

M0066M

Envariabelanalys 2

Kurskompendium från Pelles Moln · 21 noter · 2026-10-19
pellesmoln.org/kurser/M0066M

Innehåll

Block 1 — Integraler

Primitiv funktion och obestämd integral	3
Partiell integration	4
Variabelbyte i integraler	7
Omvänt variabelbyte	8
Integration av rationella funktioner	9
Bestämd integral och Riemannsummor	10
Analysens huvudsats	12
Generaliserade integraler	13
Area mellan kurvor	15
Rotationskroppar	16
Båglängd och rotationsarea	28

Block 2 — Komplexa tal

Komplexa tal	29
Polär form för komplexa tal	55
De Moivres och Eulers formler	56

Block 3 — Differentialekvationer

Differentialekvationer	57
Separabla differentialekvationer	111
Linjära differentialekvationer av första ordningen	112
Riktningsfält och numeriska metoder	113
Homogena linjära differentialekvationer	115
Inhomogena linjära differentialekvationer	116
Eulers differentialekvation	118

Primitiv funktion och obestämd integral

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #integral

Kurs: M0066M Förkunskaper: Derivata

En **primitiv funktion** till f är en funktion F med $F' = f$.

Om F är primitiv, så är varje primitiv av formen $F(x) + C$.

Den **obestämda integralen** betecknar alla primitiva:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Vanliga primitiva

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

Läsning

- 2.10 Antiderivatives and Initial-Value Problems

Se även

- Analysens huvudsats
- Integraler
- Elementära funktioners derivator

Partiell integration

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #integral

Kurs: M0066M Förkunskaper: Integraler, Deriveringsregler

1. Idé

Partiell integration används när integranden är en **produkt av två funktioner** där den ena är lätt att hitta primitiv till och den andra blir enklare när den deriveras. Metoden är produktregeln baklänges: i stället för att derivera en produkt flyttar vi derivatan från den ena faktorn till den andra inuti en integral.

Givet integralen

$$\int f(x)g(x)dx$$

väljer vi att

- **integrera** f — det vill säga byta ut f mot en primitiv F (så att $F' = f$),
- **derivera** g — det vill säga byta ut g mot g' .

Priset vi betalar är att en ny integral dyker upp i utbyte. Vinsten är att den nya integralen är enklare än den ursprungliga.

2. Formeln

SATS: Partiell integration

Låt F vara en primitiv funktion till f , och låt g vara deriverbar. Då gäller

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx.$$

Härledningen följer direkt ur **produktregeln**: $(F(x)g(x))' = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$. Integrera båda leden och lös ut den första integralen.

3. Hur man använder den

Strategi för valet

1. **Identifiera de två faktorerna** i integranden.
2. **Bestäm vilken som ska deriveras** (g) och vilken som ska integreras (f). Tumregel: välj g så att g' blir märkbart enklare — typiskt ett polynom som krymper en grad, eller en logaritm som försvinner.
3. **Skriv upp F och g'** explicit innan formeln tillämpas, så att man inte tappar bort tecken.
4. **Sätt in i formeln** och avgör om den nya integralen $\int F g' dx$ verkligen är enklare. Är den värre — byt roller på f och g .

LIATE — minnesregel för g

Välj g enligt prioriteringsordningen **L**ogaritmer, **I**nversa trigonometriska, **A**lgebraiska (polynom), **T**rigonometriska, **E**xponentialer. Det som står tidigare i listan deriveras (är g); det senare integreras (är f).

4. Räkneexempel

Exempel 1 — polynom gånger trigonometri

Beräkna

$$\int x \cos x \, dx.$$

Lösning

Polynomet x blir enklare när det deriveras, så vi sätter

$$g(x) = x, \quad f(x) = \cos x,$$

vilket ger $g'(x) = 1$ och $F(x) = \sin x$. Formeln ger

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \cdot 1 \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

≡ Exempel 2 — polynom gånger exponential

Beräkna

$$\int x e^x dx.$$

** Lösning**

Sätt $g(x) = x$ och $f(x) = e^x$. Då är $g'(x) = 1$ och $F(x) = e^x$, så

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = e^x(x - 1) + C.$$

≡ Exempel 3 — logaritmen som "ensam" faktor

Beräkna

$$\int \ln x dx.$$

** Lösning**

Skriv om integranden som $1 \cdot \ln x$ och välj $g(x) = \ln x$ (logaritmen försvinner när den deriveras), $f(x) = 1$. Då är $g'(x) = 1/x$ och $F(x) = x$, så

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Läsning

- [6.1 Integration by Parts](#)

Se även

- [Integraler](#)
- [Variabelbyte i integraler](#)

Variabelbyte i integraler

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #integral

Kurs: M0066M **Förkunskaper:** Integraler, Kedjeregeln

Kommer från kedjeregeln. Sätt $u = g(x)$, då $du = g'(x) dx$:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$$

Bestämd integral

Byt även gränserna:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Example

$\int 2x \cos(x^2) dx$: sätt $u = x^2$, $du = 2x dx$. Integralen blir $\int \cos u du = \sin(x^2) + C$.

Läsning

- 5.6 The Method of Substitution

Se även

- Omvänt variabelbyte
- Partiell integration
- Kedjeregeln

Omvänt variabelbyte

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #integral

Kurs: M0066M **Förkunskaper:** Variabelbyte i integraler

Istället för $u = g(x)$ sätter man $x = h(t)$, typiskt för att bli av med kvadratrötter.

Trigonometriska substitutioner

Uttryck	Substitution
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a / \cos t$

Example

$\int \sqrt{1 - x^2} dx$: sätt $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$. Integralen blir $\int \cos^2 t dt$.

Läsning

- 6.3 Inverse Substitutions

Se även

- Variabelbyte i integraler
- Integraler

Integration av rationella funktioner

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #integral

Kurs: M0066M **Förkunskaper:** Integraler, Polynom och faktorisering

En rationell funktion $P(x)/Q(x)$ integreras genom **partialbråksuppdelning**.

Algoritm

1. Om $\deg P \geq \deg Q$: polynomdividera.
2. Faktorisera $Q(x)$ i linjära och irreducibla kvadratiska faktorer.
3. Dela upp:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$$

4. Bestäm konstanter via identifiering eller insättning.
5. Integrera varje term.

Grundintegraler

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln |x-a| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan(x/a) + C$$

Läsning

- 6.2 Integrals of Rational Functions

Se även

- Integraler
- Variabelbyte i integraler

Bestämd integral och Riemannsummor

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #integral

Kurs: M0066M Förkunskaper: Integraler, Gränsvärden

1. Riemannsumma

Dela $[a, b]$ i n delar med partition $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ och välj $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

2. Bestämd integral

Om gränsvärdet existerar när finheten $\rightarrow 0$ definieras

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} S_n$$

Tolkning: signerad area under kurvan.

3. Räkner regler

$$\int_a^b f dx + \int_b^c f dx = \int_a^c f dx, \quad \int_a^b cf dx = c \int_a^b f dx$$

Läsning

- 5.2 Areas as Limits of Sums
- 5.3 The Definite Integral

Se även

- Integraler
- Analysens huvudsats

Resurser

- [3Blue1Brown: Integrals and area](#)
-

Analysens huvudsats

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #integral

Kurs: M0066M **Förkunskaper:** Derivata, Integraler

Analysens huvudsats binder ihop derivata och integral.

Del 1

Om f är kontinuerlig och $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, så är F deriverbar med

$$F'(x) = f(x)$$

Del 2

Om F är en primitiv funktion till f på $[a, b]$, då

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Läsning

- 5.5 The Fundamental Theorem of Calculus

Se även

- [Integraler](#)
- [Primitiv funktion och obestämd integral](#)
- [Bestämd integral och Riemannsummor](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Fundamental theorem of calculus](#)

Generaliserade integraler

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #integral

Kurs: M0066M **Förkunskaper:** Integraler, Oegentliga gränsvärden

Används när integrationsintervallet är obegränsat eller integranden är obegränsad.

Obegränsat intervall

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$

Singularitet i integranden

Om f är obegränsad nära b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$

Konvergens vs divergens

Integralen **konvergerar** om gränsvärdet är ändligt, annars **divergerar** den.

⋮ Viktigt

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ konvergerar} \iff p > 1. \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ konvergerar} \iff p < 1.$$

Jämförelsekriterium

Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ och $\int g$ konvergerar, så gör $\int f$ det också.

Läsning

- [6.5 Improper Integrals](#)

Se även

- [Integraler](#)
 - [Oegentliga gränsvärden](#)
-

Area mellan kurvor

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #integral

Kurs: M0066M Förkunskaper: Integraler

Om $f(x) \geq g(x)$ på $[a, b]$ är arean mellan kurvorna

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Tip

Om kurvorna korsar varandra: hitta skärningspunkterna och dela upp integralen i delar där ordningen är konstant.

Example

Arean mellan $y = x$ och $y = x^2$ på $[0, 1]$: $\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Läsning

- 5.7 Areas of Plane Regions

Se även

- Integraler
- Rotationskroppar

Rotationskroppar

19 okt. 2026, 9 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #rotationsvolym #rotationsyta

Kurs: M0066M Förkunskaper: Integraler

1. Inledning

När en kurva eller ett område i planet **roterar** kring en axel skapas en tredimensionell kropp. Vi kan beräkna både **volymen** och **ytan** av denna kropp med hjälp av integraler.

Geometrisk intuition

Tänk dig att du snurrar en kurva kring en axel — som när man svänger en lasso eller snurrar en penna mellan fingrarna. Den “svepande” rörelsen skapar en 3D-form.

Kurva	Rotationskropp
Rät linje parallell med axeln	Cylinder
Halvcirkel kring sin diameter	Sfär
Rät linje som skär axeln	Kon
Cirkel kring en extern axel	Torus (munkring)

2. Rotationsvolym

Definition

Definition: Rotationsvolym

En **rotationsvolym** är volymen av den tredimensionella kropp som uppstår då ett område i planet roterar kring en axel.

Det finns två huvudmetoder för att beräkna rotationsvolym:

1. **Skivmetoden** — bygger upp kroppen av tunna cirkulära skivor
2. **Skalmetoden** — bygger upp kroppen av tunna cylindriska skal

Skivmetoden

Skivmetoden — illustration

Vänster: 2D-området under kurvan $y = f(x)$ med en tunn skiva markerad

Höger: 3D-kroppen uppbyggd av cirkulära skivor efter rotation kring x-axeln

SATS: Skivmetoden (rotation kring x-axeln)

Om området under kurvan $y = f(x)$ för $a \leq x \leq b$ roterar kring x-axeln, ges volymen av:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Härledning:

1. Dela upp intervallet $[a, b]$ i tunna skivor med tjocklek dx
2. Varje skiva är approximativt en cylinder med radie $r = f(x)$ och höjd dx
3. Volymen av en skiva: $dV = \pi r^2 \cdot dx = \pi [f(x)]^2 dx$
4. Summera (integrera) alla skivor

SATS: Skivmetoden (rotation kring y-axeln)

Om kurvan $x = g(y)$ för $c \leq y \leq d$ roterar kring y-axeln: $V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$

Receptbok: Skivmetoden

Steg 1: Identifiera rotationsaxeln och funktionen

Steg 2: Bestäm integrationsgränserna

Steg 3: Ställ upp integralen:

- Kring x-axeln: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$
- Kring y-axeln: $V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$

Steg 4: Beräkna integralen

Exempel: Sfärens volym

Rotera halvcirkeln $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ kring x-axeln.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \pi \cdot \frac{4R^3}{3} = \boxed{\frac{4\pi R^3}{3}} \end{aligned}$$

Exempel: Konens volym

Rotera linjen $y = \frac{r}{h}x$ för $0 \leq x \leq h$ kring x-axeln.

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \boxed{\frac{\pi r^2 h}{3}}$$

Skalmetoden

Skalmetoden – illustration

Vänster: 2D-området med en vertikal remsa markerad (bredd dx , höjd $f(x)$, avstånd x från y-axeln)

Höger: Cylindriskt skal som bildas när remsan roterar kring y-axeln

SATS: Skalmetoden (rotation kring y-axeln)

Om området under kurvan $y = f(x)$ för $a \leq x \leq b$ (där $a \geq 0$) roterar kring y-axeln: $V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$

Härledning:

1. Dela upp området i tunna vertikala remsor med bredd dx
2. Varje remsa sveper ut ett cylindriskt skal vid rotation
3. Skalets volym: $dV = 2\pi \cdot (\text{radie}) \cdot (\text{höjd}) \cdot (\text{tjocklek})$
4. Radie = x , höjd = $f(x)$, tjocklek = dx
5. $dV = 2\pi x \cdot f(x) dx$

SATS: Skalmetoden (rotation kring x-axeln)

Om kurvan $x = g(y)$ för $c \leq y \leq d$ roterar kring x-axeln: $V = 2\pi \int_c^d y \cdot g(y) dy$

Exempel: "Vinglasen"

Rotera $y = x^2$ för $0 \leq x \leq 2$ kring **y-axeln**.

$$V = 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2 dx = 2\pi \int_0^2 x^3 dx = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \boxed{8\pi}$$

Exempel: $y = \sqrt{x}$ kring y-axeln

Rotera $y = \sqrt{x}$ för $0 \leq x \leq 4$ kring y-axeln.

$$V = 2\pi \int_0^4 x \cdot \sqrt{x} dx = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^4 = \boxed{\frac{128\pi}{5}}$$

Område mellan två kurvor

Rotation mellan två kurvor — illustration

Vänster: Området mellan $f(x)$ (röd, övre) och $g(x)$ (blå, undre)

Höger: "Brickor" med hål — yttre radie $R = f(x)$, inre radie $r = g(x)$

SATS: Rotation av område mellan två kurvor

Om området mellan $y = f(x)$ (övre) och $y = g(x)$ (undre) roterar kring x-axeln:

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

Geometrisk tolkning: Tvärsnitten är "brickor" (annuli) — skivor med hål i mitten.

- Yttre radie: $R = f(x)$
- Inre radie: $r = g(x)$
- Brickans area: $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(f^2 - g^2)$

Exempel: Mellan $y = x$ och $y = x^2$

Området mellan $y = x$ och $y = x^2$ för $0 \leq x \leq 1$ roterar kring x-axeln.

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \boxed{\frac{2\pi}{15}}$$

Rotation kring andra linjer

Rotation kring förskjutna axlar — illustration

Vänster: Rotation kring $y = c$ — radien är $|f(x) - c|$

Höger: Rotation kring $x = k$ — radien är $|k - x|$

SATS: Rotation kring linjen $y = c$

Om kurvan $y = f(x)$ roterar kring den horisontella linjen $y = c$: $V = \pi \int_a^b [f(x) - c]^2 dx$

Nyckel: Radien är nu avståndet från kurvan till rotationsaxeln, dvs. $|f(x) - c|$.

SATS: Rotation kring linjen $x = k$

Om kurvan $y = f(x)$ (med $x \leq k$) roterar kring den vertikala linjen $x = k$: $V = 2\pi \int_a^b (k - x) \cdot f(x) dx$

Nyckel: Radien i skalmetoden är nu $k - x$.

Exempel: Rotation kring $y = -1$

Rotera $y = x^2$ för $0 \leq x \leq 1$ kring linjen $y = -1$.

Avståndet från kurvan till axeln: $x^2 - (-1) = x^2 + 1$

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_0^1 = \boxed{\frac{28\pi}{15}}$$

Metodval: skiv- eller skalmetoden?

Jämförelse av metoderna — illustration

Vänster: Skivmetoden — skivor vinkelräta mot rotationsaxeln

Höger: Skalmetoden — cylindriska skal runt rotationsaxeln

⚠ Snabbguide: När ska man använda vilken metod?

Situation	Rekommenderad metod
Rotation kring x-axeln , $y = f(x)$ given	Skivmetoden
Rotation kring y-axeln , $y = f(x)$ given	Skalmetoden
Rotation kring y-axeln , $x = g(y)$ given	Skivmetoden (integrera m.a.p. y)
Rotation kring x-axeln , $x = g(y)$ given	Skalmetoden (integrera m.a.p. y)
Funktionen svår att invertera	Välj metod som undviker inversionen

Tumregel:

- **Skivmetoden:** Integrationsvariabeln är *längs* rotationsaxeln
- **Skalmetoden:** Integrationsvariabeln är *vinkelrätt* mot rotationsaxeln

Klassiskt exempel: Gabriels horn

✎ Gabriels horn – det omöjliga hornet

Rotera $y = \frac{1}{x}$ för $x \geq 1$ kring x-axeln.

Volym (ändlig): $V = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = \pi(0 - (-1)) = \boxed{\pi}$

Yta (oändlig): $A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx > 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$

Paradox: Ändlig volym ($V = \pi$) men oändlig yta ($A = \infty$)

“Hornet kan fyllas med färg, men aldrig målas!”

3. Rotationsyta

Definition och härledning

Rotationsyta – illustration

Steg 1: Kurvan med ett litet bågsegment ds

Steg 2: Bågsegmentet roterar och bildar ett mantelband

Steg 3: Den kompletta rotationsytan

Definition: Rotationsyta

En **rotationsyta** är den yta som uppkommer då en kurva roterar kring en axel. Vi beräknar arean av denna yta.

Härledning: Rotationsareans formel

Idé: Dela upp kurvan i små bågsegment och summera mantelarean av de cylindrar som bildas.

1. Ett litet bågsegment har längd ds
2. Vid rotation bildar det en cylindermantel med radie $|f(x)|$ och höjd ds
3. Mantelarean: $dA = 2\pi \cdot |f(x)| \cdot ds$
4. Bågelängden: $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$
5. Integrera: $A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

Formler för rotationsarea

SATS: Rotationsarea (rotation kring x-axeln)

Om kurvan $y = f(x)$ för $a \leq x \leq b$ roterar kring x-axeln: $A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

SATS: Rotationsarea (rotation kring y-axeln)

Om kurvan $x = g(y)$ för $c \leq y \leq d$ roterar kring y-axeln: $A = 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$

⚠ OBS!

Rotationsareaformeln innehåller faktorn $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, vilket ofta leder till **svårare integraler** än volymberäkningar!

☰ Exempel: Sfärens yta

Rotera halvcirkeln $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ kring x-axeln.

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \text{ så } \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$A = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R \cdot 2R = \boxed{4\pi R^2}$$

Pappos-Guldins regler**🔗 Pappos-Guldin – illustration**

Vänster: Principen — ett område med **tyngdpunkt** T roterar kring en axel

Höger: Torusen — en cirkel med radie r roterar på avstånd R från axeln

📌 SATS: Pappos-Guldins första regel (volym)

Om ett plant område med area A roterar kring en extern axel, ges volymen av: $V = 2\pi \bar{r} \cdot A$

där $\bar{r}$ är avståndet från områdets tyngdpunkt till rotationsaxeln.

Intuition: Volymen = arean $\times$ sträckan som tyngdpunkten färdas (omkretsen $2\pi \bar{r}$).

📌 SATS: Pappos-Guldins andra regel (area)

Om en kurva med båglängd s roterar kring en extern axel, ges rotationsarean av: $A = 2\pi \bar{r} \cdot s$

☰ Exempel: Torusens volym och yta

En cirkel med radie r roterar kring en axel på avstånd R (där $R > r$).

- Cirkelns area: $A = \pi r^2$, omkrets: $s = 2\pi r$, tyngdpunktens avstånd: $\bar{r} = R$

Volym: $V = 2\pi R \cdot \pi r^2 = \boxed{2\pi^2 R r^2}$

Area: $A = 2\pi R \cdot 2\pi r = \boxed{4\pi^2 R r}$

4. Sammanfattning

Formelsammanfattning

✎ Rotationsvolym — alla formler

Metod	Rotation kring	Formel
Skivmetoden	x-axeln	$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$
Skivmetoden	y-axeln	$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$
Skalmetoden	y-axeln	$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$
Skalmetoden	x-axeln	$V = 2\pi \int_c^d y \cdot g(y) dy$
Mellan kurvor	x-axeln	$V = \pi \int_a^b ([f]^2 - [g]^2) dx$
Kring $y = c$	—	$V = \pi \int_a^b [f(x) - c]^2 dx$

✎ Rotationsyta — alla formler

Rotation kring	Formel
x-axeln	$A = 2\pi \int_a^b \ f(x)\ \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$
y-axeln	$A = 2\pi \int_c^d \ g(y)\ \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$

Pappos-Guldin:

- Volym: $V = 2\pi\bar{r} \cdot A$
- Area: $A = 2\pi\bar{r} \cdot s$

Vanliga misstag**⚠ Vid volymberäkning**

1. **Glömmer π** — Skivmetoden har alltid π utanför integralen!
2. **Fel radie** — Vid rotation kring $y = c$, är radien $|f(x) - c|$, inte $f(x)$
3. **Blandar metoder** — Använd inte skiv- och skalmetoden i samma integral
4. **Glömmer kvadraten** — Det ska vara $[f(x)]^2$, inte $f(x)$

⚠ Vid areaberäkning

1. **Glömmer båglängdsfaktorn** — Det ska vara $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, inte bara 1
2. **Fel derivata** — Kontrollera $f'(x)$ noggrant
3. **Glömmer 2π** — Faktorn 2π ska alltid vara med
4. **Blandar ihop volym och area** — Volym har πr^2 , area har $2\pi r$

Klassiska resultat**📄 Tabell: Volymer och ytor av rotationskroppar**

Kropp	Volym	Yta (mantel)
Sfär (radie R)	$\frac{4\pi R^3}{3}$	$4\pi R^2$
Cylinder (radie r , höjd h)	$\pi r^2 h$	$2\pi r h$
Kon (radie r , höjd h , sidhöjd s)	$\frac{\pi r^2 h}{3}$	$\pi r s$
Torus (radier R, r)	$2\pi^2 R r^2$	$4\pi^2 R r$

Läsning

- [7.1 Volumes by Slicing — Solids of Revolution](#)
- [7.2 More Volumes by Slicing](#)

Se även

- [Integraler](#)
 - [Parametriserade kurvor](#)
 - [Integraler](#)
-

Båglängd och rotationsarea

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #integral

Kurs: M0066M **Förkunskaper:** Integraler, Parametriserade kurvor

Båglängd av graf

För $y = f(x)$ på $[a, b]$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Parametriskt

För $(x(t), y(t))$ på $[t_1, t_2]$:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Mantelarea vid rotation kring x -axeln

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Läsning

- 7.3 Arc Length and Surface Area

Se även

- Rotationskroppar
- Parametriserade kurvor

Komplexa tal

19 okt. 2026, 20 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #komplexa-tal

⚠ Info Filen är ett superdokument för komplexa talplanet, skapat i samma stil som Differentialekvationer

Det Komplexa Talplanet

Inledning

De **komplexa talen** är en utvidgning av de reella talen som introducerar den **imaginära enheten** i , definierad genom egenskapen $i^2 = -1$. Det komplexa talplanet, även kallat **Argandplanet** eller **Gaussplanet**, ger oss ett kraftfullt sätt att visualisera och arbeta med komplexa tal geometriskt.

✎ Varför behövs komplexa tal?

Komplexa tal uppstod ur behovet att lösa ekvationer som $x^2 + 1 = 0$, vilken saknar reella lösningar. Genom att införa $i = \sqrt{-1}$ kan vi:

- Lösa **alla** polynomekvationer (algebrans fundamentalsats)
- Beskriva **svängningar och vågor** elegant
- Förenkla beräkningar inom **elektroteknik** och **signalbehandling**
- Utföra **rotationer** i planet på ett naturligt sätt

Del I: Grundläggande begrepp

Definition av komplexa tal

Definition: Det komplexa talet

Ett **komplex tal** är ett tal på formen: $z = a + bi$

där $a, b \in \mathbb{R}$ och i är den imaginära enheten med egenskapen $i^2 = -1$.

- $a = \operatorname{Re}(z)$ kallas **realdelen** av z
- $b = \operatorname{Im}(z)$ kallas **imaginärdelen** av z
- Mängden av alla komplexa tal betecknas $\mathbb{C}$

OBS: Imaginärdelen b är ett *reellt* tal — det är inte bi utan bara b .

Speciella fall

Typ	Villkor	Exempel
Reellt tal	$b = 0$	$z = 3$
Rent imaginärt tal	$a = 0, b \neq 0$	$z = 4i$
Noll	$a = 0, b = 0$	$z = 0$

Det komplexa talplanet

Definition: Det komplexa talplanet (Argandplanet)

Varje komplext tal $z = a + bi$ kan representeras som en **punkt** (a, b) i ett tvådimensionellt koordinatsystem:

- **x-axeln** kallas **reella axeln** (Re)
- **y-axeln** kallas **imaginära axeln** (Im)

Det komplexa talet kan också ses som en **vektor** från origo till punkten (a, b) .

Notation:

- Punkten (a, b) i planet
- Vektorn $\vec{z}$ från origo
- Det komplexa talet $z = a + bi$

Dessa tre representationer är ekvivalenta.

Konjugat

Definition: Komplexkonjugat

Om $z = a + bi$, definieras **konjugatet** (eller komplexkonjugatet) som: $\bar{z} = a - bi$

Geometrisk tolkning: Konjugatet är en **spiegling i den reella axeln**.

Alternativ notation: z^* används ibland istället för $\bar{z}$

SATS: Egenskaper för konjugat

För komplexa tal z och w gäller:

1. $\overline{(\bar{z})} = z$
2. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
3. $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$
4. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
5. $\overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ (om $w \neq 0$)
6. $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
7. $z - \bar{z} = 2i \cdot \text{Im}(z)$
8. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ (alltid reellt och ≥ 0)
9. $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

✓ **Härledning:** $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Låt $z = a + bi$. Då är $\bar{z} = a - bi$.

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

Eftersom $|z|^2 = a^2 + b^2$ (se definitionen av belopp), har vi: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Användning: Denna egenskap är central vid division av komplexa tal.

Belopp (absolutbelopp)

Definition: Belopp

Beloppet (eller absolutbeloppet, modulus) av $z = a + bi$ definieras som: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Geometrisk tolkning: Avståndet från origo till punkten z i det komplexa planet.

Alternativa uttryck:

- $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

SATS: Egenskaper för belopp

För komplexa tal z och w gäller:

1. $|z| \geq 0$, med $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
4. $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ (om $w \neq 0$)
5. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ och $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
6. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

SATS: Triangelolikheten

För alla komplexa tal z och w gäller: $|z + w| \leq |z| + |w|$

Geometrisk tolkning: I en triangel är summan av två sidor alltid minst lika stor som den tredje.

Omvänd triangelolikhet: $||z| - |w|| \leq |z - w|$

☰ Exempel: Beräkna belopp och konjugat

Låt $z = 3 - 4i$.

Konjugat: $\bar{z} = 3 + 4i$

Belopp: $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Kontroll med $z \cdot \bar{z}$: $z \cdot \bar{z} = (3 - 4i)(3 + 4i) = 9 + 16 = 25 = |z|^2 \checkmark$

Del II: Räkneoperationer

Addition och subtraktion

 Receptbok: Addition och subtraktion

Addition och subtraktion utförs **komponentvis**: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Geometrisk tolkning: Vektoraddition — parallelogramregeln gäller.

☰ Exempel: Addition

Beräkna $(3 + 2i) + (1 - 5i)$:

$$= (3 + 1) + (2 + (-5))i = 4 - 3i$$

Multiplikation

 Receptbok: Multiplikation (rektangulär form)

Använd distributiva lagen och ersätt $i^2 = -1$: $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Minnesregel: Multiplicera som vanliga binomer, sedan $i^2 = -1$.

☰ Exempel: Multiplikation

Beräkna $(2 + 3i)(4 - i)$:

$$= 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-i) + 3i \cdot 4 + 3i \cdot (-i) = 8 - 2i + 12i - 3i^2 = 8 + 10i - 3(-1) = 8 + 10i + 3 = 11 + 10i$$

✎ Potenser av i

Potenserna av i är cykliska med period 4:

n	i^n
0	1
1	i
2	-1
3	$-i$
4	1
5	i
...	...

Formel: $i^n = i^{n \bmod 4}$

☰ Exempel: Beräkna i^{2023}

$$2023 = 4 \cdot 505 + 3 \quad i^{2023} = i^3 = -i$$

Division

Receptbok: Division (förläng med konjugat)

Steg 1: Identifiera täljare och nämnare

Steg 2: Förläng bråket med **konjugatet till nämnaren**

Steg 3: Nämnaren blir reell: $w \cdot \bar{w} = |w|^2$

Steg 4: Förenkla täljaren

Formel: $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$

Exempel: Division

Beräkna $\frac{3+4i}{1+2i}$:

Steg 1: Konjugatet till nämnaren är $1 - 2i$

Steg 2: Förläng: $\frac{3+4i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i}$

Steg 3: Nämnaren: $(1+2i)(1-2i) = 1+4 = 5$

Steg 4: Täljaren: $(3+4i)(1-2i) = 3-6i+4i-8i^2 = 3-2i+8 = 11-2i$

Svar: $\frac{3+4i}{1+2i} = \frac{11-2i}{5} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$

Vanliga misstag vid division

- **Glömmer att förlänga med konjugatet** — försöker dividera direkt
- **Fel tecken i konjugatet** — $\overline{1+2i} = 1-2i$, inte $-1-2i$
- **Glömmer $i^2 = -1$** i täljaren
- **Skriver svaret fel** — glömmer att dividera både real- och imaginärdel med nämnaren

Del III: Polär form

Polära koordinater

Definition: Polär form

Låt $z \neq 0$ vara ett komplext tal. Då kan z skrivas på **polär form**: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

där:

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ är **beloppet** (avståndet till origo)
- $\theta = \arg(z)$ är **argumentet** (vinkeln mot positiva Re-axeln)

Samband med rektangulär form:

- $a = r \cos \theta$
- $b = r \sin \theta$

Definition: Argument

Argumentet $\arg(z)$ är vinkeln θ (i radianer) från positiva reella axeln till vektorn z , mätt moturs.

OBS: Argumentet är **flertydigt** — om θ är ett argument, så är även $\theta + 2\pi n$ för alla heltal n ett argument.

Huvudargumentet $\text{Arg}(z)$ är det unika argumentet i intervallet $(-\pi, \pi]$ (eller ibland $[0, 2\pi)$).

Receptbok: Rektangulär → Polär form

Givet $z = a + bi$:

Steg 1: Beräkna beloppet $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Steg 2: Beräkna argumentet (beror på **kvadrant**)

Kvadrant	Villkor	Formel för θ
I	$a > 0, b \geq 0$	$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
II	$a < 0, b \geq 0$	$\theta = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
III	$a < 0, b < 0$	$\theta = -\pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
IV	$a > 0, b < 0$	$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
Pos. Im	$a = 0, b > 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
Neg. Im	$a = 0, b < 0$	$\theta = -\frac{\pi}{2}$

Steg 3: Skriv $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Receptbok: Polär → Rektangulär form

Givet $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$:

$$a = r \cos \theta \quad b = r \sin \theta$$

Svar: $z = a + bi$

Exempel: Skriv $z = 1 + i$ på polär form

Steg 1: Belopp $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Steg 2: Argument (första kvadranten, $a > 0, b > 0$) $\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Svar: $z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

Exempel: Skriv $z = -1 + \sqrt{3}i$ på polär form

Steg 1: Belopp $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$

Steg 2: Argument (andra kvadranten, $a < 0, b > 0$) $\theta = \pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \pi + \arctan(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Svar: $z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

☰ **Exempel: Skriv** $z = 3(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ **på rektangulär form**

$$a = 3 \cos \frac{\pi}{6} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad b = 3 \sin \frac{\pi}{6} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Svar: $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

Eulers formel

SATS: Eulers formel

För alla reella tal θ gäller: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Detta ger den **exponentiella formen** av ett komplext tal: $z = re^{i\theta}$

där $r = |z|$ och $\theta = \arg(z)$.

Speciella fall av Eulers formel

θ	$e^{i\theta}$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	i
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$-i$
2π	1

Eulers identitet (ofta kallad “matematikens vackraste formel”): $e^{i\pi} + 1 = 0$

✓ **Härledning: Eulers formel via taylorserier**

Taylorserierna för e^x , $\cos x$ och $\sin x$ är: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$
 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

Sätt $x = i\theta$ i exponentialserien: $e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots$

Använd $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etc: $= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \dots$

Gruppera reella och imaginära termer: $= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots) = \cos \theta + i \sin \theta$

Multiplikation och division i polär formi **SATS: Multiplikation i polär/exponentiell form**

Om $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ och $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, då: $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

I ord:

- **Beloppen multipliceras:** $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- **Argumenten adderas:** $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

Geometrisk tolkning: Multiplikation med $z = r e^{i\theta}$ innebär:

1. **Skalning** med faktorn r
2. **Rotation** med vinkeln θ (moturs)

i **SATS: Division i polär/exponentiell form**

Om $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ och $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ med $z_2 \neq 0$, då: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

I ord:

- **Beloppen divideras:** $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

- **Argumenten subtraheras:** $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

☰ Exempel: Multiplikation i polär form

Beräkna $z_1 \cdot z_2$ där:

- $z_1 = 2e^{i\pi/3}$
- $z_2 = 3e^{i\pi/4}$

Lösning: $z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \cdot e^{i(\pi/3+\pi/4)} = 6e^{i \cdot 7\pi/12}$

☰ Exempel: Division i polär form

Beräkna $\frac{z_1}{z_2}$ där:

- $z_1 = 4e^{i\pi/2}$
- $z_2 = 2e^{i\pi/6}$

Lösning: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2} \cdot e^{i(\pi/2-\pi/6)} = 2e^{i\pi/3}$

Del IV: de Moivres formel och potenser

de Moivres formel

SATS: de Moivres formel

För alla reella θ och alla heltal n gäller: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

Eller i exponentiell form: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

✓ Härlledning: de Moivres formel

Bevis med exponentialform (enklast):

Från exponentiallagarna: $(e^a)^n = e^{an}$

Därför: $(e^{i\theta})^n = e^{i \cdot n \cdot \theta} = e^{in\theta}$

Översatt till trigonometrisk form: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

Alternativt bevis med induktion för positiva heltal n finns också.

🔗 Receptbok: Beräkna z^n (heltalspotens)

Steg 1: Skriv z på polär form: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$

Steg 2: Tillämpa de Moivres formel: $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = r^n e^{in\theta}$

Steg 3: Omvandla tillbaka till rektangulär form om så önskas.

☰ Exempel: Beräkna $(1 + i)^8$

Steg 1: Polär form av $1 + i$:

- $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$
- $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$

Steg 2: Använd de Moivre: $(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 \cdot e^{i \cdot 8 \cdot \pi/4} = 2^4 \cdot e^{i \cdot 2\pi} = 16 \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 16 \cdot (1 + 0i) = 16$

☰ Exempel: Beräkna $(1 - i)^{10}$

Steg 1: Polär form av $1 - i$:

- $r = \sqrt{2}$

- $\theta = -\frac{\pi}{4}$ (fjärde kvadranten)
- $1 - i = \sqrt{2} \cdot e^{-i\pi/4}$

Steg 2: Använd de Moivre: $(1 - i)^{10} = (\sqrt{2})^{10} \cdot e^{-i \cdot 10\pi/4} = 2^5 \cdot e^{-i \cdot 5\pi/2} = 32 \cdot e^{-i\pi/2}$ (eftersom $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$)

$$= 32(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})) = 32(0 - i) = -32i$$

Tillämpning: Trigonometriska identiteter

Användning av de Moivre för trigonometriska formler

Genom att utveckla $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ med binomialsatsen och jämföra med $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ kan vi härleda formler för $\cos(n\theta)$ och $\sin(n\theta)$.

Exempel: Härled $\cos(2\theta)$ och $\sin(2\theta)$

Använd de Moivre med $n = 2$: $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$

Utveckla vänsterledet: $\cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta + i^2 \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta$

Jämför real- och imaginärdelar: $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$

Exempel: Härled $\cos(3\theta)$ och $\sin(3\theta)$

Använd de Moivre med $n = 3$: $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$

Utveckla med binomialsatsen: $= \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \cdot i \sin \theta + 3 \cos \theta \cdot (i \sin \theta)^2 + (i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta$

Gruppera: $= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$

Resultat: $\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

$\sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$

Del V: Rötter till komplexa tal

n:te roten ur ett komplext tal

SATS: n:te rötter

Ekvationen $w^n = z$ där $z \neq 0$ har exakt n stycken lösningar i $\mathbb{C}$.

Om $z = re^{i\theta}$, ges de n rötterna av: $w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\theta+2\pi k)/n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Geometrisk observation: De n rötterna ligger jämnt fördelade på en cirkel med radie $\sqrt[n]{r}$, med vinkelavstånd $\frac{2\pi}{n}$ mellan varje rot.

Receptbok: Beräkna alla n:te rötter ur z

Steg 1: Skriv z på polär form: $z = re^{i\theta}$

Steg 2: Beräkna rotens belopp: $\rho = \sqrt[n]{r}$

Steg 3: Beräkna argumenten för de n rötterna: $\varphi_k = \frac{\theta+2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

Steg 4: Skriv upp rötterna: $w_k = \rho e^{i\varphi_k}$

Steg 5: Omvandla till rektangulär form om så önskas: $w_k = \rho(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$

Exempel: Beräkna alla kubikrötter till $z = 8$

Vi söker alla w sådana att $w^3 = 8$.

Steg 1: Polär form: $8 = 8e^{i \cdot 0}$ (dvs. $r = 8, \theta = 0$)

Steg 2: Rotens belopp: $\rho = \sqrt[3]{8} = 2$

Steg 3: Argumenten:

- $k = 0: \varphi_0 = \frac{0+0}{3} = 0$

- $k = 1: \varphi_1 = \frac{0+2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$
- $k = 2: \varphi_2 = \frac{0+4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Steg 4: Rötterna:

- $w_0 = 2e^{i \cdot 0} = 2$
- $w_1 = 2e^{i2\pi/3} = 2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -1 + \sqrt{3}i$
- $w_2 = 2e^{i4\pi/3} = 2(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -1 - \sqrt{3}i$

Svar: $w = 2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$

≡ Exempel: Beräkna $\sqrt{i}$ (alla kvadratrötter)

Vi söker alla w sådana att $w^2 = i$.

Steg 1: Polär form av i : $i = 1 \cdot e^{i\pi/2}$ (dvs. $r = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$)

Steg 2: Rotens belopp: $\rho = \sqrt{1} = 1$

Steg 3: Argumenten:

- $k = 0: \varphi_0 = \frac{\pi/2+0}{2} = \frac{\pi}{4}$
- $k = 1: \varphi_1 = \frac{\pi/2+2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$

Steg 4: Rötterna:

- $w_0 = e^{i\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$
- $w_1 = e^{i5\pi/4} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

Svar: $\sqrt{i} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

≡ Exempel: Beräkna alla fjärderötter till $z = -16$

Vi söker alla w sådana att $w^4 = -16$.

Steg 1: Polär form: $-16 = 16e^{i\pi}$

Steg 2: Rotens belopp: $\rho = \sqrt[4]{16} = 2$

Steg 3: Argumenten ($\theta = \pi, n = 4$):

- $k = 0: \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$
- $k = 1: \varphi_1 = \frac{\pi+2\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
- $k = 2: \varphi_2 = \frac{\pi+4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$
- $k = 3: \varphi_3 = \frac{\pi+6\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

Steg 4: Rötterna:

- $w_0 = 2e^{i\pi/4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = \sqrt{2}(1 + i)$
- $w_1 = 2e^{i3\pi/4} = \sqrt{2}(-1 + i)$
- $w_2 = 2e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}(-1 - i)$
- $w_3 = 2e^{i7\pi/4} = \sqrt{2}(1 - i)$

Enhetsrötter

Definition: n:te enhetsrötter

De n:te **enhetsrötterna** är lösningarna till ekvationen $z^n = 1$.

De ges av: $\omega_k = e^{i2\pi k/n} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$

Den **primitiva n:te enhetsroten** är $\omega = e^{i2\pi/n}$ (dvs. $k = 1$).

Alla enhetsrötter kan skrivas som potenser av ω : $\omega_k = \omega^k$

SATS: Egenskaper för enhetsrötter

Låt $\omega = e^{i2\pi/n}$ vara den primitiva n:te enhetsroten. Då gäller:

1. $\omega^n = 1$
2. $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$
3. Enhetsrötterna ligger på **enhetscirkeln**, jämnt fördelade med vinkelavstånd $\frac{2\pi}{n}$
4. Produkten av alla n:te enhetsrötter är $(-1)^{n+1}$

 Viktiga specialfall av enhetsrötter

n	Enhetsrötter	Primitiv rot ω
2	$1, -1$	-1
3	$1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$e^{i2\pi/3}$
4	$1, i, -1, -i$	i
6	$1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$e^{i\pi/3}$

✓ **Härledning: Summan av enhetsrötter är noll**

Låt $S = 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1}$.

Detta är en geometrisk summa med kvot ω : $S = \frac{1-\omega^n}{1-\omega}$

Eftersom $\omega^n = 1$: $S = \frac{1-1}{1-\omega} = \frac{0}{1-\omega} = 0$

(förutsatt att $\omega \neq 1$, dvs. $n \geq 2$)

Del VI: Polynomekvationer

Algebrans fundamentalsats

 SATS: Algebrans fundamentalsats

Varje icke-konstant polynom med komplexa (eller reella) koefficienter har **minst en rot** i $\mathbb{C}$.

Följsats: Ett polynom av grad n har **exakt n rötter** i $\mathbb{C}$ (räknat med multiplicitet).

 SATS: Konjugerade rötter

Om ett polynom har **reella koefficienter** och z_0 är en rot, då är även $\bar{z}_0$ (konjugatet) en rot.

Följd: Komplexa rötter till polynom med reella koefficienter kommer alltid i **konjugerade par**.

Andragradsekvationer

 **Receptbok: Lös** $az^2 + bz + c = 0$

Använd abc-formeln (eller pq-formeln): $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Diskriminanten $D = b^2 - 4ac$ avgör rötterna:

D	Rötter
$D > 0$	Två olika reella rötter
$D = 0$	En reell dubbelrot
$D < 0$	Två komplexa konjugerade rötter: $z = \frac{-b \pm i\sqrt{ D }}{2a}$

 **Exempel: Lös** $z^2 + 2z + 5 = 0$

Identifiera: $a = 1, b = 2, c = 5$

Diskriminanten: $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$

Rötterna: $z = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$

Svar: $z = -1 + 2i$ och $z = -1 - 2i$ (konjugerade)

 **Exempel: Lös** $z^2 - (3 + i)z + (2 + i) = 0$

Här har vi komplexa koefficienter, så abc-formeln gäller fortfarande.

Diskriminanten: $D = (3 + i)^2 - 4(2 + i) = 9 + 6i - 1 - 8 - 4i = 2i$

Vi behöver $\sqrt{2i}$ (se tidigare exempel): $\sqrt{2i} = \pm(1 + i)$

Rötterna: $z = \frac{(3+i) \pm (1+i)}{2}$

- $z_1 = \frac{3+i+1+i}{2} = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$
- $z_2 = \frac{3+i-1-i}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Svar: $z = 2 + i$ och $z = 1$

Kontroll: Dessa är INTE konjugerade, vilket är förväntat eftersom koefficienterna inte är reella.

Faktorisering av polynom

SATS: Faktorsatsen

Om z_0 är en rot till polynomet $P(z)$, så är $(z - z_0)$ en faktor i $P(z)$.

Fullständig faktorisering: $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$

där $z_1, z_2, \dots, z_n$ är polynomets rötter och a_n är ledande koefficienten.

Receptbok: Faktorisera polynom med reella koefficienter

Steg 1: Hitta alla rötter (reella och komplexa)

Steg 2: Skriv upp faktoriseringen över $\mathbb{C}$: $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$

Steg 3: För faktorisering över $\mathbb{R}$, slå ihop konjugerade par: $(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 - (z_0 + \bar{z}_0)z + z_0\bar{z}_0 = z^2 - 2\operatorname{Re}(z_0)z + |z_0|^2$

Detta är en reell andragsgradsfaktor.

Exempel: Faktorisera $z^3 - 1$

Rötterna: Tredje enhetsrötterna

- $z_0 = 1$
- $z_1 = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

- $z_2 = e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Faktorisering över C: $z^3 - 1 = (z - 1)(z - z_1)(z - z_2)$

Faktorisering över R: Slå ihop de konjugerade rötterna z_1 och z_2 : $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2 = z^2 - (-1)z + 1 = z^2 + z + 1$

Svar: $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$

☰ Exempel: Faktorisera $z^4 + 4$

Hitta rötterna till $z^4 = -4$:

Polär form: $-4 = 4e^{i\pi}$

Fjärderötterna: $z_k = \sqrt[4]{4} \cdot e^{i(\pi+2\pi k)/4} = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi(1+2k)/4}$

- $k = 0: z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i$
- $k = 1: z_1 = \sqrt{2}e^{i3\pi/4} = -1 + i$
- $k = 2: z_2 = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = -1 - i$
- $k = 3: z_3 = \sqrt{2}e^{i7\pi/4} = 1 - i$

Faktorisering över R:

Par 1: $z_0 = 1 + i$ och $z_3 = 1 - i$ (konjugerade) $(z - (1 + i))(z - (1 - i)) = z^2 - 2z + 2$

Par 2: $z_1 = -1 + i$ och $z_2 = -1 - i$ (konjugerade) $(z - (-1 + i))(z - (-1 - i)) = z^2 + 2z + 2$

Svar: $z^4 + 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)$

Del VII: Geometriska mängder

Cirklar

Definition: Cirkel i det komplexa planet

En **cirkel** med centrum z_0 och radie r beskrivs av: $|z - z_0| = r$

Inre (öppen skiva): $|z - z_0| < r$

Yttre: $|z - z_0| > r$

Sluten skiva: $|z - z_0| \leq r$

Exempel: Beskriv mängden $|z - 2 + 3i| = 5$

Skriv om: $|z - (2 - 3i)| = 5$

Detta är en **cirkel** med:

- Centrum: $z_0 = 2 - 3i$, dvs. punkten $(2, -3)$
- Radie: $r = 5$

Linjer

Mängd: Linje som medelortslinje

Mängden av alla punkter med **samma avstånd** till två givna punkter z_1 och z_2 är en **linje** (medellnormallinjen): $|z - z_1| = |z - z_2|$

Mängd: Linje på parameterform

En linje genom z_1 och z_2 ges parametriskt av: $z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in \mathbb{R}$

Eller ekvivalent: $z = (1 - t)z_1 + tz_2$

📘 Mängd: Linje på allmän form

En linje kan också skrivas: $\operatorname{Re}(\bar{a}z) = c$

där $a \neq 0$ är ett komplext tal (normalriktningen) och c är en reell konstant.

Halvplan

📘 Mängd: Halvplan

Olikheten $|z - z_1| < |z - z_2|$ beskriver det **halvplan** som innehåller punkter närmare z_1 än z_2 .

Randen är linjen $|z - z_1| = |z - z_2|$.

Cirkelskivor och ringar

🔗 Sammansatta mängder

Mängd	Beskrivning
$r_1 < \ z - z_0\ < r_2$	Öppen ring (annulus)
$r_1 \leq \ z - z_0\ \leq r_2$	Sluten ring
$\ z - z_0\ < r$ och $\ z - w_0\ < s$	Snittet av två skivor

📌 Exempel: Beskriv mängden $1 < |z - i| \leq 3$

- Centrum: $z_0 = i$, dvs. punkten $(0, 1)$
- Inre radie: 1 (exkluderad, öppen rand inåt)
- Yttre radie: 3 (inkluderad, sluten rand utåt)

Detta är en **halvöppen ring** centrerad kring i .

Del VIII: Sammanfattning och formelblad

Grundläggande formler

Formelsamling: Komplexa tal

Definition: $z = a + bi$ där $i^2 = -1$

Konjugat: $\bar{z} = a - bi$

Belopp: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Polär form: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$

Eulers formel: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

de Moivres formel: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

n:te rötter: $w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\theta+2\pi k)/n}, k = 0, 1, \dots, n-1$

Räkneregler

Formelsamling: Räkneoperationer

Addition: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Multiplikation (rekt.): $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Multiplikation (polär): $r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

Division: $\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$

Division (polär): $\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

Viktiga egenskaper

Formelsamling: Egenskaper

Belopp:

- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (triangelolikheten)
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Konjugat:

- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$

Argument:

- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
- $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$
- $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$

Standardvinklar

Tabell: Vanliga komplexa tal i polär form

z	$\ z\ $	$\arg(z)$
1	1	0
i	1	$\frac{\pi}{2}$
-1	1	π
$-i$	1	$-\frac{\pi}{2}$
$1 + i$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$1 - i$	$\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
$-1 + i$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$

z	$\ z\ $	$\arg(z)$
$-1 - i$	$\sqrt{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	1	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	1	$\frac{\pi}{6}$

⚠ Vanliga misstag att undvika

1. **Glömmer $i^2 = -1$** vid multiplikation
2. **Fel tecken i konjugatet** — bara imaginärdelen byter tecken
3. **Glömmer alla n rötter** — det finns alltid exakt n stycken n :te rötter
4. **Fel kvadrant vid argument** — kontrollera alltid tecken på a och b
5. **Blandar ihop belopp och argument** — belopp är alltid ≥ 0
6. **Glömmer att argumentet är flertydigt** — lägg till $2\pi k$ vid behov
7. **Division utan konjugat** — förläng alltid med nämnarens konjugat

Polär form för komplexa tal

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #komplexa-tal

Kurs: M0066M Förkunskaper: Komplexa tal, Trigonometri

Ett komplext tal $z = a + bi$ kan skrivas i **polär form**

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

där

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arg z.$$

Räkner regler

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

De Moivres formel

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Läsning

- [8.5 Polar Coordinates](#)

Se även

- [Komplexa tal](#)
- [De Moivres och Eulers formler](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Complex numbers explained](#)

De Moivres och Eulers formler

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #komplexa-tal

Kurs: M0066M **Förkunskaper:** Komplexa tal, Polär form för komplexa tal

Eulers formel

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Specialfall ($\theta = \pi$): $e^{i\pi} + 1 = 0$.

De Moivres formel

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Används för att härleda flerdubbla vinklar och för att lösa $z^n = w$.

N:te rötter

$$z^n = re^{i\theta} \Rightarrow z = r^{1/n} e^{i(\theta+2\pi k)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Läsning

- 3.7 Second-Order Linear DEs with Constant Coefficients

Se även

- Polär form för komplexa tal
- Komplexa tal

Resurser

- [3Blue1Brown: \$e^{i\pi}\$ in 3.14 minutes](#)

Differentialekvationer

19 okt. 2026, 46 min läsning

UTKAST

#envariabelanalys #differentialekvation

Inledning

Det finns **ordinära differentialekvationer** (ODE) och **partiella differentialekvationer** (PDE). I kursen M0066M behandlas endast ODE eftersom partiella har fler variabler, och detta är en envariabelkurs.

En ODE är en ekvation som innehåller en okänd funktion och derivator av denna funktion. Ett exempel från boken: $xy'''(x) - 3\sqrt{xy''}(x) + y'(x) + (\ln x)y(x) = 5e^{2x}$

Vad är en linjär ODE?

En differentialekvation är **linjär** om den okända funktionen y och alla dess derivator endast förekommer i första potensen och inte multipliceras med varandra.

Formellt: En ODE är linjär om den kan skrivas på formen: $g_n(x)y^{(n)} + g_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + g_1(x)y' + g_0(x)y = f(x)$

Exempel på linjära ODE:

- $y' + 2y = e^x$
- $y'' - 3y' + 2y = \sin x$
- $x^2y''' + xy' - y = 0$

Exempel på icke-linjära ODE:

- $y' = y^2$ (kvadratisk i y)
- $yy' = x$ (produkt av y och y')
- $y'' + \sin(y) = 0$ (icke-linjär funktion av y)

Vad är en homogen ODE?

En linjär ODE är **homogen** om högerledet $f(x) = 0$: $g_n(x)y^{(n)} + g_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + g_1(x)y' + g_0(x)y = 0$

Om $f(x) \neq 0$ kallas ekvationen **inhomogen** (eller icke-homogen).

Exempel:

- $y'' + 4y = 0$ är homogen
- $y'' + 4y = \cos x$ är inhomogen

Viktig observation: $y = 0$ är alltid en lösning till en homogen linjär ODE (den triviala lösningen).

Ordning och grad

Ordningen av en ODE är den högsta derivatan som förekommer.

Ekvation	Ordning
$y' + y = x$	1
$y'' + 3y' - y = 0$	2
$y''' + y = e^x$	3

Graden är exponenten på den högsta derivatan (efter att ekvationen skrivits som ett polynom i derivatorna).

Del I: Första ordningens ODE

Separerbara differentialekvationer

Definition: Separabel differentialekvation

En differentialekvation av typen $g(y) \cdot y' = f(x)$ kallas **separabel**.

Ekvationen kan också skrivas som $g(y), dy = f(x), dx$ efter "separation av variabler".

SATS: Lösning av separerbara differentialekvationer

Antag att $g(y)$ och $f(x)$ är kontinuerliga med primitiva funktioner $G(y)$ respektive $F(x)$ i intervall I_g respektive I_f .

Lösningarna till differentialekvationen $g(y)y' = f(x), x \in I \subset I_f$, är de på I deriverbara lösningarna till: $G(y) = F(x) + C$

OBS: $G(y) = F(x) + C$ ger lösningen på implicit form. Om det går ska man lösa ut y och svara på explicit form $y = h(x)$.

Receptbok: Separerbara ODE

Steg 1: Skriv ekvationen på formen $g(y) \cdot y' = f(x)$ eller $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$

Steg 2: Separera variablerna: $g(y), dy = f(x), dx$

Steg 3: Integrera båda sidor: $\int g(y), dy = \int f(x), dx$

Steg 4: Lös ut y om möjligt (explicit form), annars lämna på implicit form

Steg 5: Glöm inte konstanten $+C$!

≡ **Exempel:** $y' = xy$

Steg 1: Skriv om: $\frac{dy}{dx} = xy \implies \frac{1}{y}, dy = x, dx$

Steg 2: Integrera: $\int \frac{1}{y}, dy = \int x, dx$

Steg 3: $\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C$

Steg 4: Lös ut y : $|y| = e^{x^2/2+C} = e^C \cdot e^{x^2/2}$

Svar: $y = Ae^{x^2/2}$ där $A = \pm e^C$ (eller $A = 0$ för triviallösningen)

≡ **Exempel:** $e^x y' = 1 + y^2$

Steg 1: Separera: $\frac{dy}{1+y^2} = e^{-x}, dx$

Steg 2: Integrera: $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^{-x}, dx$

Steg 3: $\arctan(y) = -e^{-x} + C$

Svar: $y = \tan(C - e^{-x})$

≡ **Exempel:** $y' = \frac{x}{y}, y(0) = 2$

Steg 1: Separera: $y, dy = x, dx$

Steg 2: Integrera: $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$

Steg 3: Förenkla: $y^2 = x^2 + 2C$

Steg 4: Använd begynnelsevillkor: $y(0) = 2 \implies 4 = 0 + 2C \implies C = 2$

Svar: $y = \sqrt{x^2 + 4}$ (positivt eftersom $y(0) = 2 > 0$)

≡ **Exempel:** $y' = y^2 \sin x$

Steg 1: Separera: $\frac{dy}{y^2} = \sin x, dx$

Steg 2: Integrera: $\int y^{-2}, dy = \int \sin x, dx$

Steg 3: $-\frac{1}{y} = -\cos x + C$

Svar: $y = \frac{1}{\cos x - C}$

OBS: Glöm inte triviallösningen $y = 0$!

SATS: Omformning till separabel

En differentialekvation av typen $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{px+qy+r}\right)$ där a, b, c, p, q, r är givna konstanter, kan omformas till en separabel differentialekvation genom lämplig **substitution**.

Vanliga misstag med separerbara ODE

- **Glömmer triviallösningen:** Om du delar med y (eller $g(y)$), kontrollera alltid om $y = 0$ är en lösning!
- **Glömmer absolutbeloppet:** $\int \frac{1}{y} dy = \ln |y| + C$, inte $\ln y + C$
- **Glömmer $\pm$ vid roten:** $y^2 = k \implies y = \pm\sqrt{k}$

Homogena differentialekvationer (substitution $y = vx$)

Definition: Homogen differentialekvation (av första ordningen)

En differentialekvation är **homogen** (i denna mening) om den kan skrivas på formen: $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$

Det vill säga, högerledet beror endast på kvoten $\frac{y}{x}$, inte på x och y separat.

Exempel på homogena ODE:

- $y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ (kan skrivas som $y' = v + v^2$ där $v = \frac{y}{x}$)
- $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$ (kan skrivas som $y' = \frac{1+v^2}{v}$)
- $y' = \frac{x+y}{x-y}$ (kan skrivas som $y' = \frac{1+v}{1-v}$)

Exempel på icke-homogena ODE:

- $y' = x + \frac{y}{x}$ (termen x kan inte skrivas som funktion av $\frac{y}{x}$)
- $y' = y^2 + 1$ (beror inte på kvoten $\frac{y}{x}$)

⚠ OBS: Två betydelser av "homogen"

Termen "homogen" har olika betydelser beroende på kontext:

1. **Här:** $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ – högerledet är en funktion av $\frac{y}{x}$
2. **Linjära ODE:** $y' + g(x)y = 0$ – högerledet är noll

Dessa är olika begrepp! Sammanhanget avgör vilken definition som avses.

🔗 Receptbok: Homogena ODE med substitution $y = vx$

Steg 1: Verifiera att ekvationen är homogen

Kontrollera att y' kan skrivas som $F\left(\frac{y}{x}\right)$.

Steg 2: Substituera $y = vx$ där $v = v(x)$

Steg 3: Beräkna y' med produktregeln $y' = v + xv'$

Steg 4: Sätt in i ekvationen $v + xv' = F(v)$

Steg 5: Lös för v' och separera variablerna $xv' = F(v) - v \Rightarrow \frac{dv}{F(v)-v} = \frac{dx}{x}$

Steg 6: Integrera båda sidor

Steg 7: Återsubstituera $v = \frac{y}{x}$ för att få svaret i y och x

⚠ Glöm inte!

- Kontrollera om $F(v) - v = 0$ har lösningar — dessa ger konstanta lösningar $v = k$, dvs. $y = kx$
- Lösningen gäller vanligtvis för $x > 0$ eller $x < 0$ (inte $x = 0$)

✓ Härlledning: Varför fungerar substitutionen?

Problemet: En homogen ODE $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ är i allmänhet inte separabel — vi kan inte direkt separera x och y .

Idén: Eftersom högerledet endast beror på kvoten $\frac{y}{x}$, inför vi denna kvot som ny variabel: $v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = vx$

Derivera $y = vx$ med produktregeln:

Eftersom $v = v(x)$ är en funktion av x : $y' = \frac{d}{dx}(v \cdot x) = \frac{dv}{dx} \cdot x + v \cdot 1 = xv' + v$

Sätt in i originalekvationen:

Ekvationen $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ blir: $v + xv' = F(v)$

Lös för xv' : $xv' = F(v) - v$

Separera variablerna: $\frac{dv}{F(v)-v} = \frac{dx}{x}$

Nu har vi en **separabel ekvation** i v och x ! Substitutionen har alltså omvandlat en icke-separabel ekvation till en separabel.

Sammanfattning: Substitutionen $y = vx$ utnyttjar strukturen hos homogena ekvationer och reducerar dem till separerbara ekvationer.

≡ Exempel: $y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$

Steg 1: Verifiera att ekvationen är homogen

$$y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Med $v = \frac{y}{x}$ blir högerledet $v + v^2$. ✓ Homogen!

Steg 2: Substituera $y = vx$

Steg 3: Beräkna $y' = v + xv'$

Steg 4: Sätt in i ekvationen $v + xv' = v + v^2$

Steg 5: Förenkla och separera $xv' = v^2 \frac{dx}{v^2} = \frac{dx}{x}$

Steg 6: Integrera $\int v^{-2} dv = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{v} = \ln |x| + C$

Lös ut v : $v = -\frac{1}{\ln |x| + C}$

Steg 7: Återsubstituera $v = \frac{y}{x} \frac{y}{x} = -\frac{1}{\ln |x| + C}$

Svar: $y = -\frac{x}{\ln |x| + C}$

≡ **Exempel:** $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}, x > 0$

Steg 1: Verifiera att ekvationen är homogen

$$y' = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Med $v = \frac{y}{x}$ får vi $\frac{x}{y} = \frac{1}{v}$, så: $y' = \frac{1}{v} + v = \frac{1+v^2}{v}$

Högerledet beror endast på v . ✓ Homogen!

Steg 2–3: Substituera och derivera $y = vx \implies y' = v + xv'$

Steg 4: Sätt in $v + xv' = \frac{1+v^2}{v}$

Steg 5: Förenkla och separera $xv' = \frac{1+v^2}{v} - v = \frac{1+v^2-v^2}{v} = \frac{1}{v}$

$$v \, dv = \frac{dx}{x}$$

Steg 6: Integrera $\int v \, dv = \int \frac{dx}{x} \frac{v^2}{2} = \ln x + C$

(Vi kan skippa absolutbeloppet eftersom $x > 0$)

Steg 7: Återsubstituera $\frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln x + C \quad y^2 = 2x^2(\ln x + C)$

Svar: $y = \pm x \sqrt{2 \ln x + C_1}$

där $C_1 = 2C$

≡ **Exempel:** $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}, x > 0$

Steg 1: Skriv om och verifiera

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

Nu är $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \sqrt{1 + v^2}$ för $x > 0$.

Så: $y' = v + \sqrt{1 + v^2}$. ✓ Homogen!

Steg 2–4: Substituera och sätt in $v + xv' = v + \sqrt{1 + v^2}$

Steg 5: Förenkla och separera $xv' = \sqrt{1 + v^2} \quad \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{dx}{x}$

Steg 6: Integrera

Vänsterledet är en standardintegral: $\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \operatorname{arsinh}(v) = \ln(v + \sqrt{1 + v^2})$

$$\ln(v + \sqrt{1 + v^2}) = \ln x + C$$

Förenkla: $v + \sqrt{1 + v^2} = e^C \cdot x = Ax$

där $A = e^C > 0$.

Steg 7: Återsubstituera $v = \frac{y}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Ax y + \sqrt{x^2 + y^2} = Ax^2$

Svar (implicit form): $\sqrt{x^2 + y^2} = Ax^2 - y$

≡ **Exempel med begynnelsevillkor:** $y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}, y(1) = 2$

Steg 1: Verifiera $y' = \frac{y^2 - x^2}{xy} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = v - \frac{1}{v} = \frac{v^2 - 1}{v}$

✓ Homogen!

Steg 2–4: Substituera och sätt in $v + xv' = \frac{v^2 - 1}{v}$

Steg 5: Förenkla och separera $xv' = \frac{v^2 - 1}{v} - v = \frac{v^2 - 1 - v^2}{v} = -\frac{1}{v} \Rightarrow v dv = -\frac{dx}{x}$

Steg 6: Integrera $-\frac{v^2}{2} = \ln |x| + C \Rightarrow v^2 = -2 \ln |x| + C_1$

Steg 7: Återsubstituera $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = C_1 - 2 \ln |x| \Rightarrow y^2 = x^2(C_1 - 2 \ln |x|)$

Bestäm konstanten med $y(1) = 2: 4 = 1 \cdot (C_1 - 2 \ln 1) = C_1 - 0 = C_1$

Svar: $y = x\sqrt{4 - 2 \ln x}$

(Positivt tecken eftersom $y(1) = 2 > 0$)

⚠ Vanliga misstag

- **Glömmer produktregeln:** $y = vx \implies y' = v + xv'$, inte bara $y' = v'$
- **Glömmer återsubstitution:** Svaret ska vara i x och y , inte i v
- **Missar konstanta lösningar:** Om $F(v) - v = 0$ för något $v = k$, är $y = kx$ en lösning
- **Definitionsområde:** Lösningar innehåller ofta $\ln |x|$ och gäller inte för $x = 0$

Linjära första ordningens ODE

Definition: Linjär första ordningens ODE

En linjär differentialekvation av första ordningen har formen: $y' + g(x)y = f(x)$ där $g(x)$ är koefficienten framför y och $f(x)$ är högerledet.

- Om $f(x) = 0$: ekvationen är **homogen**
- Om $f(x) \neq 0$: ekvationen är **inhomogen**

Receptbok: Linjära 1:a ordningens ODE (integrerande faktor)

Steg 1: Skriv ekvationen på standardform $y' + g(x)y = f(x)$

Steg 2: Beräkna **primitiv funktion** $G(x) = \int g(x), dx$

Steg 3: Bestäm integrerande faktor $\mu(x) = e^{G(x)}$

Steg 4: Multiplicera ekvationen med $\mu(x)$: $\frac{d}{dx}[y \cdot \mu(x)] = f(x) \cdot \mu(x)$

Steg 5: Integrera båda sidor: $y \cdot \mu(x) = \int f(x) \cdot \mu(x), dx$

Steg 6: Lös ut $y = \frac{1}{\mu(x)} \int f(x) \cdot \mu(x), dx$

 **Exempel:** $y' + 3xy = x^3$

Steg 1: Redan på standardform. $g(x) = 3x, f(x) = x^3$

Steg 2: $G(x) = \int 3x, dx = \frac{3x^2}{2}$

Steg 3: $\mu(x) = e^{3x^2/2}$

Steg 4: $\frac{d}{dx}[y \cdot e^{3x^2/2}] = x^3 \cdot e^{3x^2/2}$

Steg 5: Integrera (substitution $u = \frac{3x^2}{2}, du = 3x, dx$): $y \cdot e^{3x^2/2} = \int x^3 e^{3x^2/2}, dx$

Skriv $x^3 = x \cdot x^2$ och använd x , $dx = \frac{1}{3}du$, $x^2 = \frac{2u}{3} := \frac{2}{9} \int u \cdot e^u$, $du = \frac{2}{9}(u-1)e^u + C$

Steg 6: $y = \frac{2}{9} \left(\frac{3x^2}{2} - 1 \right) + Ce^{-3x^2/2}$

Svar: $y = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{9} + Ce^{-3x^2/2}$

≡ **Exempel:** $xy' - y = x^2 \cos x$, $x > 0$

Steg 1: Dela med x : $y' - \frac{1}{x}y = x \cos x$

$g(x) = -\frac{1}{x}$, $f(x) = x \cos x$

Steg 2: $G(x) = \int -\frac{1}{x}, dx = -\ln x$

Steg 3: $\mu(x) = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

Steg 4: $\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) = \cos x$

Steg 5: Integrera: $\frac{y}{x} = \sin x + C$

Svar: $y = x \sin x + Cx$

≡ **Exempel:** $y' + 2y = e^{-x}$, $y(0) = 3$

Steg 1: $g(x) = 2$, $f(x) = e^{-x}$

Steg 2: $G(x) = 2x$

Steg 3: $\mu(x) = e^{2x}$

Steg 4: $\frac{d}{dx}[ye^{2x}] = e^{-x} \cdot e^{2x} = e^x$

Steg 5: $ye^{2x} = e^x + C$

Steg 6: $y = e^{-x} + Ce^{-2x}$

Begynnelsevillkor: $y(0) = 1 + C = 3 \implies C = 2$

Svar: $y = e^{-x} + 2e^{-2x}$

≡ **Exempel:** $y' + y \tan x = \sec x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Steg 1: $g(x) = \tan x, f(x) = \sec x$

Steg 2: $G(x) = \int \tan x, dx = -\ln |\cos x| = \ln |\sec x|$

Steg 3: $\mu(x) = e^{\ln |\sec x|} = \sec x$

Steg 4: $\frac{d}{dx}[y \sec x] = \sec^2 x$

Steg 5: $y \sec x = \tan x + C$

Svar: $y = \sin x + C \cos x$

⚠ Vanliga misstag

- Glömmer att dividera hela ekvationen för att få standardform
- Missar minustecken i $g(x)$
- Glömmer integrationskonstanten C
- Beräknar $\mu(x)$ fel (det ska vara $e^{\int g(x), dx}$, inte $e^{g(x)}$)

Bernoullis ekvation

i Definition: Bernoullis ekvation

En **Bernoulli-ekvation** har formen: $y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \notin 0, 1$

Detta är icke-linjärt i y , men kan linjäriseras genom variabelbyte.

Observera: För $n = 0$ eller $n = 1$ är ekvationen redan linjär.

Receptbok: Bernoullis ekvation

Steg 1: Identifiera $P(x)$, $Q(x)$ och n

Steg 2: Substituera $v = y^{1-n}$

Steg 3: Derivera: $v' = (1-n)y^{-n}y'$

Steg 4: Den linjära ekvationen i v blir: $v' + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$

Steg 5: Lös med integrerande faktor

Steg 6: Återsubstituera $y = v^{1/(1-n)}$

≡ **Exempel:** $y' + y = xy^3$

Steg 1: $P(x) = 1$, $Q(x) = x$, $n = 3$

Steg 2: $v = y^{1-3} = y^{-2}$

Steg 3: $v' = -2y^{-3}y'$

Steg 4: Multiplicera ursprungliga ekvationen med $-2y^{-3}$: $-2y^{-3}y' - 2y^{-2} = -2xy^0 v' - 2v = -2x$

Steg 5: Lös linjära ODE:n: $g(x) = -2$, $\mu(x) = e^{-2x}$

$$\frac{d}{dx}[ve^{-2x}] = -2xe^{-2x}$$

Partiell integration ger: $ve^{-2x} = xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + C$

$$v = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

Steg 6: $y^{-2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$

Svar: $y = \pm \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}}}$

≡ **Exempel:** $y' - \frac{y}{x} = xy^2, x > 0$

Steg 1: $P(x) = -\frac{1}{x}, Q(x) = x, n = 2$

Steg 2: $v = y^{1-2} = y^{-1}$

Steg 3: $v' = -y^{-2}y'$

Steg 4: Multiplicera med $-y^{-2}$: $v' + \frac{1}{x}v = -x$

Steg 5: $\mu(x) = e^{\ln x} = x$

$$\frac{d}{dx}[vx] = -x^2$$

$$vx = -\frac{x^3}{3} + C$$

$$v = -\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$$

Steg 6: $\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$

$$\text{Svar: } y = \frac{3x}{C \cdot 3 - x^3} = \frac{3x}{K - x^3}$$

Riktningsfält och numeriska metoder

Riktningsfält

Ett **riktningsfält** (eller lutningsfält) är en grafisk representation av en första ordningens ODE $y' = f(x, y)$.

I varje punkt (x, y) i planet ritas man ett kort linjesegment med lutning $f(x, y)$. Detta ger en visuell bild av hur lösningskurvorna beter sig utan att man behöver lösa ekvationen analytiskt.

Riktningsfältet visar:

- Hur lösningar “flyter” genom planet
- Jämviktslösningar (där $y' = 0$)
- Asymptotiskt beteende
- Stabilitet hos jämviktpunkter

Isoklinmetoden

En **isoklin** är en kurva där lutningen är konstant.

För ODE:n $y' = f(x, y)$ är isoklinen för lutning k kurvan: $f(x, y) = k$

Metod:

1. Välj några värden på k (t.ex. $k = -2, -1, 0, 1, 2$)
2. Rita kurvan $f(x, y) = k$ för varje k
3. Rita korta linjesegment med lutning k längs varje isoklin
4. Skissa lösningskurvor som följer lutningarna

Receptbok: Eulers metod

Eulers metod approximerar lösningar till begynnelsevärdesproblem $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$.

Algoritm: Välj steglängd $h > 0$, sedan: $x_{n+1} = x_n + h$, $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$

Geometrisk tolkning: Man följer tangentlinjen från (x_n, y_n) ett steg h framåt.

Fel:

- Lokalt trunkeringsfel: $O(h^2)$
- Globalt fel: $O(h)$

Mindre steglängd ger bättre approximation men kräver fler beräkningar.

≡ **Exempel:** $y' = x + y, y(0) = 1$, approximera $y(0.3)$ med $h = 0.1$

Steg 0: $(x_0, y_0) = (0, 1), f(x, y) = x + y$

Steg 1: $f(0, 1) = 0 + 1 = 1$

- $x_1 = 0 + 0.1 = 0.1$
- $y_1 = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$

Steg 2: $f(0.1, 1.1) = 0.1 + 1.1 = 1.2$

- $x_2 = 0.1 + 0.1 = 0.2$
- $y_2 = 1.1 + 0.1 \cdot 1.2 = 1.22$

Steg 3: $f(0.2, 1.22) = 0.2 + 1.22 = 1.42$

- $x_3 = 0.2 + 0.1 = 0.3$
- $y_3 = 1.22 + 0.1 \cdot 1.42 = 1.362$

Svar: $y(0.3) \approx 1.362$

(Exakt lösning: $y = 2e^x - x - 1, y(0.3) \approx 1.399$)

≡ **Exempel:** $y' = y, y(0) = 1$, approximera $y(1)$ med $h = 0.5$

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n) = y_n$
0	0	1	1
1	0.5	$1 + 0.5 \cdot 1 = 1.5$	1.5
2	1.0	$1.5 + 0.5 \cdot 1.5 = 2.25$	—

Svar: $y(1) \approx 2.25$

(Exakt: $y = e^x, y(1) = e \approx 2.718$. Fel $\approx 17\%$)

 Förbättrade metoder (överkurs)

Heuns metod (förbättrad Euler): $k_1 = f(x_n, y_n)$ $k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$ $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$

Runge-Kutta (RK4): Globalt fel $O(h^4)$ — mycket noggrannare.

Del II: Teori för linjära ODE av högre ordning

Grundläggande teori

 Allmän form för linjär ODE av ordning n

En **linjär ODE av ordning n** kan skrivas: $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$

eller kompakt: $\sum_{k=0}^n a_k(x)y^{(k)} = f(x)$

Om $f(x) = 0$: **homogen** Om $f(x) \neq 0$: **inhomogen**

SATS: Superpositionsprincipen

För en **homogen** linjär ODE gäller:

Om y_1 och y_2 är lösningar, då är även $c_1y_1 + c_2y_2$ en lösning för alla konstanter $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Generaliserat: Om $y_1, y_2, \dots, y_k$ är lösningar, så är även varje **linjärkombination** $c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ky_k$ en lösning.

 **OBS! Superpositionsprincipen gäller endast för homogena linjära ODE!**

SATS: Linjärt oberoende och beroende

Linjärt beroende: Funktionerna $y_1, \dots, y_n$ är linjärt beroende på ett intervall I om det finns konstanter $c_1, \dots, c_n$ (inte alla noll) sådana att: $c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n = 0$ för alla $x \in I$

Linjärt oberoende: Om ovanstående endast kan uppfyllas då $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Intuition:

- Linjärt beroende: En funktion kan skrivas som kombination av de andra
- Linjärt oberoende: Ingen funktion kan "byggas" av de övriga

Förenklad test (för två funktioner): $\frac{y_2}{y_1} = \text{konstant} \implies \text{linjärt beroende}$
 $\frac{y_2}{y_1} \neq \text{konstant} \implies \text{linjärt oberoende}$

SATS: Dimension av Lösningsrummet

En linjär homogen ODE av ordning n (där ledande koefficienten $a_n(x) \neq 0$) har exakt **n stycken linjärt oberoende lösningar** $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Den **allmänna lösningen** är: $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$

Mängden $y_1, y_2, \dots, y_n$ kallas en **fundamental lösningmängd** (eller bas för Lösningsrummet).

SATS: Struktur för inhomogen ODE

Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen $a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y = f(x)$ är $y = y_h + y_p$ där:

- y_h = allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation
- y_p = en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen

Wronskianen (ej obligatorisk i M0066M)

Wronskianen är en determinant som testar linjärt oberoende: $W(y_1, \dots, y_n) =$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y_1' & y_2' & \dots & y_n' & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Sats: Om $W \neq 0$ för något x i intervallet, är funktionerna linjärt oberoende.

Del III: Andra ordningens ODE

Homogena ODE med konstanta koefficienter

Vi löser ODE:n $y'' + ay' + by = 0$ där $a, b \in \mathbb{R}$.

Bakgrund: Diskriminanten

För andragradsekvationen $r^2 + ar + b = 0$ är diskriminanten: $D = a^2 - 4b$

Värde	Rötter
$D > 0$	Två olika reella rötter
$D = 0$	En dubbelrot
$D < 0$	Två komplexa konjugerade rötter

Receptbok: 2:a ordningens homogen ODE med konstanta koefficienter

Steg 1: Skriv ODE:n på formen $y'' + ay' + by = 0$

Steg 2: Ställ upp karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$

Steg 3: Beräkna diskriminanten $D = a^2 - 4b$

Steg 4: Lös för r och välj rätt Lösningsform:

Diskriminant	Rötter	Allmän lösning
$D > 0$	$r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$	$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
$D < 0$	$r = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$
$D = 0$	$r_1 = r_2 = r$	$y = (A + Bx)e^{rx}$

Steg 5: Om begynnelsevillkor ges, använd $y(x_0) = y_0$ och $y'(x_0) = v_0$ för att bestämma A och B .

✓ Härledning: Ansats och karakteristisk ekvation

Vi ansätter $y = e^{rx}$ där r är en konstant att bestämma.

Motivation: Exponentialfunktioner är "egenfunktioner" för derivering — de behåller sin form.

Derivering:

- $y' = re^{rx}$
- $y'' = r^2 e^{rx}$

Insättning i ODE:n $y'' + ay' + by = 0$: $r^2 e^{rx} + ar \cdot e^{rx} + b \cdot e^{rx} = 0 \Rightarrow e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0$

Eftersom $e^{rx} \neq 0$ för alla x , måste: $r^2 + ar + b = 0$

Detta kallas den **karakteristiska ekvationen**.

✓ **Härledning: Fall 1 ($D > 0$) – Två olika reella rötter**

Rötterna är: $r_1 = \frac{-a+\sqrt{D}}{2}, r_2 = \frac{-a-\sqrt{D}}{2}$

Partikulärlösningar: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$

Linjärt oberoende: $\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{r_2 x}}{e^{r_1 x}} = e^{(r_2 - r_1)x}$

Eftersom $r_1 \neq r_2$ är $(r_2 - r_1) \neq 0$, så kvoten är **inte konstant** ✓

Allmän lösning: $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$

✓ **Härledning: Fall 2 ($D < 0$) – Komplexa konjugerade rötter**

Rötterna blir: $r = \alpha \pm i\beta$ där

- $\alpha = -\frac{a}{2}$ (realdelen)
- $\beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2} = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$ (imaginärdelen)

Formella lösningar: $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$

Använd **Eulers formel**: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Reella lösningar genom linjärkombinationer: $\tilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \tilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Linjärt oberoende: $\frac{\tilde{y}_2}{\tilde{y}_1} = \tan(\beta x) \neq \text{konst}$ ✓

Allmän lösning: $y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$

✓ **Härledning: Fall 3 ($D = 0$) – Dubbelrot**

Dubbelrot: $r = -\frac{a}{2}$

Problem: Vi får bara **en** lösning $y_1 = e^{rx}$, men behöver **två** linjärt oberoende!

Ansats för andra lösningen: Prova $y_2 = xe^{rx}$

Verifiering: Med $y_2 = xe^{rx}$:

- $y_2' = e^{rx} + rxe^{rx} = (1 + rx)e^{rx}$
- $y_2'' = r(1 + rx)e^{rx} + re^{rx} = (2r + r^2x)e^{rx}$

Insättning i $y'' + ay' + by = 0$: $e^{rx}[(2r + r^2x) + a(1 + rx) + bx] = e^{rx}[(2r + a) + x(r^2 + ar + b)] = 0$

- Eftersom r är rot: $r^2 + ar + b = 0$ ✓
- Eftersom $D = 0$: $r = -\frac{a}{2} \implies 2r + a = 0$ ✓

Linjärt oberoende: $\frac{y_2}{y_1} = x \ncong \text{konst}$ ✓

Allmän lösning: $y = (A + Bx)e^{rx}$

Fysikalisk tolkning (komplexa rötter)

Lösningen $y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ beskriver svängningar:

- $\alpha < 0$: **Dämpade svängningar** — amplituden avtar exponentiellt
- $\alpha = 0$: **Harmoniska svängningar** — konstant amplitud, ren oscillation
- $\alpha > 0$: **Växande svängningar** — instabilt system

Räkneexempel: Homogena ODE

Exempel: $y'' - y' - 2y = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^2 - r - 2 = 0$

Diskriminant: $D = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9 > 0$

Rötter: $(r - 2)(r + 1) = 0 \implies r_1 = 2, r_2 = -1$

Svar: $y = Ae^{2x} + Be^{-x}$

≡ **Exempel:** $y'' + 4y' + 5y = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^2 + 4r + 5 = 0$

Diskriminant: $D = 16 - 20 = -4 < 0$

Rötter: $r = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$

$\alpha = -2, \beta = 1$

Svar: $y = e^{-2x}(A \cos x + B \sin x)$

≡ **Exempel:** $y'' + 4y = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^2 + 4 = 0$

Diskriminant: $D = 0 - 16 = -16 < 0$

Rötter: $r = \pm 2i$, alltså $\alpha = 0, \beta = 2$

Svar: $y = A \cos 2x + B \sin 2x$

≡ **Exempel:** $y'' + 6y' + 9y = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^2 + 6r + 9 = 0$

Diskriminant: $D = 36 - 36 = 0$

Dubbelrot: $(r + 3)^2 = 0 \implies r = -3$

Svar: $y = (A + Bx)e^{-3x}$

≡ **Exempel med IVP:** $y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 1$

Från ovan: $y = (A + Bx)e^{-3x}$

Begynneelsevillkor 1: $y(0) = A = -1$

Derivera: $y' = Be^{-3x} - 3(A + Bx)e^{-3x} = (B - 3A - 3Bx)e^{-3x}$

Begynneelsevillkor 2: $y'(0) = B - 3A = B - 3(-1) = B + 3 = 1$

$$\Rightarrow B = -2$$

Svar: $y = (-1 - 2x)e^{-3x}$

≡ **Exempel med IVP:** $y'' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -2$

Från ovan: $y = A \cos 2x + B \sin 2x$

Begynneelsevillkor 1: $y(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A = 1$

Derivera: $y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$

Begynneelsevillkor 2: $y'(0) = 2B = -2 \Rightarrow B = -1$

Svar: $y = \cos 2x - \sin 2x$

Inhomogena ODE med konstanta koefficienter

Vi löser ekvationer av typen: $y'' + ay' + by = f(x)$ där $f(x) \neq 0$.

SATS: Allmän lösning till inhomogen ODE

Den allmänna lösningen är: $y = y_h + y_p$ där:

- y_h = allmänna lösningen till $y'' + ay' + by = 0$ (homogena lösningen)
- y_p = en partikulärlösning till hela ekvationen

Två metoder för att hitta y_p :

1. **Obestämda koefficienter** (ansatsmetoden)
2. **Variation av parametrar**

Metod 1: Obestämda koefficienter**i När fungerar ansatsmetoden?**

Metoden fungerar när $f(x)$ är en **linjärkombination** av:

- Polynom: x^n
- Exponentialer: e^{kx}
- Trigonometriska: $\cos(\omega x)$, $\sin(\omega x)$
- Produkter av ovanstående

Fungerar INTE för: $\tan x$, $\ln x$, $\frac{1}{x}$, $\sec x$, etc.

🔗 Receptbok: Obestämda koefficienter

Steg 1: Lös homogena ekvationen $\rightarrow y_h$

Steg 2: Välj ansats för y_p enligt tabellen:

Högerled $f(x)$	Ansats y_p
k (konstant)	A
kx^n	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0$
$ke^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$
$k \cos(\omega x)$ eller $k \sin(\omega x)$	$A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$
$ke^{\alpha x} \cos(\omega x)$	$e^{\alpha x} (A \cos \omega x + B \sin \omega x)$
$x^n e^{\alpha x}$	$(A_n x^n + \dots + A_0) e^{\alpha x}$

Steg 3: Sätt in ansatsen i ODE:n och bestäm koefficienterna

Steg 4: Allmänna lösningen: $y = y_h + y_p$

 Resonansregeln (KRITISK!)

Om ansatsen (eller del av den) **redan är en lösning till homogena ekvationen**:

- Multiplicera ansatsen med x
- Vid dubbelrot: multiplicera med x^2

Exempel: $y'' - 4y = e^{2x}$ Homogen lösning: $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ Eftersom $e^{2x} \in y_h$: ansätt $y_p = A x e^{2x}$ (ej $A e^{2x}$)

 **Exempel:** $y'' + 3y' + 2y = 10e^{4x}$

Steg 1: Homogena lösningen

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \implies (r + 1)(r + 2) = 0 \implies r = -1, -2$$

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

Steg 2: Ansats

Högerled: $10e^{4x}$. Kontrollera: $4 \notin -1, -2$ (ingen resonans)

Ansätt: $y_p = A e^{4x}$

Steg 3: Sätt in

$$y_p' = 4A e^{4x}, y_p'' = 16A e^{4x}$$

$$16A e^{4x} + 3(4A e^{4x}) + 2(A e^{4x}) = 10e^{4x}$$

$$(16 + 12 + 2)A e^{4x} = 10e^{4x}$$

$$30A = 10 \implies A = \frac{1}{3}$$

Svar: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{4x}$

≡ **Exempel:** $y'' - 4y = e^{2x}$ (**RESONANS!**)

Steg 1: Homogena lösningen

$$r^2 - 4 = 0 \implies r = \pm 2$$

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

Steg 2: Ansats med resonansregel

Högerled: e^{2x} . MEN e^{2x} är redan i y_h !

Ansätt: $y_p = A x e^{2x}$

Steg 3: Sätt in

$$y_p' = A e^{2x} + 2A x e^{2x} = A(1 + 2x)e^{2x}$$

$$y_p'' = 2A(1 + 2x)e^{2x} + 2A e^{2x} = A(4 + 4x)e^{2x}$$

$$y_p'' - 4y_p = A(4 + 4x)e^{2x} - 4A x e^{2x} = 4A e^{2x} = e^{2x}$$

$$A = \frac{1}{4}$$

Svar: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{x}{4} e^{2x}$

≡ **Exempel:** $y'' + 4y = \cos(2x)$ (**RESONANS med trig!**)

Steg 1: Homogena lösningen

$$r^2 + 4 = 0 \implies r = \pm 2i$$

$$y_h = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

Steg 2: Ansats med resonansregel

Högerled: $\cos(2x)$. MEN $\cos(2x)$ är i y_h !

Ansätt: $y_p = x(A \cos(2x) + B \sin(2x))$

Steg 3: Derivera och sätt in

$$y_p' = (A \cos 2x + B \sin 2x) + x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)$$

$$y_p'' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x + (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x)$$

$$= -4A \sin 2x + 4B \cos 2x - 4x(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

$$y_p'' + 4y_p = -4A \sin 2x + 4B \cos 2x = \cos 2x$$

$$\text{Jämför: } -4A = 0, 4B = 1 \implies A = 0, B = \frac{1}{4}$$

$$\text{Svar: } y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{x}{4} \sin(2x)$$

≡ **Exempel:** $y'' + y' - 2y = x^2$

Steg 1: Homogena lösningen

$$r^2 + r - 2 = 0 \implies (r + 2)(r - 1) = 0 \implies r = -2, 1$$

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$$

Steg 2: Ansats

Högerled: x^2 (polynom grad 2). Ingen resonans (exponentialer $\neq$ polynom)

$$\text{Ansätt: } y_p = Ax^2 + Bx + C$$

Steg 3: Sätt in

$$y_p' = 2Ax + B, y_p'' = 2A$$

$$2A + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

$$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) = x^2$$

Jämför koefficienter:

- x^2 : $-2A = 1 \implies A = -\frac{1}{2}$
- x^1 : $2A - 2B = 0 \implies B = A = -\frac{1}{2}$
- x^0 : $2A + B - 2C = 0 \implies C = \frac{2(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})}{2} = -\frac{3}{4}$

Svar: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

≡ **Exempel:** $y'' - 2y' + y = e^x$ (**DUBBELROT + RESONANS!**)

Steg 1: Homogena lösningen

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \implies (r - 1)^2 = 0 \implies r = 1 \text{ (dubbelrot)}$$

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^x$$

Steg 2: Ansats med dubbel resonans

Högerled: e^x . MEN både e^x och xe^x är i y_h !

Multiplitera med x^2 : $y_p = Ax^2 e^x$

Steg 3: Sätt in

$$y_p' = A(2x + x^2)e^x$$

$$y_p'' = A(2 + 4x + x^2)e^x$$

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = A[(2 + 4x + x^2) - 2(2x + x^2) + x^2]e^x = 2Ae^x = e^x$$

$$A = \frac{1}{2}$$

Svar: $y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x$

Metod 2: Variation av parametrar

När används variation av parametrar?

Metoden fungerar för **alla** kontinuerliga $f(x)$, inte bara speciella typer.

Använd när:

- Högerledet inte passar ansatsmetoden ($\tan x$, $\ln x$, $\sec x$, etc.)
- Du vill ha en generell formel
- Ansatsmetoden blir för komplicerad

Receptbok: Variation av parametrar

För $y'' + ay' + by = f(x)$:

Steg 1: Hitta homogena lösningar y_1, y_2

Steg 2: Beräkna Wronskianen: $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$

Steg 3: Partikulärlösningen: $y_p = -y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W}, dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W}, dx$

Eller: $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ där $u_1 = -\int \frac{y_2 f}{W}, dx$, $u_2 = \int \frac{y_1 f}{W}, dx$

Steg 4: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p$

 **Exempel:** $y'' + y = \tan x$

Steg 1: $r^2 + 1 = 0 \implies r = \pm i$

$y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$

Steg 2: $W = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Steg 3:

$$u_1 = -\int \frac{\sin x \cdot \tan x}{1} dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$$

Använd $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$: $u_1 = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = -\int (\sec x - \cos x) dx = -\ln |\sec x + \tan x| + \sin x$

$$u_2 = \int \frac{\cos x \cdot \tan x}{1} dx = \int \sin x dx = -\cos x$$

Steg 4: $y_p = (-\ln |\sec x + \tan x| + \sin x) \cos x + (-\cos x) \sin x = -\cos x \ln |\sec x + \tan x|$

Svar: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln |\sec x + \tan x|$

≡ **Exempel:** $y'' + 4y = \sec(2x)$

Steg 1: $y_1 = \cos(2x), y_2 = \sin(2x)$

Steg 2: $W = \cos(2x) \cdot 2 \cos(2x) - \sin(2x) \cdot (-2 \sin(2x)) = 2$

Steg 3:

$$u_1 = -\int \frac{\sin(2x) \cdot \sec(2x)}{2} dx = -\frac{1}{2} \int \tan(2x) dx = \frac{1}{4} \ln |\cos(2x)|$$

$$u_2 = \int \frac{\cos(2x) \cdot \sec(2x)}{2} dx = \frac{x}{2}$$

Svar: $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) \ln |\cos(2x)| + \frac{x}{2} \sin(2x)$

 Jämförelse av metoderna

Aspekt	Obestämda koeff.	Variation av param.
Fungerar för	Polynom, e^{kx} , trig, produkter	Alla kontinuerliga $f(x)$
Beräkningsbörda	Lättare (algebra)	Tyngre (integration)
Resonans	Manuell hantering	Automatisk
Rekommendation	Använd först	Backup-metod

Reduktion av ordning

När används reduktion av ordning?

Metoden används när:

1. En andra ordningens ODE saknar y explicit (endast y' och y'')
2. Du redan känner en lösning y_1 och vill hitta en andra

Receptbok: Reduktion av ordning (typ 1 – saknar y)

Om ODE:n har formen $F(x, y', y'') = 0$ (ingen y):

Steg 1: Substituera $v = y'$, $v' = y''$

Steg 2: Lös första ordningens ODE i v

Steg 3: Integrera $y' = v$ för att hitta y

≡ Exempel: $xy'' + y' = 3x^2$, $x > 0$

Steg 1: Sätt $v = y'$, $v' = y''$: $xv' + v = 3x^2$

Steg 2: Linjär 1:a ordningens ODE. Dela med x : $v' + \frac{1}{x}v = 3x$

$$\mu(x) = e^{\ln x} = x$$

$$\frac{d}{dx}(xv) = 3x^2$$

$$xv = x^3 + C_1 \implies v = x^2 + \frac{C_1}{x}$$

$$\text{Steg 3: } y = \int v, dx = \frac{x^3}{3} + C_1 \ln x + C_2$$

Receptbok: Reduktion av ordning (typ 2 – känd lösning)

Om du vet att y_1 är en lösning till $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$:

Steg 1: Ansätt $y_2 = v(x) \cdot y_1$

Steg 2: Sätt in och förenkla (termer med v försvinner)

Steg 3: Substituera $w = v'$ för att få 1:a ordningens ODE

Steg 4: Lös för w , integrera för v , få $y_2 = v \cdot y_1$

Eulers differentialekvation (Cauchy-Euler)

Definition: Eulers differentialekvation

Eulers differentialekvation (eller Cauchy-Euler-ekvation) har formen: $x^2y'' + axy' + by = f(x)$

där a, b är konstanter.

Kännetecken: Koefficienten framför $y^{(k)}$ är x^k .

Homogen form: $x^2y'' + axy' + by = 0$

Receptbok: Eulers differentialekvation

Metod 1: Ansats $y = x^r$ (för $x > 0$)

Steg 1: Ansätt $y = x^r$ där r är konstant

Steg 2: Derivera: $y' = rx^{r-1}$, $y'' = r(r-1)x^{r-2}$

Steg 3: Sätt in i $x^2y'' + axy' + by = 0$: $x^2 \cdot r(r-1)x^{r-2} + ax \cdot rx^{r-1} + bx^r = 0$ $x^r[r(r-1) + ar + b] = 0$

Steg 4: Lös den **karakteristiska ekvationen**: $r(r-1) + ar + b = 0 \Leftrightarrow r^2 + (a-1)r + b = 0$

Steg 5: Skriv upp lösningen enligt tabellen:

Fall	Rötter	Allmän lösning
Två olika reella	$r_1 \neq r_2$	$y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$
Dubbelrot	$r_1 = r_2 = r$	$y = (C_1 + C_2 \ln x) x^r$
Komplexa	$r = \alpha \pm i\beta$	$y = x^\alpha (C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x))$

Metod 2: Substitution $t = \ln x$ (transformerar till konstanta koefficienter)

Sätt $x = e^t$, då $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$ och transformera till en ODE med konstanta koefficienter i t .

✓ Härlledning: Dubbelrotsfallet

Vid dubbelrot r får vi bara en lösning $y_1 = x^r$.

Ansats för andra lösningen: $y_2 = v(x) \cdot x^r$

Efter reduktion av ordning visar sig att $v = \ln x$ fungerar.

Alltså: $y_2 = x^r \ln x$

Allmän lösning: $y = (C_1 + C_2 \ln x) x^r$

✓ Härlledning: Komplexa rötter

Med $r = \alpha \pm i\beta$ får vi formellt $y = x^{\alpha \pm i\beta}$.

Använd $x = e^{\ln x}$: $x^{i\beta} = e^{i\beta \ln x} = \cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x)$

Reella lösningar: $y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x)$, $y_2 = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$

≡ **Exempel:** $x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0, x > 0$

Steg 1: Ansätt $y = x^r$

Steg 2-3: Karakteristisk ekvation: $r(r-1) - 2r - 4 = 0 \quad r^2 - 3r - 4 = 0$

Steg 4: $(r-4)(r+1) = 0 \implies r_1 = 4, r_2 = -1$

Svar: $y = C_1 x^4 + C_2 x^{-1}$

≡ **Exempel:** $x^2 y'' + xy' + y = 0, x > 0$

Karakteristisk ekvation: $r(r-1) + r + 1 = 0 \quad r^2 + 1 = 0$

Rötter: $r = \pm i$ (alltså $\alpha = 0, \beta = 1$)

Svar: $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$

≡ **Exempel:** $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0, x > 0$

Karakteristisk ekvation: $r(r-1) - 3r + 4 = 0 \quad r^2 - 4r + 4 = 0 \quad (r-2)^2 = 0 \implies r = 2$ (dubbelrot)

Svar: $y = (C_1 + C_2 \ln x)x^2$

≡ **Exempel:** $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0, x > 0$

Karakteristisk ekvation: $r(r-1) + 3r + 5 = 0 \quad r^2 + 2r + 5 = 0$

Rötter: $r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$

$\alpha = -1, \beta = 2$

Svar: $y = x^{-1}(C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \sin(2 \ln x))$

⚠ OBS: Definitionsområde

Lösningar av formen x^r och $\ln x$ kräver $x > 0$.

För $x < 0$ kan man använda $|x|$ istället, eller substituera $u = -x$.

Del IV: Högre ordningens ODE

ODE av ordning n med konstanta koefficienter

i Allmän form

En linjär homogen ODE av ordning n med konstanta koefficienter: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$

Denna ekvation har exakt n rötter (räknat med multiplicitet) i $\mathbb{C}$.

De fyra fallen för rötter

i SATS: Lösningar från karakteristiska ekvationens rötter

Varje rot (eller rotpar) till den karakteristiska ekvationen ger upphov till linjärt oberoende lösningar enligt följande:

Fall	Rottyp	Antal lösningar	Lösningar
1	Enkel reell rot r_k	1	$e^{r_k x}$
2	Enkelt komplext par $\alpha_k \pm i\beta_k$	2	$e^{\alpha_k x} \cos(\beta_k x), e^{\alpha_k x} \sin(\beta_k x)$

Fall	Rottyp	Antal lösningar	Lösningar
3	Reell rot r_k med multiplicitet m_k	m_k	$e^{r_k x}, x e^{r_k x}, x^2 e^{r_k x}, \dots, x^{m_k-1} e^{r_k x}$
4	Komplext par $\alpha_k \pm i\beta_k$ med mult. m_k	$2m_k$	Se nedan

Fall 4 (komplext par med multiplicitet m_k):

$$e^{\alpha_k x} \cos(\beta_k x), \quad x e^{\alpha_k x} \cos(\beta_k x), \quad \dots, \quad x^{m_k-1} e^{\alpha_k x} \cos(\beta_k x)$$

$$e^{\alpha_k x} \sin(\beta_k x), \quad x e^{\alpha_k x} \sin(\beta_k x), \quad \dots, \quad x^{m_k-1} e^{\alpha_k x} \sin(\beta_k x)$$

✓ **Härledning: Fall 1 – Enkel reell rot**

Påstående: Om r_k är en enkel reell rot till $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_0 = 0$, då är $y_k = e^{r_k x}$ en lösning.

Bevis:

Ansätt $y = e^{rx}$. Då är: $y' = r e^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$, $\dots$, $y^{(n)} = r^n e^{rx}$

Insättning i ODE:n ger: $r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \dots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0$

$$e^{rx} \underbrace{(r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0)}_{\text{karakteristiska polynomet}} = 0$$

Eftersom $e^{rx} \neq 0$ för alla x , måste r vara en rot till karakteristiska ekvationen.

Om r_k är en sådan rot, är alltså $y_k = e^{r_k x}$ en lösning. $\square$

✓ **Härledning: Fall 2 – Enkelt komplext rotpar**

Påstående: Om $\alpha \pm i\beta$ är ett par komplexa konjugerade rötter, ger de upphov till de reella lösningarna: $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Bevis:

Formellt får vi lösningarna: $\tilde{y}_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$, $\tilde{y}_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$

Använd Eulers formel $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$: $\tilde{y}_1 = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))$ $\tilde{y}_2 = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \sin(\beta x))$

Reella lösningar via linjärkombinationer: $y_1 = \frac{\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2}{2} = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ $y_2 = \frac{\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Linjärt oberoende: $\frac{y_2}{y_1} = \frac{\sin(\beta x)}{\cos(\beta x)} = \tan(\beta x) \neq \text{konstant}$

Alltså är y_1 och y_2 linjärt oberoende. $\square$

✓ Härledning: Fall 3 – Reell rot med multiplicitet m

Påstående: Om r är en reell rot med multiplicitet m , ger den upphov till m linjärt oberoende lösningar: $y_1 = e^{rx}$, $y_2 = xe^{rx}$, $y_3 = x^2e^{rx}$, $\dots$, $y_m = x^{m-1}e^{rx}$

Bevis (skiss):

Om r har multiplicitet m kan vi skriva karakteristiska polynomet som: $P(s) = (s - r)^m Q(s)$ där $Q(r) \neq 0$.

Den tillhörande differentialoperatorn är: $L[y] = (D - r)^m Q(D)[y] = 0$ där $D = \frac{d}{dx}$.

Nyckelobservation: Om $(D - r)^m[y] = 0$, så är y en lösning.

Vi visar att $y_k = x^{k-1}e^{rx}$ uppfyller $(D - r)^m[y_k] = 0$ för $k = 1, 2, \dots, m$.

Viktigt lemma: $(D - r)[x^j e^{rx}] = jx^{j-1}e^{rx}$

Bevis av lemma: $\frac{d}{dx}[x^j e^{rx}] = jx^{j-1}e^{rx} + rx^j e^{rx}$ $(D - r)[x^j e^{rx}] = jx^{j-1}e^{rx} + rx^j e^{rx} - rx^j e^{rx} = jx^{j-1}e^{rx}$

Tillämpning: För $y_k = x^{k-1}e^{rx}$: $(D - r)[x^{k-1}e^{rx}] = (k - 1)x^{k-2}e^{rx}$ $(D - r)^2[x^{k-1}e^{rx}] = (k - 1)(k - 2)x^{k-3}e^{rx}$ $\vdots$ $(D - r)^{k-1}[x^{k-1}e^{rx}] = (k - 1)! \cdot e^{rx}$ $(D - r)^k[x^{k-1}e^{rx}] = 0$

Eftersom $k \leq m$ har vi $(D - r)^m[x^{k-1}e^{rx}] = 0$, så y_k är en lösning.

Linjärt oberoende: Funktionerna $e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{m-1}e^{rx}$ är linjärt oberoende eftersom kvoten av två konsekutiva är x , som inte är konstant. $\square$

✓ Härledning: Fall 4 – Komplex rotpar med multiplicitet m

Påstående: Om $\alpha \pm i\beta$ är ett komplext rotpar med multiplicitet m , ger det upphov till $2m$ linjärt oberoende lösningar.

Bevis:

Från Fall 3 vet vi att multipla rötter ger faktor x^j framför baslösningen.

Formellt får vi de komplexa lösningarna: $e^{(\alpha+i\beta)x}$, $xe^{(\alpha+i\beta)x}$, ..., $x^{m-1}e^{(\alpha+i\beta)x}$
 $e^{(\alpha-i\beta)x}$, $xe^{(\alpha-i\beta)x}$, ..., $x^{m-1}e^{(\alpha-i\beta)x}$

Reella lösningar: Precis som i Fall 2, kombinerar vi konjugatparen:

För varje $j = 0, 1, \dots, m-1$: $x^j e^{(\alpha+i\beta)x} = x^j e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))$ $x^j e^{(\alpha-i\beta)x} = x^j e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x))$

Reella lösningar: $y_{2j+1} = x^j e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ $y_{2j+2} = x^j e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Totalt: $2m$ stycken linjärt oberoende lösningar. $\square$

Receptbok: Högre ordningens ODE

Steg 1: Ställ upp karakteristiska ekvationen $P(r) = 0$

Steg 2: Hitta alla rötter (faktorisera, använd rotformeln, eller gissa rationella rötter)

Steg 3: För varje rot/rotpar, skriv upp motsvarande lösningar:

Rottyp	Bidrag till allmänna lösningen
Enkel reell rot r	Ce^{rx}
Reell rot r med mult. m	$(C_1 + C_2x + \dots + C_mx^{m-1})e^{rx}$
Enkelt komplext par $\alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
Komplext par $\alpha \pm i\beta$ med mult. m	$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2x + \dots)\cos \beta x + (D_1 + D_2x + \dots)\sin \beta x]$

Steg 4: Summera alla bidrag till y_h

Steg 5: Om inhomogen: hitta y_p och bilda $y = y_h + y_p$

Räkneexempel: Homogena ODE av högre ordning

≡ **Exempel 1:** $y''' - y'' - y' + y = 0$

Steg 1: Karakteristisk ekvation $r^3 - r^2 - r + 1 = 0$

Steg 2: Faktorisera

Gruppera: $r^2(r - 1) - (r - 1) = (r - 1)(r^2 - 1) = (r - 1)(r - 1)(r + 1) = (r - 1)^2(r + 1)$

Rötter:

- $r = 1$ med multiplicitet 2
- $r = -1$ med multiplicitet 1

Steg 3: Skriv upp lösningarna

Från $r = 1$ (dubbelrot): e^x och xe^x

Från $r = -1$ (enkel rot): e^{-x}

Allmän lösning: $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x} = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{-x}$

≡ **Exempel 2:** $y''' - y'' - y' + y = e^x$ (inhomogen)

Steg 1: Homogena lösningen

Från Exempel 1: $y_h = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{-x}$

Steg 2: Partikulärlösning med resonansregel

Högerled: e^x

Men e^x och xe^x finns redan i y_h (dubbelrot $r = 1$)!

Resonansregel: Multiplicera med x^2 : $y_p = Ax^2e^x$

Steg 3: Derivera $y_p = Ax^2e^x$ $y_p' = A(2x + x^2)e^x = A(x^2 + 2x)e^x$ $y_p'' = A(2 + 2x + x^2 + 2x)e^x = A(x^2 + 4x + 2)e^x$ $y_p''' = A(2x + 4 + x^2 + 4x + 2)e^x = A(x^2 + 6x + 6)e^x$

Steg 4: Sätt in i ODE:n $y''' - y'' - y' + y = Ae^x[(x^2 + 6x + 6) - (x^2 + 4x + 2) - (x^2 + 2x) + x^2] = Ae^x[x^2 + 6x + 6 - x^2 - 4x - 2 - x^2 - 2x + x^2] = Ae^x[0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 4] = 4Ae^x = e^x$

$$A = \frac{1}{4}$$

Allmän lösning: $y = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{-x} + \frac{1}{4}x^2e^x$

≡ **Exempel 3:** $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

Steg 1: Karakteristisk ekvation $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$

Steg 2: Faktorisera

Detta är en kvadrat: $(r^2 + 1)^2 = 0$

Rötter: $r^2 = -1 \implies r = \pm i$ med multiplicitet 2 vardera.

Alltså: $\alpha = 0, \beta = 1$, multiplicitet $m = 2$

Steg 3: Skriv upp lösningarna (Fall 4)

Från $r = \pm i$ med multiplicitet 2:

- $j = 0$: $\cos x, \sin x$
- $j = 1$: $x \cos x, x \sin x$

Allmän lösning: $y = (C_1 + C_2x) \cos x + (C_3 + C_4x) \sin x$

≡ **Exempel 4:** $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = e^{-3x}$

Steg 1: Karakteristisk ekvation $r^3 + 6r^2 + 11r + 6 = 0$

Steg 2: Hitta rötter

Gissa rationella rötter (divisorer till 6): Prova $r = -1$: $(-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$ ✓

Polynomdivision: $r^3 + 6r^2 + 11r + 6 = (r + 1)(r^2 + 5r + 6) = (r + 1)(r + 2)(r + 3)$

Rötter: $r = -1, -2, -3$ (alla enkla)

Steg 3: Homogena lösningen $y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}$

Steg 4: Partikulärlösning

Högerled: e^{-3x}

Men e^{-3x} finns i y_h (enkel rot)! **Resonans!**

Ansätt: $y_p = Axe^{-3x}$

Derivera: $y_p' = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x} = A(1 - 3x)e^{-3x}$ $y_p'' = -3Ae^{-3x} - 3A(1 - 3x)e^{-3x} = A(-6 + 9x)e^{-3x}$ $y_p''' = 9Ae^{-3x} - 3A(-6 + 9x)e^{-3x} = A(27 - 27x)e^{-3x}$

Sätt in: $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = Ae^{-3x}[(27 - 27x) + 6(-6 + 9x) + 11(1 - 3x) + 6x] = Ae^{-3x}[27 - 27x - 36 + 54x + 11 - 33x + 6x] = Ae^{-3x}[(27 - 36 + 11) + (-27 + 54 - 33 + 6)x] = Ae^{-3x}[2 + 0 \cdot x] = 2Ae^{-3x} = e^{-3x}$

$$A = \frac{1}{2}$$

Allmän lösning: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x} + \frac{1}{2}xe^{-3x}$

≡ **Exempel 5:** $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$

Faktorisera: Prova $r = 1$: $1 - 6 + 11 - 6 = 0$ ✓

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r - 1)(r^2 - 5r + 6) = (r - 1)(r - 2)(r - 3)$$

Rötter: $r = 1, 2, 3$ (alla enkla)

Allmän lösning: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$

≡ **Exempel 6:** $y^{(4)} - y = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^4 - 1 = 0$

Faktorisera: $r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = (r - 1)(r + 1)(r^2 + 1)$

Rötter:

- $r = 1$ (enkel reell)
- $r = -1$ (enkel reell)
- $r = \pm i$ (enkelt komplext par, $\alpha = 0, \beta = 1$)

Allmän lösning: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$

≡ **Exempel 7:** $y''' + y'' - y' - y = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^3 + r^2 - r - 1 = 0$

Faktorisera: $r^2(r + 1) - (r + 1) = (r + 1)(r^2 - 1) = (r + 1)(r - 1)(r + 1) = (r + 1)^2(r - 1)$

Rötter:

- $r = -1$ med multiplicitet 2
- $r = 1$ med multiplicitet 1

Allmän lösning: $y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x) e^{-x}$

≡ **Exempel 8:** $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$

Faktorisera: Känn igen $(r - 1)^3$: $(r - 1)^3 = r^3 - 3r^2 + 3r - 1$

Rot: $r = 1$ med multiplicitet 3

Allmän lösning: $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$

Eulers differentialekvation (Cauchy-Euler)

 **Definition: Eulers differentialekvation**

Eulers differentialekvation (eller Cauchy-Euler-ekvation) har formen: $x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$

Kännetecken: Koefficienten framför $y^{(k)}$ är x^k .

Andra ordningen: $x^2 y'' + axy' + by = f(x)$

Tredje ordningen: $x^3 y''' + ax^2 y'' + bxy' + cy = f(x)$

 **Receptbok: Eulers differentialekvation via substitution**

Huvudmetod: Substitution $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$

Denna substitution transformerar Euler-ekvationen till en ODE med **konstanta koefficienter!**

Steg 1: Inför $t = \ln x$, så att $x = e^t$

Låt $y(x) = u(t)$ där $t = \ln x$.

Steg 2: Transformera derivatorna med hjälp av formler nedan

Steg 3: Lös den resulterande ODE:n med konstanta koefficienter i $u(t)$

Steg 4: Transformera tillbaka till $y(x)$ via $t = \ln x$, $e^{rt} = x^r$

✓ Härledning: Transformationsformler för derivator

Låt $y(x) = u(t)$ där $t = \ln x$, så $x = e^t$.

Vi använder notationen $u' = \frac{du}{dt}$, $u'' = \frac{d^2u}{dt^2}$, etc.

Första derivatan:

Kedjeregeln ger: $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = u' \cdot \frac{1}{x}$

Multiplikera med x : $xy' = u'$

Andra derivatan:

$$y' = \frac{1}{x}u'$$

Derivera igen m.a.p. x : $y'' = -\frac{1}{x^2}u' + \frac{1}{x}\frac{du'}{dx} = -\frac{1}{x^2}u' + \frac{1}{x} \cdot u'' \cdot \frac{1}{x}y' = \frac{1}{x^2}(u'' - u')$

Multiplikera med x^2 : $x^2y'' = u'' - u'$

Tredje derivatan:

Från $y'' = \frac{1}{x^2}(u'' - u')$, derivera m.a.p. x : $y''' = -\frac{2}{x^3}(u'' - u') + \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}(u'' - u')$

Nu är $\frac{d}{dx}(u'' - u') = (u''' - u'') \cdot \frac{1}{x}$

$$y''' = -\frac{2}{x^3}(u'' - u') + \frac{1}{x^3}(u''' - u'')y''' = \frac{1}{x^3}[u''' - u'' - 2u'' + 2u'] = \frac{1}{x^3}[u''' - 3u'' + 2u']$$

Multiplikera med x^3 : $x^3y''' = u''' - 3u'' + 2u'$

Sammanfattning av transformationsformler:

Original	Transformerad
y	u
xy'	u'
x^2y''	$u'' - u'$
x^3y'''	$u''' - 3u'' + 2u'$

Invertera för att uttrycka y -derivator:

Derivata	Uttryck i u
y	u
xy'	u'
x^2y''	$u'' - u'$
x^3y'''	$u''' - 3u'' + 2u'$

Varför fungerar detta?

Substitutionen $t = \ln x$ "avlogaritmerar" Euler-ekvationens speciella struktur och ger konstanta koefficienter.

≡ **Exempel 9:** $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' + 8y = 32 \ln x, x > 0$

Steg 1: Substituera $t = \ln x, x = e^t, y(x) = u(t)$

Använd transformationsformlerna:

- $y = u$
- $xy' = u'$
- $x^2y'' = u'' - u'$, alltså $x^2y'' + xy' = u''$
- $x^3y''' = u''' - 3u'' + 2u'$

Observera: Vi behöver $x^3y''' + 3x^2y'' + xy'$

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' = (u''' - 3u'' + 2u') + 3(u'' - u') + u' = u''' - 3u'' + 2u' + 3u'' - 3u' + u' = u''' + 0 \cdot u'' + 0 \cdot u' = u'''$$

Steg 2: Transformerad ekvation

Högerledet: $32 \ln x = 32t$

ODE:n blir: $u''' + 8u = 32t$

Steg 3: Lös homogena ekvationen

Karakteristisk ekvation: $r^3 + 8 = 0$

$$r^3 = -8 = 8e^{i\pi}$$

Hitta de tre rötterna:

$$|r|^3 = 8 \implies |r| = 2$$

$$3\phi = \pi + 2\pi n, n = 0, 1, 2$$

$$\phi_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \phi_1 = \frac{\pi+2\pi}{3} = \pi, \quad \phi_2 = \frac{\pi+4\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Rötterna: } r_0 &= 2e^{i\pi/3} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3} \\ r_1 &= 2e^{i\pi} = -2 \\ r_2 &= 2e^{i5\pi/3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} \end{aligned}$$

Rötter:

- $r = -2$ (enkel reell)
- $r = 1 \pm i\sqrt{3}$ (komplext par, $\alpha = 1, \beta = \sqrt{3}$)

Homogen lösning: $u_h = C_1 e^{-2t} + e^t(C_2 \cos(\sqrt{3}t) + C_3 \sin(\sqrt{3}t))$

Steg 4: Partikulärlösning

Högerled: $32t$ (polynom grad 1)

Ingen resonans (rötterna är -2 och $1 \pm i\sqrt{3}$, ingen är 0)

Ansätt: $u_p = At + B$

$$u_p' = A, \quad u_p'' = 0, \quad u_p''' = 0$$

$$\text{Insättning: } 0 + 8(At + B) = 32t$$

$$8At + 8B = 32t$$

$$\text{Jämför: } 8A = 32 \implies A = 4, 8B = 0 \implies B = 0$$

$$u_p = 4t$$

Steg 5: Allmän lösning i t $u = C_1 e^{-2t} + e^t(C_2 \cos(\sqrt{3}t) + C_3 \sin(\sqrt{3}t)) + 4t$

Steg 6: Transformera tillbaka

Med $t = \ln x$:

- $e^{-2t} = e^{-2 \ln x} = x^{-2}$
- $e^t = x$
- $\cos(\sqrt{3}t) = \cos(\sqrt{3} \ln x)$
- $\sin(\sqrt{3}t) = \sin(\sqrt{3} \ln x)$
- $t = \ln x$

Allmän lösning: $y = C_1 x^{-2} + x(C_2 \cos(\sqrt{3} \ln x) + C_3 \sin(\sqrt{3} \ln x)) + 4 \ln x$

≡ **Exempel:** $x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0, x > 0$ (kontrollexempel)

Substituera $t = \ln x$:

$$x^2 y'' = u'' - u', xy' = u'$$

$$\text{Ekvationen blir: } (u'' - u') - 2u' - 4u = 0 \implies u'' - 3u' - 4u = 0$$

$$\text{Karakteristisk ekvation: } r^2 - 3r - 4 = 0$$

$$(r - 4)(r + 1) = 0 \implies r = 4, -1$$

Lösning i t : $u = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t}$

Tillbaka till x : $y = C_1 x^4 + C_2 x^{-1}$

(Samma svar som med direktansats $y = x^r$!)

Jämförelse: Substitution vs direktansats

Metod	Fördel	Nackdel
Substitution $t = \ln x$	Återanvänder känd teori för konstanta koeff. Fungerar för inhomogena ekvationer.	Kräver omskrivning fram och tillbaka
Direktansats $y = x^r$	Snabbare för homogena eq.	Dubbelrot/komplexa kräver extra motivering. Svårare för inhomogena.

Substitutionsmetoden är mer **systematisk** och visar varför lösningarna har formen de har.

OBS: Definitionsområde

- Substitutionen $t = \ln x$ kräver $x > 0$
- För $x < 0$: använd $t = \ln |x|$ eller substituera $v = -x$
- Lösningar med $\ln x$ är odefinierade vid $x = 0$

Del V: Tillämpningar

Befolkningsmodeller

Exponentiell tillväxt och avtagande

Den enklaste modellen antar att tillväxthastigheten är proportionell mot populationens storlek:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Lösning: $P(t) = P_0 e^{kt}$

- $k > 0$: Exponentiell tillväxt (bakterier i tidig fas)
- $k < 0$: Exponentiellt avtagande (radioaktivt sönderfall)

Receptbok: Exponentiell tillväxt/sönderfall

Modell: $\frac{dP}{dt} = kP$

Lösning: $P(t) = P_0 e^{kt}$

Nyckelformler:

- Fördubblingstid: $T_2 = \frac{\ln 2}{k}$
- Halveringstid: $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{|k|}$
- Från halveringstid: $k = -\frac{\ln 2}{t_{1/2}}$

Exempel: Radioaktivt sönderfall

Kol-14 har halveringstid 5730 år. Ett fossil har 25% av ursprungligt C-14. Hur gammalt är det?

$$k = -\frac{\ln 2}{5730}$$

$$0.25P_0 = P_0 e^{kt} \implies \ln(0.25) = kt$$

$$t = \frac{\ln(0.25)}{k} = \frac{-2 \ln 2}{-\ln 2/5730} = 2 \cdot 5730 = 11460 \text{ år}$$

Logistisk tillväxt

Med begränsad bärkapacitet M : $\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{M}\right)$

Lösning: $P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$ där $A = \frac{M - P_0}{P_0}$

Egenskaper:

- S-formad kurva (sigmoidal)
- Inflexion vid $P = M/2$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = M$

Newton's avsvlningslag

Receptbok: Newton's avsvlningslag

Modell: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s)$

där T = objektets temperatur, T_s = omgivningens temperatur

Lösning: $T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$

Exempel: Mordutredning

Kropp hittas kl. 22:00 med temp 32°C. Kl. 23:00: 30°C. Rumstemperatur 20°C. Normal kroppstemperatur 37°C. När skedde mordet?

Bestäm k: $30 = 20 + 12e^{-k} \implies k = \ln(6/5)$

Räkna bakåt: $32 = 20 + 17e^{-k\tau} \implies \tau = \frac{\ln(17/12)}{\ln(6/5)} \approx 1.9 \text{ h}$

Svar: Mordet skedde ca kl. 20:06

Mekaniska svängningar

Fjäder-massa-system

Newtons andra lag ger: $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt} + F(t)$

Standardform: $x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = f(t)$

där $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (naturlig frekvens), $\gamma = c/(2m)$ (dämpningsfaktor)

Receptbok: Fria svängningar

Modell: $x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0$

Fall	Villkor	Lösning
Underdämpad	$\gamma < \omega_0$	$x = e^{-\gamma t}(A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$
Kritiskt dämpad	$\gamma = \omega_0$	$x = (A + Bt)e^{-\gamma t}$
Överdämpad	$\gamma > \omega_0$	$x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

där $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Resonans

Vid påtvingad svängning $x'' + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t)$:

Om $\omega = \omega_0$ (drivfrekvens = naturlig frekvens): $x_p = \frac{F_0 t}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

Amplituden växer linjärt med tiden!

Elektriska kretsar

RLC-kretsar

Kirchhoffs spänningslag: $L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t)$

Analogi med mekanik:

Mekaniskt	Elektriskt
Förskjutning x	Laddning Q
Massa m	Induktans L
Dämpning c	Resistans R
Fjäderkonstant k	$1/C$

Alla resultat för mekaniska system överförs direkt!

Läsning

- Chapter 19 Ordinary Differential Equations

Separabla differentialekvationer

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #differentialekvation

Kurs: M0066M Föreläsningar: Integraler

En separabel ODE har formen

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Lösning

Separera variablerna och integrera:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$$

Example

$$\frac{dy}{dx} = xy: \int \frac{dy}{y} = \int x dx \Rightarrow \ln |y| = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = Ae^{x^2/2}.$$

Läsning

- [7.9 First-Order Differential Equations](#)
- [19.2 Solving First-Order Equations](#)

Se även

- [Linjära differentialekvationer av första ordningen](#)
- [Differentialekvationer](#)

Linjära differentialekvationer av första ordningen

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #differentialekvation

Kurs: M0066M Förkunskaper: Integraler

Standardform:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Integrerande faktor

Multiplitera med $\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$. Då

$$(\mu y)' = \mu Q$$

och

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) Q(x) dx + C \right)$$

Example

$$y' + y = e^{-x}: \mu = e^x, (e^x y)' = 1, y = (x + C)e^{-x}.$$

Läsning

- 19.2 Solving First-Order Equations

Se även

- Separabla differentialekvationer
- Differentialekvationer

Riktningsfält och numeriska metoder

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #differentialekvation #numerik

Kurs: M0066M Förkunskaper: Differentialekvationer

1. Riktningsfält

För $y' = f(x, y)$ kan man rita en liten pil med lutning $f(x, y)$ i varje punkt (x, y) . Lösningskurvor följer riktningsfältet.

2. Eulers metod

Givet $y(x_0) = y_0$, approximera lösningen steg för steg:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad x_{n+1} = x_n + h$$

Enkel men ger stora fel. Felet per steg är $O(h^2)$, totalt $O(h)$.

3. Förbättrade metoder

- Heun (förbättrad Euler)
- Runge–Kutta 4 (RK4), standard för praktisk numerisk integration.

Läsning

- [19.3 Existence, Uniqueness, and Numerical Methods](#)

Se även

- [Differentialekvationer](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Differential equations](#)

Homogena linjära differentialekvationer

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #differentialekvation

Kurs: M0066M **Förkunskaper:** Linjära differentialekvationer av första ordningen

En linjär homogen ODE av ordning n med konstanta koefficienter:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Karakteristisk ekvation

Ansätt $y = e^{rx}$:

$$a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

- Enkla reella rötter r_k : bidrag $C_k e^{r_k x}$.
- Dubbelrot r : bidrag $(C_1 + C_2 x) e^{rx}$.
- Komplexa $r = \alpha \pm i\beta$: bidrag $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Allmän lösning är summa av alla bidrag.

Läsning

- 19.5 Linear Differential Equations with Constant Coefficients

Se även

- Inhomogena linjära differentialekvationer
- Differentialekvationer

Inhomogena linjära differentialekvationer

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #differentialekvation

Kurs: M0066M **Förkunskaper:** Homogena linjära differentialekvationer

För

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = g(x)$$

är den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_p$$

där y_h är lösningen till motsvarande homogen ekvation och y_p en partikulärlösning.

Ansatsmetoden

$g(x)$	Ansats för y_p
polynom grad n	polynom grad n
$e^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$
$\sin \beta x, \cos \beta x$	$A \cos \beta x + B \sin \beta x$
$e^{\alpha x} \sin \beta x$	$e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$

Warning

Om ansatsen kolliderar med y_h : multiplicera med x (eller x^2).

Läsning

- 19.6 Nonhomogeneous Linear Equations

Se även

- Homogena linjära differentialekvationer
 - Differentialekvationer
-

Eulers differentialekvation

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #differentialekvation

Kurs: M0066M **Förkunskaper:** Homogena linjära differentialekvationer

En Euler-ekvation har formen

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad x > 0.$$

Lösningsansats

Sätt $y = x^r$. Då fås den **karakteristiska ekvationen**

$$ar(r-1) + br + c = 0$$

- Två reella rötter $r_1 \neq r_2$: $y = C_1x^{r_1} + C_2x^{r_2}$.
- Dubbelrot r : $y = (C_1 + C_2 \ln x)x^r$.
- Komplexa $r = \alpha \pm i\beta$: $y = x^\alpha(C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x))$.

Läsning

- 19.4 Differential Equations of Second Order

Se även

- Homogena linjära differentialekvationer
- Differentialekvationer