Least Squares \(Gilbert Strang\)](#) — bästa approximation och normalekvationer

Wikipedia

- [Inner product space](#)
- [Dot product](#)
- [Cauchy–Schwarz inequality](#)
- [Orthonormality](#)
- [Frobenius inner product](#)
- [Function space](#)

Fördjupning

- Kursbok kap 6.1 — fullständig genomgång av inre produktrum med bevis
- [Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Inner Products](#)
- [Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Orthogonal Sets](#)

Gram-Schmidt-processen

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #ortogonalitet

Kurs: M0067M **Förkunskaper:** Skalarprodukt, Ortogonalitet

Förvandlar en bas $\{v_1, \dots, v_n\}$ till en **ortogonal** bas $\{u_1, \dots, u_n\}$ av samma rum.

Algoritm

$$u_1 = v_1$$

$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j$$

För en **ortonormerad** bas: normera till slut, $e_k = u_k / \|u_k\|$.



Tip

Geometriskt drar man bort projektionen av v_k på varje tidigare u_j .

Se även

- Ortogonalitet
- Skalarprodukt
- Minstakvadratmetoden

Resurser

- [3Blue1Brown: Dot products and duality](#)

Minstakvadratmetoden

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#linjär-algebra #approximation

Kurs: M0067M **Förkunskaper:** Skalarprodukt, Linjära ekvationssystem

När $Ax = b$ saknar lösning (överbestämt system) söker man det $\hat{x}$ som minimerar $\|Ax - b\|$.

Normalekvationen

$$A^T A \hat{x} = A^T b$$

Om A har linjärt oberoende kolonner är $A^T A$ inverterbar och

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

Geometrisk tolkning

$A\hat{x}$ är den ortogonala projektionen av b på $\text{Col}(A)$. Residualen $b - A\hat{x}$ är ortogonal mot $\text{Col}(A)$.

Användning

- Linjär regression
- Kurvanpassning
- Dataapproximation

Läsning

- 14.5 The Method of Least Squares

Se även

- Ortogonalitet
- Gram-Schmidt-processen
- Skalarproduktsrum

Funktionsapproximationer

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #taylor

Kurs: M0066M Förkunskaper: Taylors formel

En funktion kan nära en punkt a approximeras med sitt Taylorpolynom:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots$$

Vanliga förstaordnings-approximationer nära 0

$$\sin x \approx x, \quad \tan x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$e^x \approx 1 + x, \quad \ln(1 + x) \approx x, \quad (1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

Felet

Lagranges restterm ger en absolut feluppskattning:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - a|^{n+1}, \quad M = \max |f^{(n+1)}|$$

Läsning

- [4.9 Linear Approximations](#)

Se även

- [Taylors formel](#)
- [Taylorutveckling](#)