

M0065M

Envariabelanalys 1

Kurskompendium från Pelles Moln · 28 noter · 2026-10-19
pellesmoln.org/kurser/M0065M

Innehåll

Modul 1 — Grunder

Logik och bevisföring	3
Mängdlära	10
Polynom och faktorisering	16
Grafer	25

Modul 2 — Funktioner

Funktioner	34
Funktioner och invers	42
Exponentialfunktioner och logaritmer	50
Hyperboliska funktioner	58
Trigonometri	64
Trigonometriska ekvationer	73
Arcusfunktioner	80

Modul 3 — Gränsvärden

Gränsvärden	87
Oegentliga gränsvärden	96
Kontinuitet	103

Modul 4 — Derivering

Derivata	112
Deriveringsregler	120
Elementära funktioners derivator	127
Implicit derivering	134
Inversa funktioners derivata	141

Modul 5 — Tillämpningar av derivata

Extremvärden	148
Medelvårdessatsen	158
Grafritning och asymptoter	165
Ekvationslösning med derivata	173
Andraderivata och konvexitet	180

Modul 6 — Summor och Taylorutveckling

Talföljder och summor	187
Matematisk induktion	194
Taylors formel	200
Gränsvärdesberäkning med Taylor	208

Logik och bevisföring

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #logik

Kurs: M0065M

Logiken ger ett exakt språk för “om ... så” och “om och endast om”. Vi behöver det för två saker i analysen: för att läsa och skriva **bevis**, och för att räkna **ekvationer** rätt. Varje steg i en ekvationslösning är en implikation eller en ekvivalens, och skillnaden mellan dem avgör om vi får falska rötter eller tappat riktiga.

Idén

En **utsaga** är ett påstående som är antingen sant eller falskt, men inte båda. Logiska symboler binder ihop utsagor, och en bevismetod är ett säkert sätt att gå från det vi vet (P) till det vi vill visa (Q).

1. Logiska symboler

Symbol	Betydelse
$\wedge$	och
$\vee$	eller
$\neg$	icke
$\Rightarrow$	medför
$\Leftrightarrow$	om och endast om
$\forall$	för alla
$\exists$	det finns

En utsaga som innehåller en variabel, som $x^2 - 4x + 3 = 0$, kallas **öppen**: den är sann för vissa x och falsk för andra. Uttrycket $x^2 - 4x + 3$ utan likhetstecken är ingen utsaga alls.

Sanningsvärden. $P \vee Q$ är sann när *minst en* av P och Q är sann (inkluderande eller). $P \Rightarrow Q$ är falsk bara i ett fall: när P är sann och Q falsk.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
S	S	S	S	S	S
S	F	F	S	F	F
F	S	F	S	S	F
F	F	F	F	S	S

Gäller både $P \Rightarrow Q$ och $Q \Rightarrow P$ skriver vi $P \Leftrightarrow Q$. Exempelvis gäller $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$, men inte omvändningen, eftersom även $x = -3$ ger $x^2 = 9$.

2. Logik vid ekvationslösning

Varje omskrivning av en ekvation är en implikation. Är alla steg ekvivalenser har vi exakt rätt lösningsmängd; är något steg bara en implikation $\Rightarrow$ kan falska rötter smyga sig in, och de måste prövas bort.

- **Faktorisera, dela inte.** Ur $x^3 - x^2 = 2x$ får vi $x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, -1, 2\}$. Delar vi i stället med x tappar vi roten $x = 0$.
- **Kvadrering ger bara $\Rightarrow$.** $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$, men inte omvänt. Efter kvadrering måste varje rot prövas i den ursprungliga ekvationen.

≡ Exempel – En rotekvation

Vi löser $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$.

Lösning

Flytta och kvadrera. $\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{4-x}$ ger efter kvadrering

$$x+1 = 1 + 2\sqrt{4-x} + (4-x) \Leftrightarrow 2x-4 = 2\sqrt{4-x} \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{4-x}.$$

Kvadrera igen (bara $\Rightarrow$): $(x-2)^2 = 4-x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0$, så $x = 0$ eller $x = 3$.

Pröva. $x = 0$: $\sqrt{1} - \sqrt{4} = -1 \neq 1$, falsk rot. $x = 3$: $\sqrt{4} - \sqrt{1} = 1$, stämmer.

$$\boxed{x = 3}$$

Den falska roten kommer från kvadreringen: $x = 0$ löser $-(x - 2) = \sqrt{4 - x}$, inte $x - 2 = \sqrt{4 - x}$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

3. Vanliga bevismetoder

- **Direkt bevis:** antag P , härled Q .
- **Motsägelsebevis:** antag $\neg Q$, härled motsägelse.
- **Kontrapositiv:** visa $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
- **Induktion:** se [Matematisk induktion](#).
- **Motexempel:** för att visa att ett påstående "för alla x gäller ..." är *falskt* räcker det med **ett enda** x där det inte gäller.

Direkta bevis om heltal bygger ofta på att ett jämnt tal kan skrivas $n = 2k$ och ett udda $n = 2k + 1$, med k heltal.

Kontrapositionen är det logiska skälet till att indirekta bevis fungerar:

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P)}$$

Exempel: "om n^2 är jämnt så är n jämnt" är svårt att visa direkt. Kontrapositivt blir det "om n är udda så är n^2 udda", och det följer av $(2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.

Härlledning: kontrapositionen är ekvivalent med implikationen

Ställ upp sanningstabellen för båda:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
S	S	S	F	F	S
S	F	F	S	F	F
F	S	S	F	S	S
F	F	S	S	S	S

Kolumnerna för $P \Rightarrow Q$ och $\neg Q \Rightarrow \neg P$ är lika på varje rad, så utsagorna är ekvivalenta. Omvändningen $Q \Rightarrow P$ har däremot kolumnen S, S, F, S och är *inte* ekvivalent med $P \Rightarrow Q$.

Härledning: det finns oändligt många primtal (motsägelsebevis)

Antag motsatsen: det finns bara ändligt många primtal $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Bilda

$$m = 1 + p_1 p_2 \cdots p_n.$$

Eftersom $m > p_n$ kan m inte vara ett primtal, så m är delbart med något primtal, säg p_i . Då är även $m - p_1 p_2 \cdots p_n = 1$ delbart med p_i , vilket är omöjligt eftersom $p_i > 1$. Antagandet var alltså falskt. (Euklides.)

4. Negation av kvantifierade utsagor

$$\neg(\forall x : P(x)) \iff \exists x : \neg P(x)$$

och på samma sätt

$$\neg(\exists x : P(x)) \iff \forall x : \neg P(x).$$

Negationen av “och” blir “eller” och tvärtom (de Morgans lagar): $\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$ och $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$.

Vanliga fel

- **$\iff$ där bara $\Rightarrow$ gäller.** Efter kvadrering eller multiplikation med ett uttryck som kan vara noll är steget bara en implikation; rötterna måste prövas.
- **Dela med en faktor som kan vara noll.** $x^3 = x^2$ delat med x^2 ger $x = 1$ och tappar $x = 0$.
- **Förväxla omvändning och kontraposition.** $Q \Rightarrow P$ följer inte av $P \Rightarrow Q$; det gör däremot $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
- **Fel negation.** Negationen av “minst 30” är “högst 29”, inte “högst 30”; negationen av “för alla” är “det finns ett som inte”.

5. Lösta övningar

☰ Testuppgift 1.3 – Negationer

Vi formulerar negationen till utsagorna a) Minst 30 personer är närvarande. b) Högst 30 personer är närvarande. c) Högst 5 personer är frånvarande. d) Minst 5 personer är frånvarande. e) 5 personer är närvarande.

Lösning

Negationen ska vara sann exakt när utsagan är falsk. "Minst 30" betyder $n \geq 30$, och $\neg(n \geq 30) \iff n < 30 \iff n \leq 29$ för heltal.

a) Högst 29 personer är närvarande.

b) $\neg(n \leq 30) \iff n \geq 31$: Minst 31 personer är närvarande.

c) Minst 6 personer är frånvarande.

d) Högst 4 personer är frånvarande.

e) $\neg(n = 5) \iff n \leq 4 \vee n \geq 6$: Högst 4 eller minst 6 personer är närvarande.

Facit: a) Högst 29 personer är närvarande. b) Minst 31 personer är närvarande. c) Minst 6 personer är frånvarande. d) Högst 4 personer är frånvarande. e) Högst 4 eller minst 6 personer är närvarande.

☰ Testuppgift 1.7 – Ekvationer med falska rötter

Vi löser ekvationerna a) $x^3 = x^2$ b) $x - \sqrt{4 - 2x} = 2$ c) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} = \sqrt{15}$.

Lösning

a) Faktorisera i stället för att dela: $x^3 - x^2 = 0 \iff x^2(x - 1) = 0$, så

$$\boxed{x_{1,2} = 0, \quad x_3 = 1}$$

($x = 0$ är en dubbelrot.)

b) $x - 2 = \sqrt{4 - 2x}$. Kvadrering ger $(\Rightarrow) x^2 - 4x + 4 = 4 - 2x \iff x(x - 2) = 0$, alltså $x = 0$ eller $x = 2$. Prövning: $x = 0$ ger $0 - \sqrt{4} = -2 \neq 2$, falsk rot. $x = 2$ ger $2 - 0 = 2$, stämmer.

$$\boxed{x = 2}$$

c) Båda rötterna är definierade bara för $x \geq 1$. Där gäller $\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-1}$, och kvadrering ger $x^2 - 1 = 15$, alltså $x = \pm 4$. Men $x = -4$ ligger utanför definitionsmängden ($\sqrt{-5}$ finns inte), så

$$\boxed{x = 4}$$

Facit: a) $x_{1,2} = 0, x_3 = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 4$.

☰ Testuppgift 1.9 – Ett direkt bevis

Vi ger ett direkt bevis för satsen: "Om n är udda så är $n^2 + n$ jämnt."

Lösning

Förutsättning. n udda, alltså $n = 2k + 1$ för något heltal k .

Räkna.

$$n^2 + n = (2k + 1)^2 + (2k + 1) = (2k + 1)(2k + 1 + 1) = 2(2k + 1)(k + 1).$$

Slutsats. $(2k + 1)(k + 1)$ är ett heltal, så $n^2 + n$ är två gånger ett heltal:

$$\boxed{n^2 + n = 2(2k + 1)(k + 1) \text{ är jämnt}}$$

(Påståendet gäller för övrigt alla heltal, eftersom $n^2 + n = n(n + 1)$ är en produkt av två på varandra följande tal.)

Facit: $n^2 + n = (2k + 1)^2 + 2k + 1 = (2k + 1)(2k + 1 + 1) = 2(2k + 1)(k + 1)$.

Se även

- [Mängdlära](#)
 - [Matematisk induktion](#)
 - [Polynom och faktorisering](#)
-

Mängdlära

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #mängdlära

Kurs: M0065M

En **mängd** är en samling objekt (element). Ordning och upprepning spelar ingen roll.

Idén

Mängder är språket vi beskriver *svar* med i analysen. Lösningen till en olikhet är en mängd, en funktions definitionsmängd är en mängd, och intervallen på tallinjen är de mängder vi använder oftast. De logiska orden “och” och “eller” blir snitt och union.

1. Vanliga beteckningar

Symbol	Betydelse
$x \in A$	x tillhör A
$A \subseteq B$	A är en delmängd av B
$A \cup B$	union
$A \cap B$	snitt
$A \setminus B$	mängddifferens
$\emptyset$	tomma mängden
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	tal-mängder

En mängd kan anges genom att räkna upp elementen, $A = \{1, 2, 3\}$, eller genom ett villkor, $M = \{x : x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$.

2. Mängdoperationer

Relativt en **grundmängd** G definieras

- **unionen** $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$, alla element som finns i minst en av mängderna,
- **snittet** $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$, alla element som finns i båda,
- **differensen** $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$,
- **komplementet** $A^c = G \setminus A$, allt i grundmängden som inte ligger i A .

Är $A \cap B = \emptyset$ kallas A och B **disjunkta**. Två mängder är lika om $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$.

Några räkneregler som följer direkt av definitionerna: $(A^c)^c = A$, $A \cup A^c = G$, $A \cap A^c = \emptyset$, och $A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$.

de Morgans lagar översätter **logikens** negationsregler till mängder:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

 **Härledning:** $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$x \in (A \cap B)^c \iff \neg(x \in A \wedge x \in B) \iff (x \notin A) \vee (x \notin B) \iff x \in A^c \cup B^c.$$

Varje steg är en ekvivalens, så mängderna har samma element. Den andra lagen visas likadant med $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$.

Antal element. För en ändlig mängd skriver vi $n(A)$ (eller $|A|$) för antalet element. Räknar vi elementen i A och B var för sig räknas snittet två gånger:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Samma princip ger additionssatsen för **sannolikheter**.

3. Talmängder

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ de naturliga talen (ibland utan 0), $\mathbb{Z}$ heltalen.
- $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0\}$ de rationella talen.
- $\mathbb{R}$ de reella talen, hela tallinjen. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ är de **irrationella** talen, till exempel $\sqrt{2}$ och π .
- $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ de **komplexa talen**, där $i^2 = -1$.

Ett tal är rationellt precis när dess decimalutveckling är ändlig eller periodisk. En periodisk decimalutveckling skriver vi om till ett bråk genom att multiplicera bort perioden.

Exempel – Periodisk decimalutveckling som bråk

Vi skriver $1,315315315 \dots$ på formen p/q .

Lösning

Förskjut en period. Perioden har tre siffror, så vi multiplicerar med 1000:

$$1000x = 1315,315315 \dots, \quad x = 1,315315 \dots$$

Subtrahera. Decimalerna tar ut varandra: $999x = 1314$, så

$$x = \frac{1314}{999} = \frac{9 \cdot 146}{9 \cdot 111} = \boxed{\frac{146}{111}}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Härledning: $\sqrt{2}$ är irrationellt (motsägelsebevis)

Antag motsatsen, att $\sqrt{2} = m/n$ med heltal m, n utan gemensamma faktorer. Då är $m^2 = 2n^2$, så m^2 är jämnt, och därmed är m jämnt: $m = 2k$. Insatt ger det $4k^2 = 2n^2$, alltså $n^2 = 2k^2$, så även n är jämnt. Då har m och n den gemensamma faktorn 2, vilket strider mot antagandet. Alltså är $\sqrt{2}$ irrationellt.

4. Ordning och olikheter

För reella tal gäller:

1. Precis en av $a < b$, $a = b$, $a > b$ är sann.
2. $a < b$ och $b < c$ ger $a < c$.
3. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ för alla c .
4. $a < b$ och $c > 0$ ger $ac < bc$. **Är $c < 0$ byter olikheten riktning.**
5. $0 < a < b \iff 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Regel 4 är skälet till att vi aldrig multiplicerar en olikhet med ett uttryck vars tecken vi inte känner. I stället samlar vi allt på ena sidan och gör ett teckenschema (se **Polynom och faktorisering**).

5. Intervallnotation

- $[a, b]$ sluten, (a, b) öppen, $[a, b)$ halvöppen.

Utskrivet är $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ och $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. **Obegränsade** intervall skrivs med ∞ , som aldrig ingår i intervallet och därför alltid har rund parentes:

$$[a, \infty) = \{x : x \geq a\}, \quad (-\infty, b) = \{x : x < b\}, \quad \mathbb{R} = (-\infty, \infty).$$

Villkor med $\wedge$ ger snitt och villkor med $\vee$ ger union: $\{x : x < 3 \wedge x \geq -1\} = [-1, 3)$.

Vanliga fel

- **Hakparentes vid ∞ .** $[2, \infty]$ är fel; ∞ är inget tal och skrivs alltid med rund parentes.
- **Glömma att vända olikheten** vid multiplikation eller division med ett negativt tal, till exempel $2 - x < 0 \iff x > 2$.
- **Multiplitera med ett uttryck av okänt tecken.** $\frac{1}{x-2} > \frac{1}{4}$ får inte skrivas om till $x - 2 < 4$; det ger fel svar för $x < 2$. Rätt svar är $2 < x < 6$.
- **Blanda ihop $\cup$ och $\cap$.** "och" är snitt, "eller" är union; ett snitt blir mindre, en union större.

6. Lösta övningar

Testuppgift 1.26 – Enkla olikheter

Vi löser olikheterna a) $2 + x < 0$ b) $2 - x < 0$ c) $\frac{1}{2-x} < 0$ d) $2x + 3 \geq 5(x + 1) + 4$.

Lösning

a) $x < -2$

b) $2 < x$, alltså $x > 2$. (Flytta x till höger i stället för att dela med -1 .)

c) Täljaren 1 är positiv, så kvoten är negativ precis när nämnaren är negativ: $2 - x < 0 \iff x > 2$.

d) $2x + 3 \geq 5x + 9 \iff -6 \geq 3x \iff x \leq -2$.

Facit: a) $x < -2$ b) $x > 2$ c) $x > 2$ d) $x \leq -2$.

≡ Testuppgift 1.27 – Från villkor till intervall

Vi skriver talmängderna med intervallbeteckning: a) $\{x : (-1 < x < 2) \vee (0 < x \leq 3)\}$ b) $\{x : (-1 < x < 2) \wedge (0 < x \leq 3)\}$ c) $\{x : (x < 2) \vee (x \leq 3)\}$ d) $\{x : (x < 2) \wedge (x \leq 3)\}$.

Lösning

“eller” är union, “och” är snitt. Rita intervallen under tallinjen och läs av.

$$\text{a) } (-1, 2) \cup (0, 3] = \boxed{(-1, 3]}$$

$$\text{b) } (-1, 2) \cap (0, 3] = \boxed{(0, 2)}$$

$$\text{c) } (-\infty, 2) \cup (-\infty, 3] = \boxed{(-\infty, 3]}$$

$$\text{d) } (-\infty, 2) \cap (-\infty, 3] = \boxed{(-\infty, 2)}$$

Facit: a) $(-1, 3]$ b) $(0, 2)$ c) $(-\infty, 3]$ d) $(-\infty, 2)$.

≡ Övningsuppgift 1.15 – Två kassor

Under en timme observerades kundtillströmningen vid ett snabbköps båda kassor. Den ena kassan var upptagen i 44 min, den andra i 39 min och båda samtidigt i 28 min. Hur länge var båda kassorna lediga?

Lösning

Mängder. Låt A och B vara de minuter då kassa 1 respektive kassa 2 var upptagen, med grundmängden G = hela timmen, $n(G) = 60$.

Minst en upptagen.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 44 + 39 - 28 = 55.$$

Båda lediga är komplementet $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$:

$$n((A \cup B)^c) = 60 - 55 = \boxed{5 \text{ min}}$$

Facit: 5 min.

≡ Övningsuppgift 1.17 – Decimalutvecklingar

Vi bestämmer vilka rationella tal som har decimalutvecklingarna a) 0,66 b) 0,66 ... c) 0,2363636 ... d) 0,03999 ...

Lösning

a) Ändlig utveckling: $0,66 = \frac{66}{100} = \boxed{\frac{33}{50}}$.

b) $x = 0,66 \dots$ ger $10x - x = 6$, så $x = \boxed{\frac{2}{3}}$.

c) Perioden 36 börjar efter en decimal. $1000r = 236,3636 \dots$ och $10r = 2,3636 \dots$ ger

$$990r = 234 \iff r = \frac{234}{990} = \boxed{\frac{13}{55}}$$

d) $100r = 3,999 \dots$ och $1000r = 39,999 \dots$ ger $900r = 36$, så $r = \boxed{\frac{1}{25}}$. Utvecklingen 0,03999 ... är alltså samma tal som 0,04.

Facit: a) 33/50 b) 2/3 c) 13/55 d) 1/25.

Se även

- Logik och bevisföring
- Funktioner
- Funktioner och invers
- Sannolikhetsmått

Polynom och faktorisering

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #algebra #polynom

Kurs: M0065M

Idén

Att faktorisera ett polynom gör ekvationen $p(x) = 0$ till "en produkt är noll", och en produkt är noll precis när någon faktor är noll. Samma faktorisering ger tecknet på $p(x)$ i ett teckenschema, och därmed lösningen till olikheter. Nyckeln är faktorsatsen: varje nollställe c ger en faktor $(x - c)$.

1. Polynom och rationella funktioner

Ett polynom är ett uttryck på formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Graden är det högsta n där $a_n \neq 0$. Talen $a_0, \dots, a_n$ kallas polynomets **koefficienter**, och ett konstant polynom $p(x) = C$ har grad 0. Uttryck som $\sqrt{x} + 4$ eller $x^2 - 3x + \frac{5}{x}$ är inte polynom.

En kvot $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ av två polynom kallas en **rationell funktion**.

2. Polynomdivision

Används för att dela ut en känd faktor $(x - c)$ eller för att förenkla rationella funktioner.

Är $\text{grad } p \geq \text{grad } q$ kan vi på ett entydigt sätt skriva

$$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \iff p(x) = k(x)q(x) + r(x), \quad \text{grad } r < \text{grad } q,$$

där k är **kvoten** och r **resten**. Divisionen görs som liggande stolen för heltal: dela högstgradstermerna, multiplicera tillbaka, subtrahera och upprepa tills restens grad är lägre än nämnarens. Svaret kontrolleras med $kq + r = p$.

≡ Exempel – Polynomdivision

Vi utför divisionen $\frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 + 1}$.

Lösning

Första termen. $2x^3/x^2 = 2x$. Subtrahera $2x(x^2 + 1) = 2x^3 + 2x$:

$$2x^3 - 3x^2 + 4 - (2x^3 + 2x) = -3x^2 - 2x + 4.$$

Andra termen. $-3x^2/x^2 = -3$. Subtrahera $-3(x^2 + 1) = -3x^2 - 3$:

$$-3x^2 - 2x + 4 - (-3x^2 - 3) = -2x + 7.$$

Resten har grad $1 < 2$, så vi är klara:

$$\boxed{\frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 + 1} = 2x - 3 + \frac{-2x + 7}{x^2 + 1}}$$

Kontroll. $(2x - 3)(x^2 + 1) + (-2x + 7) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 - 2x + 7 = 2x^3 - 3x^2 + 4$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

3. Kvadratkomplettering och andragradsekvationen

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Sätter vi uttrycket lika med noll får vi Lösningformeln

$$\boxed{x^2 + px + q = 0 \iff x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

förutsatt att diskriminanten $D = p^2 - 4q \geq 0$. Är $D > 0$ finns två olika reella rötter, är $D = 0$ en reell dubbelrot, och är $D < 0$ saknas reella rötter (polynomet går inte att dela upp i reella förstgradsfaktorer).

Har $x^2 + px + q$ rötterna a och b är $x^2 + px + q = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$, så $p = -(a + b)$ och $q = ab$. Exempelvis ger $x^2 - 5x + 6$ talen $a + b = 5$, $ab = 6$, alltså $(x - 2)(x - 3)$.

Användbara faktoriseringar:

- $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$ (konjugatregeln)
- $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ och $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$
- $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$

Till exempel är $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$.

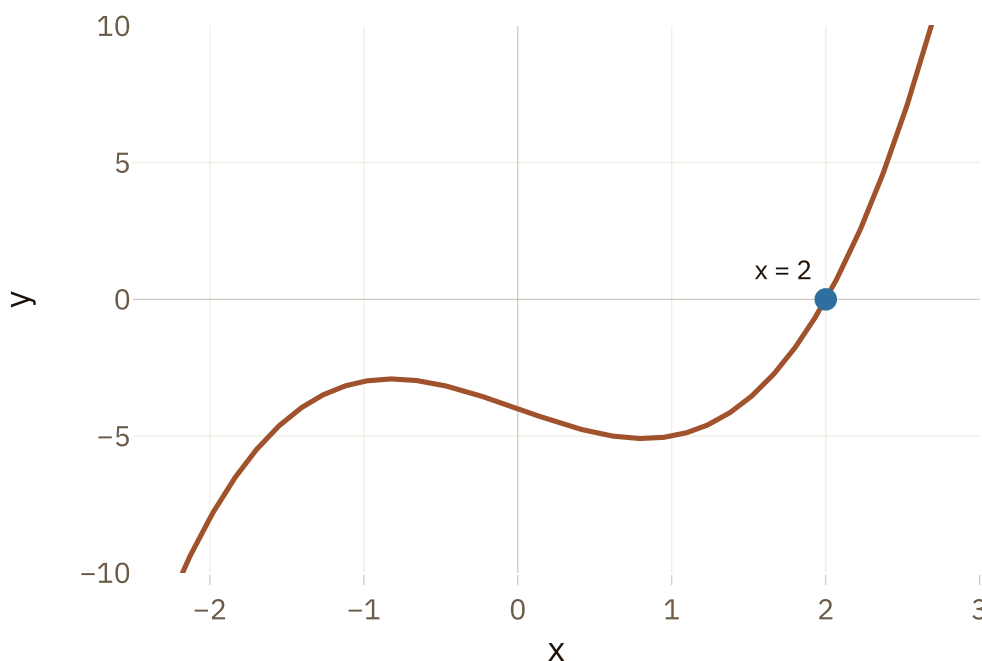
4. Faktorsatsen

Ett tal c med $p(c) = 0$ kallas ett **nollställe** till p , eller en **rot** till ekvationen $p(x) = 0$.

$$p(c) = 0 \iff (x - c) \mid p(x)$$

Med andra ord är $p(x) = (x - c)q(x)$, där $\text{grad } q = \text{grad } p - 1$.

$x^3 - 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$: den andra faktorn saknar reella nollställen, så $x = 2$ är enda reella roten.



Härledning: faktorsatsen ur divisionsalgoritmen

Dela $p(x)$ med $x - c$. Resten har lägre grad än 1, så den är en konstant r :

$$p(x) = (x - c)q(x) + r.$$

Sätt $x = c$: $p(c) = 0 \cdot q(c) + r = r$. Resten vid division med $x - c$ är alltså $p(c)$ (restsatsen). Därmed är $(x - c)$ en faktor, det vill säga $r = 0$, precis när $p(c) = 0$.

Rationella rötter. Om ekvationen $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ har heltalskoefficienter, $a_0 \neq 0$, och en rationell rot $x = p/q$ (förkortad), så är p en delare till a_0 och q en delare till a_n . Är $a_n = 1$ måste varje rationell rot vara en heltalsdelare till a_0 . Det ger en ändlig lista att pröva.

≡ Exempel – Gissa en rot och dela ut den

Vi faktorerar $p(x) = x^3 - 2x - 4$ så långt som möjligt.

Lösning

Möjliga rationella rötter. $a_3 = 1$, så de enda kandidaterna är delarna till -4 : $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Pröva. $p(2) = 8 - 4 - 4 = 0$, så enligt faktorsatsen är $(x - 2)$ en faktor.

Dela. Polynomdivision ger $\frac{x^3 - 2x - 4}{x - 2} = x^2 + 2x + 2$ med rest 0.

Kan kvoten faktoriseras? $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \geq 1$, så den saknar reella nollställen.

$$x^3 - 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$$

är alltså den fullständiga reella faktoriseringen.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

5. Algebrans fundamentalsats

Varje polynom av grad $n \geq 1$ med komplexa koefficienter har precis n rötter (räknade med multiplicitet) i $\mathbb{C}$.

Tillsammans med faktorsatsen betyder det att varje polynom av grad n kan skrivas som en produkt av n förstagsgradsfaktorer över $\mathbb{C}$. Ett reellt polynom av grad n har därför **högst** n reella rötter, och över $\mathbb{R}$ kan det alltid delas upp i faktorer av grad 1 och 2 (se **Komplexa tal**).

6. Olikheter och teckenschema

För att lösa en olikhet flyttar vi alla termer till ena sidan, skriver dem på gemensamt bråkstreck och faktorerar så långt som möjligt. Varje faktor byter tecken bara i sitt nollställe, så ett **teckenschema** över de intressanta punkterna ger tecknet på hela uttrycket.

≡ Exempel – Rationell olikhet med teckenschema

Vi bestämmer för vilka x olikheten $\frac{3x-4}{x-2} \geq \frac{4x+2}{x+1}$ gäller.

Lösning

Allt på en sida. Multiplicera *inte* med nämnarna, vars tecken vi inte känner:

$$\frac{3x-4}{x-2} - \frac{4x+2}{x+1} = \frac{(3x-4)(x+1) - (4x+2)(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{-x(x-5)}{(x-2)(x+1)} \geq 0.$$

Teckenschema över $-1, 0, 2, 5$:

	$x < -1$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 2)$
$-x$	+	+	+	0	–
$x-5$	–	–	–	–	–
$x-2$	–	–	–	–	–
$x+1$	–	0	+	+	+
kvot	–	ej def.	+	0	–

$$\boxed{-1 < x \leq 0 \quad \text{eller} \quad 2 < x \leq 5}$$

Nollställena 0 och 5 tas med ($\geq$), nämnarens nollställen -1 och 2 aldrig.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

⚠ Vanliga fel

- **Glömd nollterm i divisionen.** Skriv ut saknade potenser med koefficient 0 ($x^3 + 0x^2 - 2x - 4$), annars hamnar termerna i fel kolumn.
- **Tecknet i faktorn.** Roten $c = -3$ ger faktorn $(x + 3)$, inte $(x - 3)$.
- **Sluta för tidigt.** Kontrollera om kvoten går att faktorisera vidare; en andragsgradsfaktor med $D < 0$ är däremot färdig över $\mathbb{R}$.
- **Multiplitera en olikhet med en nämnare** av okänt tecken. Samla allt på ena sidan och gör teckenschema.

7. Lösta övningar

☰ Testuppgift 2.1 d – Polynomdivision

Vi utför polynomdivisionen $\frac{8x^4 + 4x^2 + 2x - 3}{4x^2 - 2x + 6}$.

✎ Lösning

Skriv ut nolltermen: täljaren är $8x^4 + 0x^3 + 4x^2 + 2x - 3$.

Steg 1. $8x^4/4x^2 = 2x^2$. Subtrahera $2x^2(4x^2 - 2x + 6) = 8x^4 - 4x^3 + 12x^2$: kvar $4x^3 - 8x^2 + 2x - 3$.

Steg 2. $4x^3/4x^2 = x$. Subtrahera $x(4x^2 - 2x + 6) = 4x^3 - 2x^2 + 6x$: kvar $-6x^2 - 4x - 3$.

Steg 3. $-6x^2/4x^2 = -\frac{3}{2}$. Subtrahera $-\frac{3}{2}(4x^2 - 2x + 6) = -6x^2 + 3x - 9$: kvar $-7x + 6$.

$$\frac{8x^4 + 4x^2 + 2x - 3}{4x^2 - 2x + 6} = 2x^2 + x - \frac{3}{2} + \frac{6 - 7x}{2(2x^2 - x + 3)}$$

Facit: $2x^2 + x - \frac{3}{2} + \frac{6-7x}{2(2x^2-x+3)}$.

☰ Testuppgift 2.4 b och 2.5 – Heltalsrötter och reell faktorisering

Vi anger möjliga heltalsrötter till $z^4 + 2z^3 - 2z^2 + 2z - 3 = 0$, bestämmer alla reella rötter och delar upp polynomet i reella faktorer.

Lösning

Kandidater. Högstgradskoefficienten är 1, så heltalsrötterna delar -3 : $\pm 1, \pm 3$.

Pröva. $p(1) = 1 + 2 - 2 + 2 - 3 = 0$ och $p(-3) = 81 - 54 - 18 - 6 - 3 = 0$, medan $p(-1) = -8$ och $p(3) = 120$.

Dela ut. $(z - 1)(z + 3) = z^2 + 2z - 3$, och divisionen ger

$$z^4 + 2z^3 - 2z^2 + 2z - 3 = (z^2 + 2z - 3)(z^2 + 1).$$

Faktorn $z^2 + 1 \geq 1$ saknar reella rötter. Alltså är de reella rötterna $\boxed{z_1 = 1, z_2 = -3}$ och

$$\boxed{z^4 + 2z^3 - 2z^2 + 2z - 3 = (z - 1)(z + 3)(z^2 + 1)}$$

Facit: $z_1 = 1, z_2 = -3$, övriga rötter är ej reella; $z^4 + 2z^3 - 2z^2 + 2z - 3 = (z - 1)(z + 3)(z^2 + 1)$.

☰ Övningsuppgift 2.9 – Tre rationella rötter

a) Vi löser ekvationen $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ (den har tre olika rationella rötter). b) Vi faktorerar $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$.

Lösning

Kandidater. En rationell rot p/q har $p \mid 2$ och $q \mid 2$: $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$.

Pröva. $p(1) = 2 - 7 + 7 - 2 = 0$. Division med $x - 1$ ger $2x^2 - 5x + 2$, och

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \iff x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \iff x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}.$$

a) $\boxed{x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{1}{2}}$

b) Högstgradskoefficienten 2 måste stå kvar framför:

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 2(x-1)(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Facit: a) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2}$ b) $2(x-1)(x-2)(x - \frac{1}{2})$.

☰ Testuppgift 2.7 d – Olikhet med två nämnare

Vi löser olikheten $\frac{x-2}{x-3} \leq \frac{x+1}{x}$.

Lösning

Allt på en sida.

$$\frac{x-2}{x-3} - \frac{x+1}{x} = \frac{x(x-2) - (x+1)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x^2 - 2x - x^2 + 2x + 3}{x(x-3)} = \frac{3}{x(x-3)} \leq 0.$$

Tecken. Täljaren 3 är positiv och aldrig noll, så uttrycket är ≤ 0 precis när $x(x-3) < 0$.

Faktorerna har olika tecken bara mellan nollställena:

$$0 < x < 3$$

Facit: $0 < x < 3$.

Läsning

- P.6 Polynomials and Rational Functions

Se även

- Komplexa tal
- Integration av rationella funktioner
- Logik och bevisföring
- Mängdlära
- Grafer

Resurser

- [Khan Academy: Factoring polynomials](#) 
-

Grafer

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #funktioner

Kurs: M0065M Förkunskaper: Funktioner

Idén

En graf gör en ekvation till geometri. Punkterna som uppfyller $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$ är inget annat än en cirkel, och det ser vi så fort ekvationen står på rätt form. Omvänt kan vi lösa ekvationer och olikheter genom att läsa av en figur: skärningspunkter är lösningar till ekvationssystem, och $|x - a|$ är ett avstånd på tallinjen.

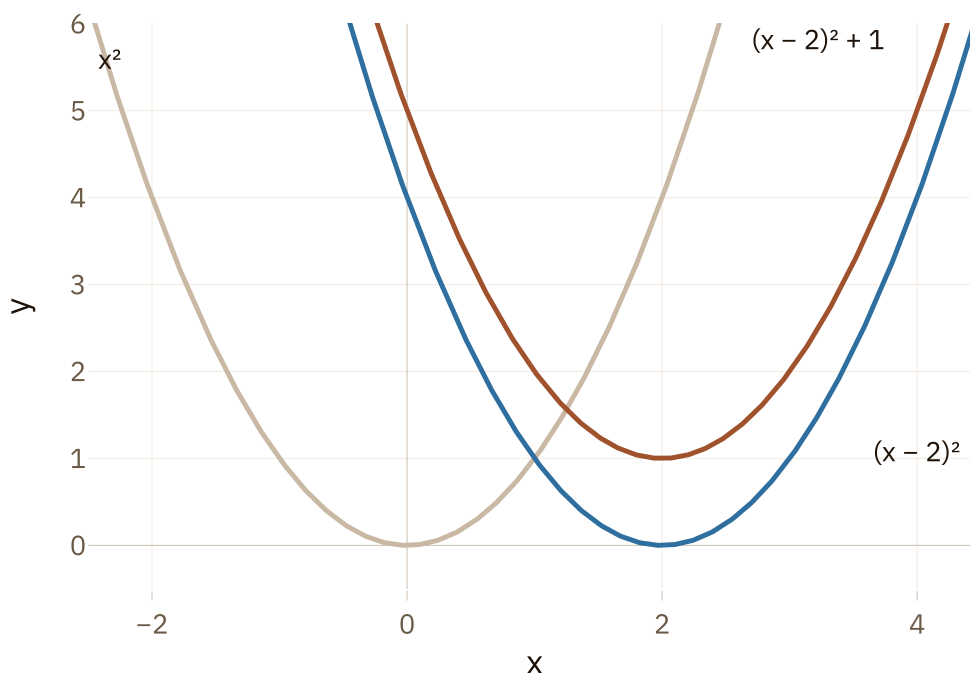
1. Grafen till en funktion eller ekvation

Grafen till en funktion f är mängden

$$\{(x, f(x)) : x \in D_f\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Mer allmänt är grafen till en ekvation (eller olikhet) i x och y mängden av alla punkter (x, y) som uppfyller den.

Att byta x mot $x - 2$ flyttar grafen två steg åt höger; att lägga till 1 flyttar den ett steg uppåt.



Förskjutningar. Grafen till $y = f(x - a) + b$ är grafen till $y = f(x)$ flyttad a steg åt höger och b steg uppåt. Till exempel är $y = (x - 2)^2 + 1$ parabeln $y = x^2$ med vertex flyttad till $(2, 1)$.

2. Vertikala linjetestet

En kurva i planet är grafen till en funktion om och endast om varje vertikal linje skär kurvan i högst en punkt.

3. Räta linjen och avståndsformeln

Genom två punkter $P = (x_1, y_1)$ och $Q = (x_2, y_2)$ med $x_1 \neq x_2$ går en rät linje med **lutningen** (riktningskoefficienten)

$$k = \tan v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

där v är vinkeln mellan linjen och positiva x -axeln. Är $x_1 = x_2$ är linjen vertikal, $x = x_1$.

- **Enpunktsformeln:** linjen med lutning k genom (x_1, y_1) är $y - y_1 = k(x - x_1)$, eller $y = kx + m$ med $m = y_1 - kx_1$.
- **Parallella linjer** har samma lutning, $k_1 = k_2$.
- **Vinkelräta linjer** har $k_1 k_2 = -1$.

Avståndet mellan P och Q följer av Pythagoras sats i den rätvinkliga triangeln med kateterna Δx och Δy :

$$d = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Till exempel är avståndet mellan $(2, 3)$ och $(6, 0)$ lika med $\sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

4. Cirkeln och kägelsnitten

En **cirkel** är mängden av alla punkter i planet som har samma avstånd R till en medelpunkt $M = (x_0, y_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Härledning: cirkelns ekvation

En punkt $P = (x, y)$ ligger på cirkeln precis när $|MP| = R$. Avståndsformeln ger

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

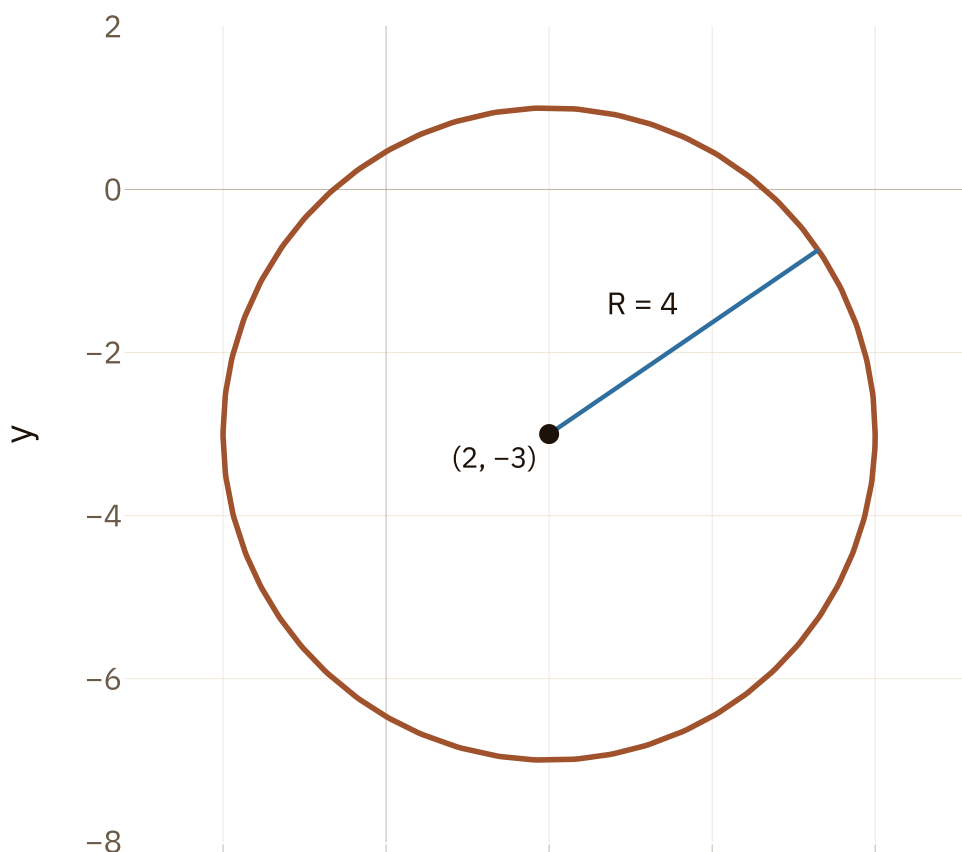
där kvadreringen är en ekvivalens eftersom båda leden är icke-negativa.

Kägelsnitten har följande standardformer (med centrum eller vertex i origo):

Kurva	Ekvation	Geometrisk definition
Parabel	$x^2 = 4ay$	lika långt till fokus $(0, a)$ som till styrlinjen $y = -a$
Ellips	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	summan av avstånden till två fokus är $2a$
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	differensen av avstånden till två fokus är $\pm 2a$

Ellipsen har **halvaxlarna** a och b , och hyperbeln har asymptoterna $y = \pm \frac{b}{a}x$. En förskjuten kurva får $x - x_0$ och $y - y_0$ i stället för x och y . Möter vi en andragradsekvation i x och y utan xy -term kvadratkompletterar vi i x och y var för sig (se **Polynom och faktorisering**) och läser av vilken kurva det är.

Efter kvadratkomplettering syns cirkelns medelpunkt och radie direkt: $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$ är $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.



☰ Exempel – Vilken cirkel?

Ekvationen $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$ beskriver en cirkel. Vi bestämmer medelpunkt och radie.

Lösning

Kvadratkomplettera i x och y var för sig, och lägg till samma tal i båda leden:

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) - 3 = 4 + 9 \iff (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16 = 4^2.$$

medelpunkt $(2, -3)$, $R = 4$

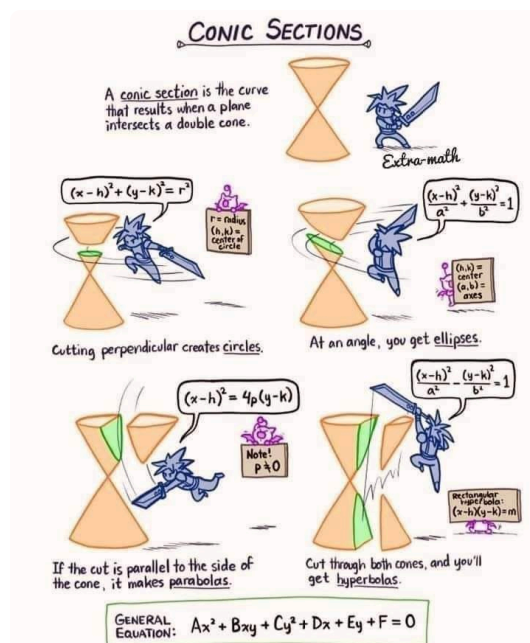
Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Vanliga grafer

- Rät linje: $y = kx + m$
- Parabel: $y = ax^2 + bx + c$

- Hyperbel: $y = 1/x$
- Cirkel (ej funktion): $x^2 + y^2 = r^2$
- Ellips, parabel, hyperbel – se kägelsnitt

Illustrationer



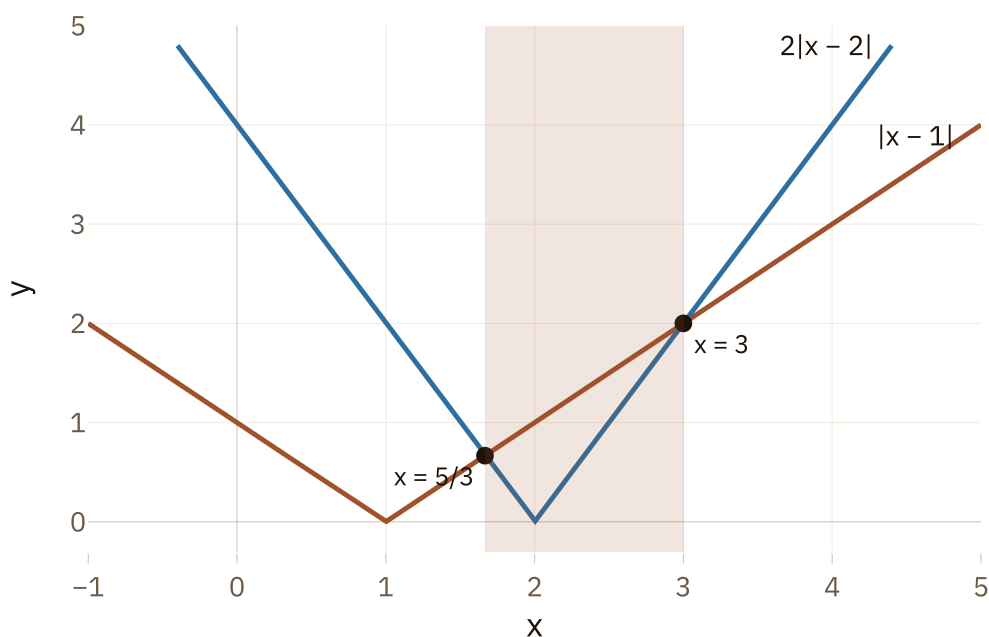
Kägelsnitt: cirkel, ellips, parabel, hyperbel

5. Absolutbelopp

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Geometriskt är $|x|$ avståndet från x till 0 på tallinjen, och $|x - a|$ avståndet mellan x och a . Därför är till exempel $|x - 5| < 3 \iff 2 < x < 8$: alla tal som ligger närmare 5 än 3 enheter.

Olikheten $|x - 1| > 2|x - 2|$ gäller där den första grafen ligger ovanför den andra, alltså för $5/3 < x < 3$.



Ekvationer och olikheter med absolutbelopp löses genom att dela upp tallinjen i intervall där varje belopp har ett bestämt tecken. Varje fall ger en lösning som bara gäller *inom* sitt intervall.

Eftersom $\sqrt{a} \geq 0$ är

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

och inte x ; för $x < 0$ är $\sqrt{x^2} = -x$.

≡ Exempel – Olikhet med två belopp

Vi löser olikheten $|x - 1| > 2|x - 2|$.

Lösning

Beloppen byter uttryck i $x = 1$ och $x = 2$, så vi får tre fall.

$x \geq 2$: $x - 1 > 2(x - 2) \iff x < 3$. Lösningar: $2 \leq x < 3$.

$1 \leq x < 2$: $x - 1 > 2(2 - x) \iff 3x > 5 \iff x > \frac{5}{3}$. Lösningar: $\frac{5}{3} < x < 2$.

$x < 1$: $1 - x > 2(2 - x) \iff x > 3$, vilket inte ligger i intervallet. Inga lösningar.

Sammanställ.

$$\frac{5}{3} < x < 3$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

⚠ Vanliga fel

- **Fel håll vid förskjutning.** $y = f(x - 2)$ är grafen flyttad två steg åt *höger*, inte vänster.
- **Obalanserad kvadratkomplettering.** Talen som läggs till i vänsterledet (4 och 9 ovan) måste läggas till även i högerledet.
- **Radien är inte högerledet.** $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ har $R = 4$, inte 16.
- **Behålla en lösning utanför sitt fall.** I beloppsfallet $x < 1$ ger räkningen $x > 3$, som ska förkastas.
- $\sqrt{x^2} = x$. Rätt är $|x|$.

6. Lösta övningar

☰ Testuppgift 2.9 b – Ellipsens halvaxlar

Vi bestämmer halvaxlar och medelpunkt för ellipsen $4x^2 + 4x + 16y^2 - 32y + 1 = 0$.

✎ Lösning

Bryt ut koefficienterna framför kvadrattermerna och kvadratkomplettera:

$$4(x^2 + x) + 16(y^2 - 2y) + 1 = 0 \iff 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 16(y - 1)^2 - 16 + 1 = 0.$$

Standardform. $4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 16(y - 1)^2 = 16$, och division med 16 ger

$$\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{2^2} + \frac{(y - 1)^2}{1^2} = 1.$$

$$a = 2, \quad b = 1, \quad \text{centrum } \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

Facit: Halvaxlar $a = 2$, $b = 1$, Centrum $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Övningsuppgift 2.15 – Linje skär cirkel

Vi bestämmer i vilka punkter linjen $y = x + 1$ skär cirkeln $2x^2 + 6x + 2y^2 - 10y + 4 = 0$.

Lösning

Sätt in $y = x + 1$ i cirkelns ekvation:

$$2x^2 + 6x + 2(x + 1)^2 - 10(x + 1) + 4 = 4x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 1.$$

Motsvarande y från linjen: $x = 1$ ger $y = 2$, $x = -1$ ger $y = 0$.

$$(1, 2) \text{ och } (-1, 0)$$

Kontroll. $(-1, 0)$: $2 - 6 + 0 - 0 + 4 = 0$. $(1, 2)$: $2 + 6 + 8 - 20 + 4 = 0$.

Facit: $(1; 2)$ och $(-1; 0)$.

Testuppgift 2.12 – Belopp mot linje

Vi bestämmer för vilka reella x som $|x - 2| \leq x + 3$.

Lösning

$x \geq 2$: $x - 2 \leq x + 3 \iff -2 \leq 3$, sant för alla x i fallet. Lösningar: $x \geq 2$.

$x < 2$: $2 - x \leq x + 3 \iff x \geq -\frac{1}{2}$. Lösningar: $-\frac{1}{2} \leq x < 2$.

Sammanställ.

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

Facit: $x \geq -\frac{1}{2}$.

☰ Testuppgift 2.13 – Summa av två belopp

Vi löser ekvationen $|x| + |x + 1| = 3$.

Lösning

Beloppen byter uttryck i $x = -1$ och $x = 0$:

$$|x| + |x + 1| = \begin{cases} -2x - 1, & x < -1 \\ 1, & -1 \leq x < 0 \\ 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$x < -1$: $-2x - 1 = 3 \iff x = -2$, som ligger i intervallet.

$-1 \leq x < 0$: $1 = 3$ är falskt; inga lösningar.

$x \geq 0$: $2x + 1 = 3 \iff x = 1$, som ligger i intervallet.

$$\boxed{x_1 = -2, \quad x_2 = 1}$$

Facit: $x_1 = -2, x_2 = 1$.

Läsning

- [P.3 Graphs of Quadratic Equations](#)
- [P.4 Functions and Their Graphs](#)

Se även

- [Funktioner](#)
- [Polynom och faktorisering](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)
- [Mängdlära](#)
- [Funktioner och invers](#)

Funktioner

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#envariabelanalys #funktioner

Kurs: M0065M Förkunskaper: Inga

1. Grundidé

Idén. En funktion är analysens grundobjekt: ett samband där varje tillåtet indata bestämmer exakt ett utdata — sträckan som funktion av tiden, arean som funktion av radien. Allt vi senare gör i kursen är verktyg för att undersöka sådana samband.

Definition

En funktion $f : A \rightarrow B$ tilldelar varje $x \in A$ exakt ett värde $f(x) \in B$.

Det viktiga är att varje tillåtet x har **ett och endast ett** funktionsvärde.

$$f : A \rightarrow B, \quad x \mapsto f(x)$$

2. Centrala begrepp

Begrepp	Betydelse
Definitionsmängd D_f	Alla tillåtna x
Värdemängd V_f	Alla värden funktionen faktiskt antar, $V_f = \{f(x) : x \in D_f\}$
Målmängd	Den mängd funktionen sägs avbilda till
Funktionsvärde $f(a)$	Värdet när $x = a$

 Note

Värdemängden behöver inte vara samma sak som målmängden. Är de lika, $V_f = B$, säger vi att f är **surjektiv**.

Exempel: För $f(x) = x^2$ med $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är målmängden $\mathbb{R}$, men värdemängden är $[0, \infty)$. Funktionen $f(x) = x^3$ med $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är däremot surjektiv.

 Underförstådd definitions mängd

Står definitions mängden inte uttryckligen utskriven antar vi att den är **den största mängd där uttrycket är definierat**. Två funktioner f och g är **lika** om $D_f = D_g$ och $f(x) = g(x)$ för alla $x \in D_f$.

Därför är $f(x) = x + 1$ och $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ **inte** lika: de har samma värden överallt utom i $x = 1$, där g inte är definierad.

 Bestäm definitions mängden

För $f(x) = \frac{1}{x-2}$ måste nämnaren vara skild från noll.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

 Bestäm definitions mängd och värdemängd

För $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ krävs $4 - x^2 \geq 0$, alltså $-2 \leq x \leq 2$.

$$D_f = [-2, 2], \quad V_f = [0, 2]$$

 Exempel – Definitions- och värdemängd för $g(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x-2}}$

Vi bestämmer definitions mängd och värdemängd för

$$g(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x-2}}.$$

 Lösning

Definitionsmängd. För $x < 2$ är talet under rottecknet negativt. För $x = 3$ är nämnaren $1 - \sqrt{1} = 0$. Alltså

$$D_g = [2, 3) \cup (3, \infty)$$

Värdemängd. Vi följer nämnaren $1 - \sqrt{x - 2}$:

- $x = 2$ ger $g(2) = 1$. När x växer från 2 mot 3 minskar nämnaren från 1 mot 0 men är positiv, så $g(x)$ växer från 1 mot $+\infty$.
- För $x > 3$ är nämnaren negativ. När $x \rightarrow 3^+$ går nämnaren mot 0 och $g(x) \rightarrow -\infty$; när $x \rightarrow +\infty$ går nämnaren mot $-\infty$ och $g(x) \rightarrow 0$ underifrån.

$$V_g = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$$

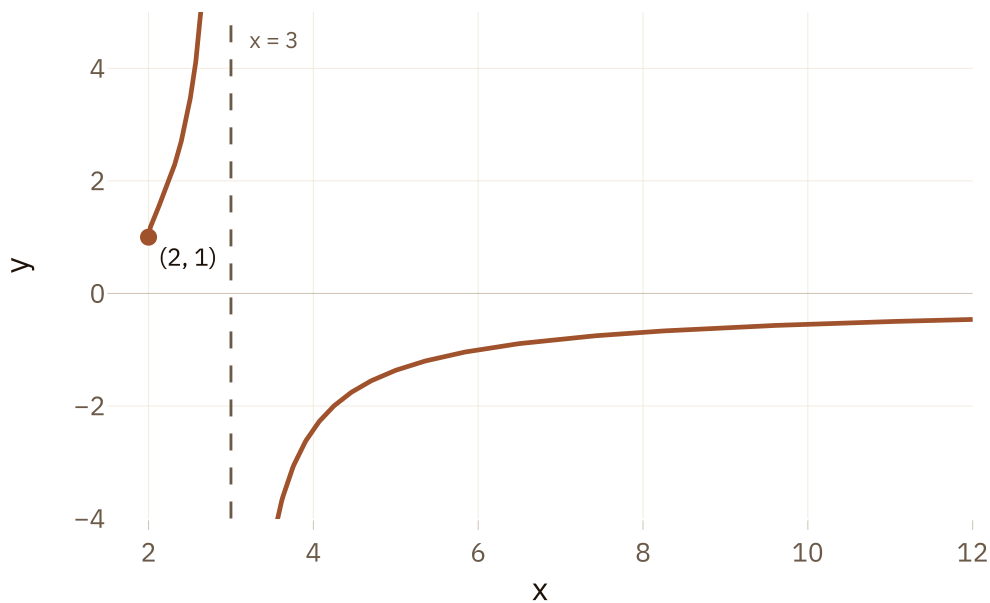
Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget (föreläsning 6).

3. Grafen till en funktion

Grafen består av alla punkter $(x, f(x))$ där $x \in D_f$.

$$\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$$

Grafen till $g(x) = 1/(1 - \sqrt{x - 2})$: definitionsmängden börjar i $x = 2$ och har ett hål i $x = 3$, där grafen har en lodrät asymptot.



Tip

Vertikala linjetestet: en kurva är grafen till en funktion om varje vertikal linje skär kurvan i högst en punkt.

Cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ klarar inte testet: att lösa ut y ger $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$, alltså två värden för varje $x \in (-2, 2)$.

4. Sammansättning av funktioner

Om f och g är funktioner definieras sammansättningen som

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Här appliceras g först och sedan f – en sammansatt funktion evalueras alltid inifrån och ut.

Definitionsmängden blir

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}.$$

Exempel på sammansättning

Låt $f(x) = x^2$ och $g(x) = \sin x$.

$$(f \circ g)(x) = \sin^2 x, \quad (g \circ f)(x) = \sin(x^2)$$

Alltså är sammansättning i allmänhet **inte kommutativ**.

≡ Exempel – Fyra sammansättningar och deras definitionsmängder

Låt $f(x) = \frac{2}{x}$ och $g(x) = \frac{x}{1-x}$. Vi bildar $f \circ f, f \circ g, g \circ f$ och $g \circ g$ och anger definitionsmängderna.

Lösning

Här är $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ och $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. För varje sammansättning utesluter vi dels de x där den inre funktionen inte är definierad, dels de x där den inre funktionen hamnar utanför den yttre funktionens definitionsmängd.

a) $(f \circ f)(x) = f\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{2/x} = x$, med $D_{f \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Trots att uttrycket x är definierat överallt ärver vi $x \neq 0$ från den inre funktionen.

b) $(f \circ g)(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{2(1-x)}{x}$, med $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$: $x = 1$ utesluts av den inre funktionen och $x = 0$ eftersom $g(0) = 0 \notin D_f$.

c) $(g \circ f)(x) = g\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2/x}{1-2/x} = \frac{2}{x-2}$, med $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

d) $(g \circ g)(x) = \frac{x/(1-x)}{1-x/(1-x)} = \frac{x}{1-2x}$, med $D_{g \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget (föreläsning 6).

5. Varför funktioner är centrala i analys

I envariabelanalys studerar vi hur funktioner beter sig:

- nära en punkt → **Gränsvärden**
- utan hopp → **Kontinuitet**
- hur snabbt de förändras → **Derivata**
- hur deras areor och ackumulation beskrivs → **Integraler**

⚠ Vanliga fel

- **Att förenkla bort en definitionslucka.** $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ gäller bara för $x \neq 1$. Samma sak i sammansättningar: $(f \circ f)(x) = x$ ovan är inte definierad i $x = 0$.
- **Att glömma villkoret** $g(x) \in D_f \cap D_{f \circ g}$. Det räcker inte att titta på det förenklade slututtrycket.
- **Fel ordning i** $f \circ g$. g verkar först; $(f \circ g)(x)$ och $(g \circ f)(x)$ är oftast olika.
- **Rot av en kvot.** $\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$ kräver att *kvoten* är ≥ 0 och att nämnaren är $\neq 0$ — inte att täljare och nämnare var för sig är positiva. Teckentabell ger $(-2, 3]$.

6. Lösta övningar

≡ Övningsuppgift 3.1 — Definierar ekvationen en funktion av x ?

Vi avgör vilka av följande uttryck som definierar y som en funktion av x :

- a) $x + y = 1$ b) $x^2 + y = 1$ c) $x + y^2 = 1$ d) $x^2 + y^2 = 1$ e) $x^2 + y^2 = 0$ f) $x^2 - y^2 = 0$ g) $x^4 + y = 0$
 h) $x^4 - y = 0$ i) $x^2 + 4x + y = 5$ j) $x + 4y + y^2 = 5$ k) $\sqrt{x} + y = 0$ l) $x + \sqrt{y} = 0$ m) $x + y^2 = 1, y \geq 0$.

Lösning

Metod. Vi löser ut y . Får vi ett entydigt y för varje tillåtet x är det en funktion; får vi två värden (ett $\pm$) för något x är det inte en funktion — det är det vertikala linjetestet i algebraisk form.

	Löst för y	Funktion?
a	$y = 1 - x$	ja
b	$y = 1 - x^2$	ja
c	$y = \pm\sqrt{1 - x}$	nej
d	$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$	nej
e	enda punkten är $x = 0, y = 0$	ja, med $D = \{0\}$

	Löst för y	Funktion?
f	$y = \pm x$	nej
g	$y = -x^4$	ja
h	$y = x^4$	ja
i	$y = 5 - 4x - x^2$	ja
j	$(y + 2)^2 = 9 - x$, alltså $y = -2 \pm \sqrt{9 - x}$	nej
k	$y = -\sqrt{x}$	ja
l	$\sqrt{y} = -x$ kräver $x \leq 0$, och då $y = x^2$	ja
m	$y = \sqrt{1 - x}$ (villkoret $y \geq 0$ väljer en gren)	ja

Funktion: a, b, e, g, h, i, k, l, m. Ej funktion: c, d, f, j.

Facit: a) Funktion b) Funktion c) Ej funktion $[y = \pm \sqrt{1-x}]$ d) Ej funktion $[y = \pm \sqrt{1-x^2}]$ e) Funktion $[y = 0, x = 0]$ f) Ej funktion $[y = \pm x]$ g) Funktion h) Funktion i) Funktion j) Ej funktion $[y = -2 \pm \sqrt{9-x}]$ k) Funktion l) Funktion $[y = x^2, x \leq 0]$ m) Funktion $[y = \sqrt{1-x}]$.

Övningsuppgift 3.2 – Definitionsmängder

Vi bestämmer definitionsmängden för följande funktioner av x :

a) $y = 2 - x$ b) $y = 4x^2$ c) $y = x^2 - 2x - 3$ d) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ e) $y = \frac{3-x}{x+2}$ f) $y = \sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$ g) $x^2 + y^2 = 16, y \geq 0$ h) $\frac{y}{x} = 1$.

Lösning

a–c) Polynom är definierade för alla reella x : $D_f = \mathbb{R}$.

d) Vi kräver $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) \geq 0$. Parabolen är negativ bara mellan nollställena:

$$D_f = \{x : x \leq -1 \text{ eller } x \geq 3\}$$

e) Nämnaren får inte vara noll: $D_f = \{x : x \neq -2\}$.

f) Vi kräver $\frac{3-x}{x+2} \geq 0$ och $x \neq -2$. Teckentabell:

	$x < -2$	$-2 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$3 - x$	+	+	0	-
$x + 2$	-	+	+	+
kvot	-	+	0	-

$$D_f = \{x : -2 < x \leq 3\}$$

g) $y = \sqrt{16 - x^2}$ (villkoret $y \geq 0$ väljer den övre halvcirkeln), som kräver $16 - x^2 \geq 0$:

$$D_f = \{x : -4 \leq x \leq 4\}.$$

h) $y = x$, men bara där ekvationen $y/x = 1$ är meningsfull: $D_f = \{x : x \neq 0\}$. Samma fälla som $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ovan.

Facit: a) $D_f = \mathbb{R}$ b) $D_f = \mathbb{R}$ c) $D_f = \mathbb{R}$ d) $D_f = \{x : (x \leq -1) \vee (x \geq 3)\}$ e) $D_f = \{x : x \neq -2\}$ f) $D_f = \{x : -2 < x \leq 3\}$ g) $D_f = \{x : -4 \leq x \leq 4\}$ h) $D_f = \{x : x \neq 0\}$.

Läsning

- [P.4 Functions and Their Graphs](#)
- [P.5 Combining Functions](#)

Se även

- [Funktioner och invers](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Kontinuitet](#)
- [Derivata](#)
- [Integraler](#)

Resurser

- [Khan Academy: What is a function?](#)
- [Wikipedia: Function \(mathematics\)](#)

Funktioner och invers

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #funktioner #envariabelanalys #invers

Kurs: M0065M Förkunskaper: Funktioner

1. När finns en invers?

Idén. En invers funktion *gör om* det funktionen gjorde: vet vi utdata $y = f(x)$ vill vi kunna räkna tillbaka till indata x . Det är så $\ln$ löser ekvationer med e^x och $\arcsin$ löser ekvationer med $\sin x$.

Definition

En funktion f har en invers om man entydigt kan gå tillbaka från funktionsvärdet till ursprungsvärdet.

För att detta ska fungera måste funktionen vara **injektiv** (ett-till-ett), det vill säga varje $y \in V_f$ är bilden av exakt ett $x \in D_f$:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Det betyder att olika x aldrig får ge samma funktionsvärde.

Tip

Horisontella linjetestet: en funktion är injektiv om varje horisontell linje skär grafen i högst en punkt.

Definitionen kan också skrivas $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$. För att *visa* injektivitet är formen i rutan ovan (kontrapositionen) oftast enklare: vi antar $f(x_1) = f(x_2)$ och räknar fram $x_1 = x_2$.

2. Definition av invers funktion

Om f är injektiv kan dess invers $f^{-1} : V_f \rightarrow D_f$ definieras på värdemängden:

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$$

De viktigaste sambanden, **kancelleringslagarna**, är

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in D_f \quad \text{och} \quad f(f^{-1}(y)) = y, y \in V_f$$

Definitions- och värdemängd byter plats:

$$D_{f^{-1}} = V_f, \quad V_{f^{-1}} = D_f.$$

Inversen är själv injektiv, och dess invers är f igen: $(f^{-1})^{-1} = f$.

Warning

Symbolen f^{-1} betyder **inte** $\frac{1}{f}$.

3. Hur man hittar inversen

Praktisk metod:

1. Sätt $y = f(x)$
2. Lös ut x i termer av y
3. Byt namn från y till x

Exempel

Låt $f(x) = 2x + 3$.

$$y = 2x + 3 \iff x = \frac{y - 3}{2}$$

Alltså

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2}$$

☰ Begränsa definitionsmängden först

Funktionen $f(x) = x^2$ är inte injektiv på hela $\mathbb{R}$: till exempel är $f(-1) = 1 = f(1)$ men $-1 \neq 1$.

Men på intervallet $[0, \infty)$ blir den injektiv och då är inversen

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Ekvationen $x = y^2$ ger $y = \pm\sqrt{x}$; vi förkastar den negativa lösningen eftersom inversens värden ska ligga i $D_f = [0, \infty)$.

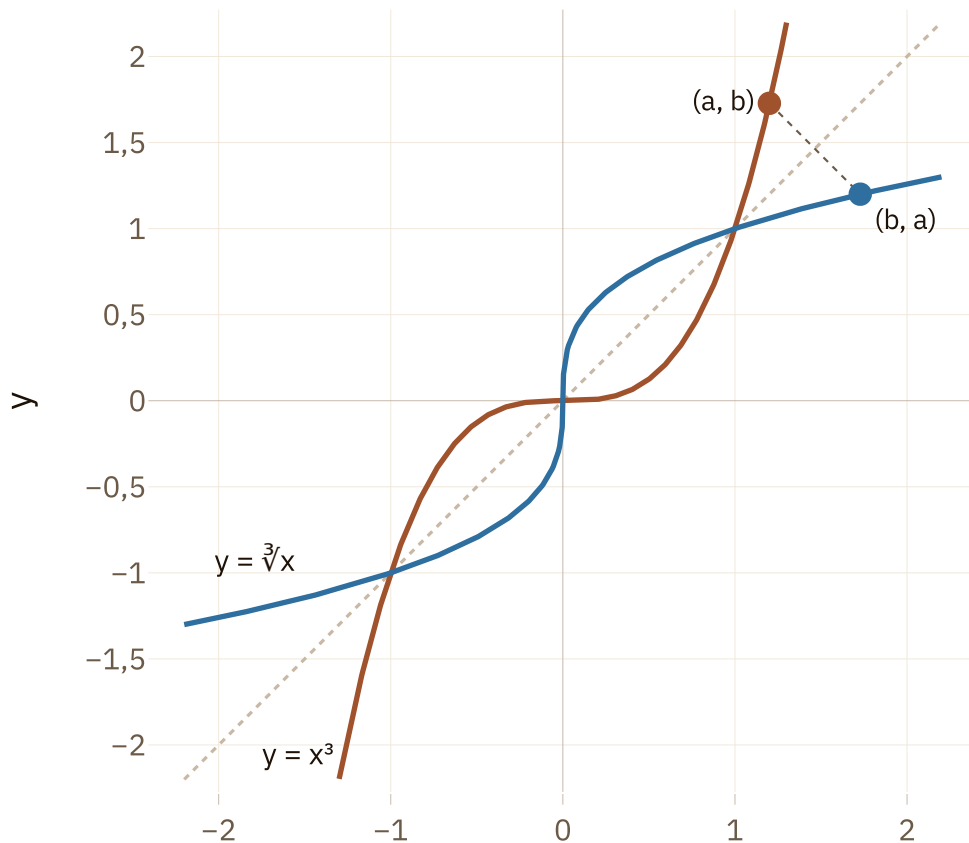
4. Geometrisk tolkning

Grafen till f^{-1} fås genom spegling av grafen till f i linjen

$$y = x.$$

Punkten (a, b) på grafen till f motsvarar punkten (b, a) på grafen till f^{-1} .

Punkten (a, b) på grafen till f blir (b, a) på grafen till f^{-1} — spegling i linjen $y = x$.



Härledning

(a, b) ligger på grafen till $f \iff b = f(a) \iff a = f^{-1}(b) \iff (b, a)$ ligger på grafen till f^{-1} .

Punkterna (a, b) och (b, a) är varandras spegelbilder i $y = x$: mittpunkten $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$ ligger på linjen, och sträckan mellan dem har riktning $(b - a, a - b)$, som är vinkelrät mot linjens riktning $(1, 1)$.

5. Monotona funktioner

Låt f vara definierad på ett intervall I och $x_1, x_2 \in I$. Funktionen är

om $x_1 < x_2$ medför

strängt växande $f(x_1) < f(x_2)$

strängt avtagande $f(x_1) > f(x_2)$

om $x_1 < x_2$ medför

växande	$f(x_1) \leq f(x_2)$
avtagande	$f(x_1) \geq f(x_2)$

En funktion som är (strängt) växande eller (strängt) avtagande på hela D_f kallas (strängt) **monoton**.

Sats

En strängt monoton funktion är injektiv och har därför en invers.

Härledning

Antag att f är strängt växande och att $x_1 \neq x_2$. Då är ett av talen minst, säg $x_1 < x_2$, och då är $f(x_1) < f(x_2)$, alltså $f(x_1) \neq f(x_2)$. Det är precis injektivitet. Fallet strängt avtagande går likadant.

Note

Villkoret gäller på **hela** definitionsmängden. $\tan x$ är strängt växande på $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ men inte på $D_{\tan}$: $\frac{\pi}{4} < \pi$ men $\tan \pi = 0 < 1 = \tan \frac{\pi}{4}$. Därför begränsar vi till $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ innan vi inverterar och får **arctan**.

6. Viktiga exempel

Funktion	Invers
e^x	$\ln x$
a^x	$\log_a x$
x^3	$\sqrt[3]{x}$
x^2 på $[0, \infty)$	$\sqrt{x}$

Inversa funktioner dyker också upp för trigonometriska funktioner när man först begränsar definitionsmängden, t.ex. $\sin x \leftrightarrow \arcsin x$.

⚠ Vanliga fel

- $f^{-1}(x)$ tolkas som $\frac{1}{f(x)}$. För $f(x) = 2x + 3$ är $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$, inte $\frac{1}{2x+3}$.
- Inversen anges utan definitionsmängd. $D_{f^{-1}} = V_f$ för $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ är inversen inte definierad i $x = 1$, eftersom f aldrig antar värdet 1.
- Att invertera en icke-injektiv funktion. x^2 på $\mathbb{R}$ har ingen invers; vi måste först begränsa till t.ex. $[0, \infty)$ och sedan välja rätt tecken på roten.
- Att tro att "växande på varje intervall" räcker. $\tan x$ är växande på varje delintervall av $D_{\tan}$ men inte injektiv på hela $D_{\tan}$.

7. Lösta övningar

≡ Föreläsning 6, exempel – Inversen till x^3

Vi visar att $f(x) = x^3$ är injektiv och beräknar inversen f^{-1} .

✎ Lösning

Injektivitet. Antag $f(x_1) = f(x_2)$, alltså $x_1^3 = x_2^3$. Faktorisering ger

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0.$$

Den andra faktorn kvadratkompletteras:

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 \geq 0,$$

med likhet bara om $x_1 = x_2 = 0$. I båda fallen är $x_1 = x_2$, så f är injektiv.

Inversen. $D_f = V_f = \mathbb{R}$. Vi söker $y = f^{-1}(x) \iff x = f(y) = y^3 \iff y = x^{1/3}$:

$$\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}, \quad f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 6, exempel — $x^3 + x$ är strängt växande

Vi visar att $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x$, är strängt växande på hela $\mathbb{R}$ och därmed har en invers.

Lösning

Låt $x_1 < x_2$, alltså $x_2 - x_1 > 0$. Då är

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2^3 - x_1^3) + (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + 1) \\ &= \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \underbrace{\left((x_2 + \frac{x_1}{2})^2 + \frac{3}{4}x_1^2 + 1 \right)}_{\geq 1} > 0. \end{aligned}$$

Alltså $f(x_1) < f(x_2)$: f är strängt växande, och enligt satsen i avsnitt 5 har den en invers.

Inversen går inte att skriva med elementära uttryck utan en tredjegradsformel, men satsen garanterar att den finns.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Övning — Inversen till en rationell funktion

Vi visar att $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ är injektiv, bestämmer D_f och V_f och beräknar f^{-1} med definitionsmängd.

Lösning

Definitionsmängd. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Lös ut $x, y = \frac{x+1}{x-2} \iff y(x-2) = x+1 \iff x(y-1) = 2y+1$. För $y \neq 1$ ger det ett entydigt

$$x = \frac{2y+1}{y-1},$$

medan $y = 1$ leder till $0 = 3$, som saknar lösning. Varje $y \neq 1$ har alltså exakt ett Urbild: f är injektiv och $V_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Byt namn.

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}, \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad V_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Kontroll. $f(0) = -\frac{1}{2}$ och $f^{-1}(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+1}{-\frac{3}{2}} = 0$. Definitions- och värdemängd har bytt plats, som de ska.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- [3.1 Inverse Functions](#)

Se även

- [Funktioner](#)
- [Derivata](#)
- [Taylors formel](#)
- [Arcusfunktioner](#)
- [Exponentialfunktioner och logaritmer](#)
- [Inversa funktioners derivata](#)

Resurser

- [Khan Academy: Inverse functions](#) [↗](#)
- [Wikipedia: Inverse function](#) [↗](#)

Exponentialfunktioner och logaritmer

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #funktioner

Kurs: M0065M Förkunskaper: Funktioner

Grundtanken

Exponentialfunktionen beskriver tillväxt där ökningen är proportionell mot det som redan finns. Logaritmen är dess **invers**: den svarar på frågan *vilken exponent ger det här talet?* och är därför verktyget för att lösa ut en obekant ur en exponent.

1. Exponentialfunktionen

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, a \neq 1$$

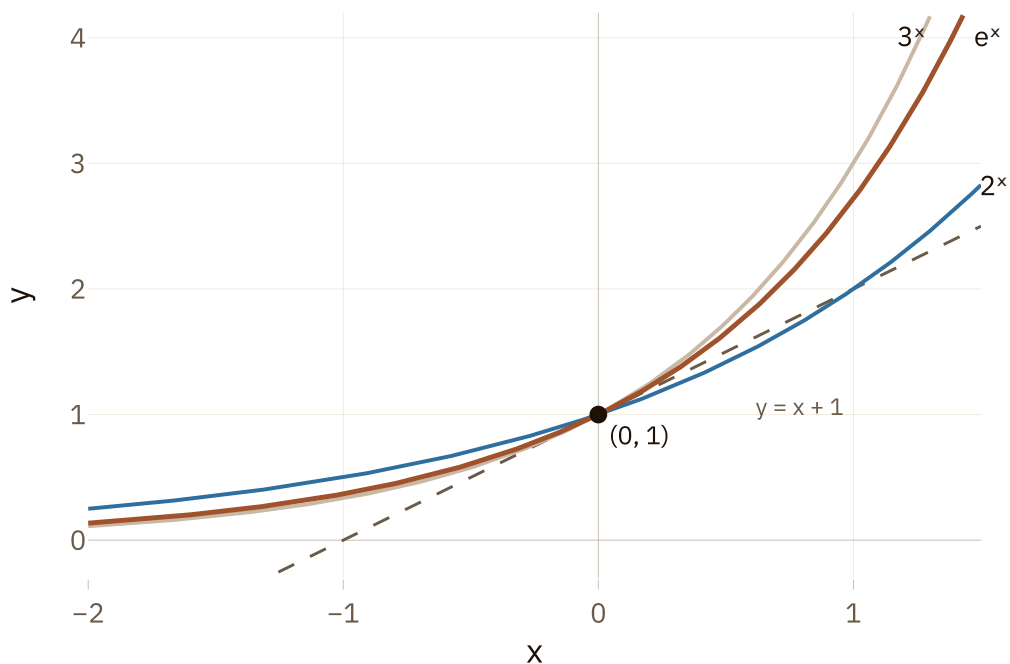
Här är basen a fix och exponenten $x \in \mathbb{R}$, så $D_f = \mathbb{R}$. För $a > 0, b > 0$ och $x, y \in \mathbb{R}$ gäller potenslagarna

$$a^0 = 1, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

- $a > 1$: a^x är **strängt växande**.
- $0 < a < 1$: a^x är **strängt avtagande**.
- $a = 1$: $1^x = 1$ är konstant (därför undantas $a = 1$).

I de två första fallen är $V_f = (0, \infty)$: en exponentialfunktion är alltid positiv.

Alla exponentialfunktioner a^x går genom $(0, 1)$. Talet e är den bas där lutningen där är exakt 1.



Talet e . Ju större bas $a > 1$, desto brantare är tangenten till $y = a^x$ i punkten $(0, 1)$. Det finns precis ett värde på a som gör lutningen där lika med 1; det kallas e . Den naturliga exponentialfunktionen är e^x , där $e \approx 2,718$.

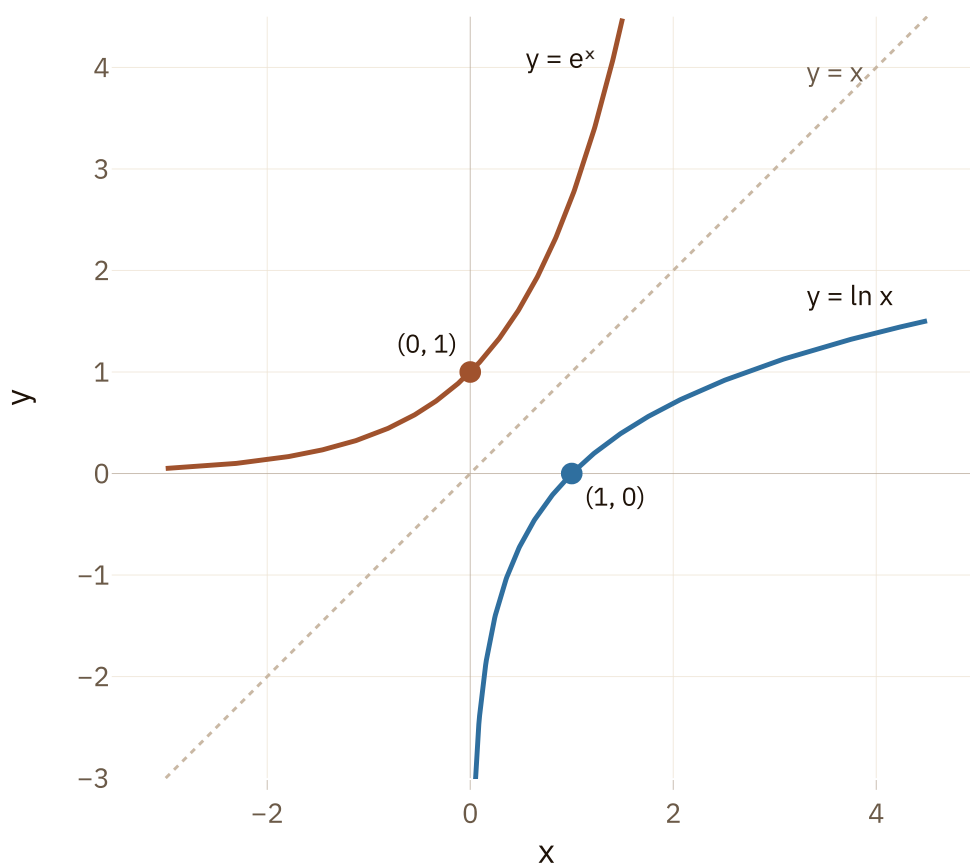
2. Logaritmen

Eftersom a^x är strängt monoton för $a > 0$, $a \neq 1$, är den injektiv och har en invers. Logaritmen är invers till exponentialfunktionen:

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

Den naturliga logaritmen är $\ln x = \log_e x$, och tiologaritmen skrivs $\lg x = \log_{10} x$.

$\ln x$ är inversen till e^x , så graferna är speglingar av varandra i $y = x$.



Eftersom definitions- och värdemängd byter plats vid invertering är

$$D_{\log_a} = (0, \infty), \quad V_{\log_a} = \mathbb{R},$$

och kancelleringslagarna blir

$$\log_a(a^x) = x \text{ för alla } x \in \mathbb{R}, \quad a^{\log_a x} = x \text{ för } x > 0.$$

Speciellt är $\ln 1 = 0$ och $\ln e = 1$.

≡ Exempel – Tre ekvationer (föreläsning 7)

Vi löser ekvationerna

a) $5^{3x} = 6$ b) $\sqrt{\ln x} = \ln \sqrt{x}$ c) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$.

Lösning

a) Vi logaritmerar: $\ln 5^{3x} = \ln 6 \iff 3x \ln 5 = \ln 6$, alltså

$$x = \frac{\ln 6}{3 \ln 5} \approx 0,371.$$

b) Vi kräver $x > 0$ och $\ln x \geq 0$. Högerledet är $\ln x^{1/2} = \frac{1}{2} \ln x$. Med $t = \ln x$ blir ekvationen $\sqrt{t} = \frac{t}{2}$, och kvadrering ger $t = \frac{t^2}{4} \iff t(t-4) = 0$. Alltså $t = 0$ eller $t = 4$, och båda uppfyller $t \geq 0$ och $\sqrt{t} = \frac{t}{2}$:

$$x = 1 \text{ eller } x = e^4$$

c) Med $t = e^x > 0$ blir ekvationen $t^2 + 3t - 4 = (t-1)(t+4) = 0$. Roten $t = -4$ förkastas eftersom $e^x > 0$, så $t = 1$ och

$$x = 0$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

3. Räkner regler

För $x > 0, y > 0$ och $a > 0, a \neq 1$ gäller

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a(x^p) = p \log_a x$$

och speciellt $\log_a 1 = 0$ och $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$. För den naturliga logaritmen är det samma regler:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln(x^p) = p \ln x, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

Härledning

Varje logaritmlag är en potenslag läst baklänges.

Produkt. Sätt $u = \log_a x$ och $v = \log_a y$, alltså $x = a^u$ och $y = a^v$. Då är $xy = a^u a^v = a^{u+v}$, och därmed $\log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$.

Kvot. Med samma u, v är $\frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$, så $\log_a \frac{x}{y} = u - v$.

Potens. Med $u = \log_a x$ är $x^p = (a^u)^p = a^{up}$, så $\log_a x^p = up = p \log_a x$.

Ett. $a^0 = 1 \iff \log_a 1 = 0$.

Exempel – Förenkla (föreläsning 7)

Vi förenklar $2 \ln 5 + 3 \ln 3 - \ln 75$.

Lösning

$$2 \ln 5 + 3 \ln 3 - \ln 75 = \ln 5^2 + \ln 3^3 - \ln (3 \cdot 5^2) = \ln \frac{5^2 \cdot 3^3}{3 \cdot 5^2} = \ln 3^2 = \boxed{2 \ln 3}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

4. Basbyte

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}} \quad \text{speciellt} \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Härledning

Sätt $u = \log_a x$, alltså $x = a^u$. Logaritmera i bas b : $\log_b x = \log_b a^u = u \log_b a$. Division med $\log_b a$ (som är $\neq 0$ eftersom $a \neq 1$) ger $u = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Basbytet är det som låter oss slå ihop logaritmer i olika baser, till exempel $\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{2}$, och det ger identiteten $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Vanliga fel

- $\ln(x + y) \neq \ln x + \ln y$. Logaritmen gör om *produkter* till summor, inte summor till något enklare.
- **Falska rötter.** Logaritmlagarna gäller bara för positiva argument. Skriver vi $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = \log_2(x^2 - 1)$ vidgar vi definitionsmängden, och roten $x = -3$ av den nya ekvationen måste förkastas. Ange därför villkoret (här $x > 1$) **innan** du räknar och pröva rötterna mot det.
- $\ln(x^2) = 2 \ln x$ **för alla** x . Det gäller bara för $x > 0$. För $x \neq 0$ är $\ln(x^2) = 2 \ln |x|$.
- $(\ln x)^2$ och $\ln(x^2)$ **blandas ihop**. Det första är en kvadrat av en logaritm, det andra är $2 \ln x$ (för $x > 0$).

5. Lösta övningar

≡ Föreläsning 8, exempel – En logaritmekvation med falsk rot

Vi löser ekvationen $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$.

Lösning

Villkor. Båda logaritmerna är definierade bara om $x+1 > 0$ och $x-1 > 0$, alltså $x \in (1, \infty)$.

Slå ihop. $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = \log_2(x^2-1) = 3$ ger $x^2-1 = 2^3 = 8$, alltså $x^2 = 9$ och $x = \pm 3$.

Pröva mot villkoret. $-3 \notin (1, \infty)$, så

$$\boxed{x = 3}$$

Kontroll. $\log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 8, exempel – En kvot av tiologaritmer

Vi löser ekvationen $\frac{\lg 2x}{\lg(4x-15)} = 2$.

Lösning

Villkor. $2x > 0$ och $4x-15 > 0$ ger $x > \frac{15}{4}$. Dessutom får nämnaren inte vara noll: $\lg(4x-15) = 0 \iff 4x-15 = 1 \iff x = 4$. Alltså $x \in (\frac{15}{4}, \infty)$, $x \neq 4$.

Lös. $\lg 2x = 2 \lg(4x-15) = \lg(4x-15)^2$, och eftersom $\lg$ är injektiv är

$$2x = (4x-15)^2 = 16x^2 - 120x + 225 \iff 16x^2 - 122x + 225 = 0.$$

Med $61^2 - 15^2 \cdot 4^2 = 61^2 - 60^2 = 121$ blir

$$x = \frac{61 \pm \sqrt{121}}{16} = \frac{61 \pm 11}{16} \in \left\{ \frac{9}{2}, \frac{25}{8} \right\}.$$

Pröva mot villkoret. $\frac{25}{8} < \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$ förkastas, medan $\frac{9}{2} = \frac{18}{4} > \frac{15}{4}$ duger:

$$\boxed{x = \frac{9}{2}}$$

Kontroll. $\frac{\lg 9}{\lg 3} = \frac{2 \lg 3}{\lg 3} = 2.$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 8, exempel – Exponentialekvation med substitution

Vi löser ekvationen $2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^x = 0$.

Lösning

Dela med $4^x > 0$.

$$2 \left(\frac{9}{4} \right)^x - 5 \left(\frac{6}{4} \right)^x + 3 = 0.$$

Substitution. Eftersom $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ och $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2} \right)^2$ sätter vi $t = \left(\frac{3}{2} \right)^x > 0$, så att $t^2 = \left(\frac{9}{4} \right)^x$:

$$2t^2 - 5t + 3 = (2t - 3)(t - 1) = 0 \iff t = \frac{3}{2} \text{ eller } t = 1.$$

Båda är positiva. $\left(\frac{3}{2} \right)^x = \frac{3}{2}$ ger $x = 1$ och $\left(\frac{3}{2} \right)^x = 1$ ger $x = 0$:

$$\boxed{x = 0 \text{ eller } x = 1}$$

Kontroll. $x = 0$: $2 - 5 + 3 = 0$. $x = 1$: $18 - 30 + 12 = 0$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Läsning

- [3.2 Exponential and Logarithmic Functions](#)
- [3.3 The Natural Logarithm and Exponential Functions](#)

Se även

- [Elementära funktioners derivator](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Funktioner och invers](#)
- [Hyperboliska funktioner](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: e \(Euler's number\) intuition](#)
-

Hyperboliska funktioner

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #trigonometri

Kurs: M0065M **Förkunskaper:** Exponentialfunktioner och logaritmer

Grundtanken

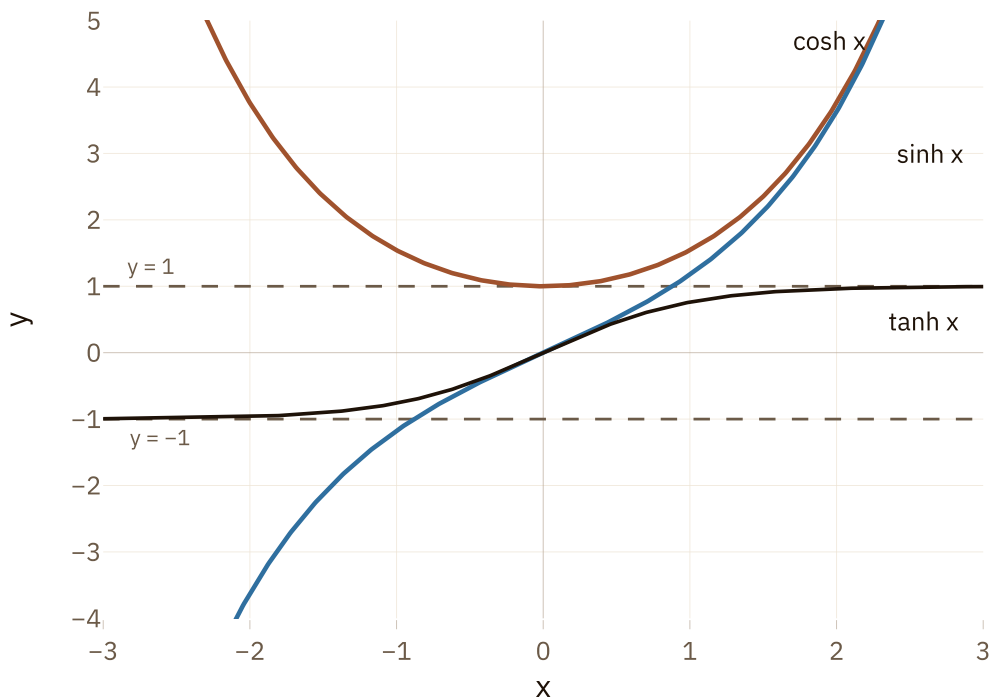
De hyperboliska funktionerna är enkla kombinationer av e^x och e^{-x} som beter sig nästan som $\sin$ och $\cos$: de har en egen "Pythagoras", deriverar in i varandra och har inverser som uttrycks med $\ln$. Skillnaden är tecknen — och att de är kopplade till en hyperbel i stället för en cirkel.

1. Definitioner

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Namnen är *sinus hyperbolicus* och *cosinus hyperbolicus*. Alla tre är definierade för alla $x \in \mathbb{R}$. Direkt ur definitionerna får vi

$\cosh x \geq 1$ är jämn, $\sinh x$ är udda, och $\tanh x$ har de vågräta asymptoterna $y = \pm 1$.



- $\cosh 0 = 1$ och $\sinh 0 = 0$,
- $\cosh(-x) = \cosh x$: $\cosh$ är en **jämn** funktion,
- $\sinh(-x) = -\sinh x$: $\sinh$ är en **udda** funktion,
- $\cosh x \geq 1$ för alla x , eftersom $e^x + e^{-x} \geq 2$.

≡ Exempel – Förenkla $\cosh(\ln x)$ (föreläsning 8)

Vi förenklar $\cosh(\ln x)$ för $x > 0$.

Lösning

Med $e^{\ln x} = x$ och $e^{-\ln x} = x^{-1}$ blir

$$\cosh(\ln x) = \frac{e^{\ln x} + e^{-\ln x}}{2} = \frac{x + x^{-1}}{2} = \boxed{\frac{x^2 + 1}{2x}}$$

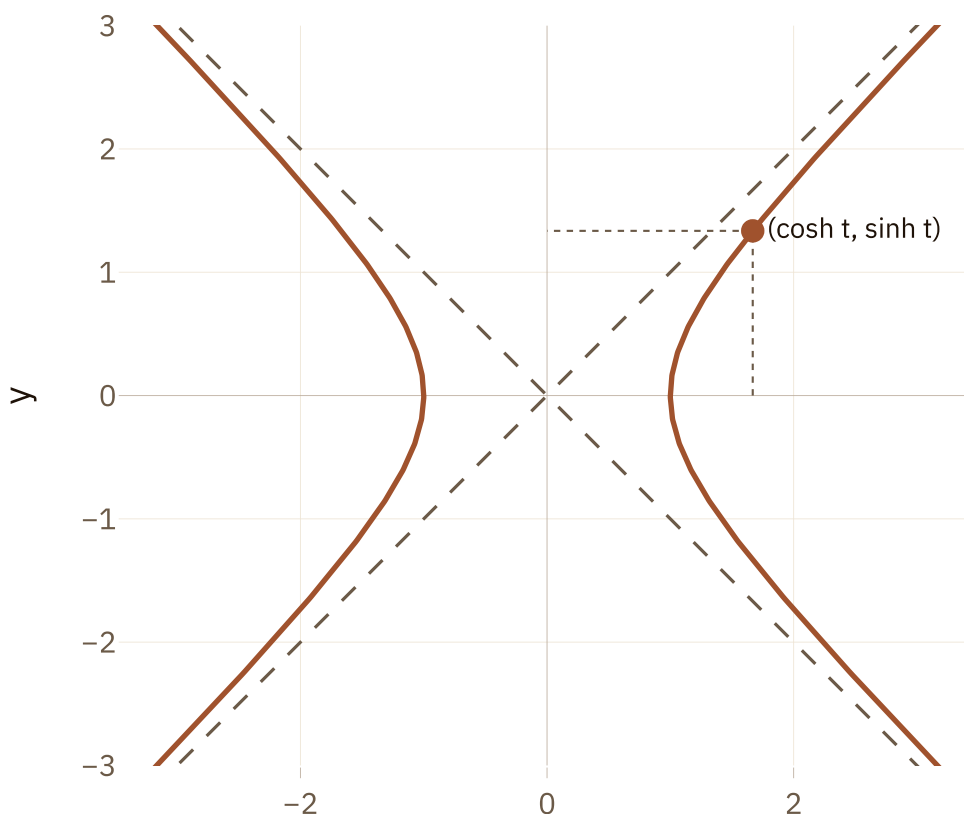
Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

2. Identitet

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

(Jämför med $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Kurvan $(\cosh t, \sinh t)$ parametriserar en hyperbel.)

Identiteten $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ säger att punkten $(\cosh t, \sinh t)$ ligger på hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$ – därav namnet.



Härledning

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Punkten $(X, Y) = (\cosh t, \sinh t)$ uppfyller alltså $X^2 - Y^2 = 1$, och eftersom $X = \cosh t \geq 1$ ligger den på den högra grenen av hyperbeln.

3. Derivator

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

Härledning

Med $(e^{-x})' = -e^{-x}$:

$$\frac{d}{dx} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x, \quad \frac{d}{dx} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Till skillnad från $(\cos x)' = -\sin x$ blir det inget minustecken.

Eftersom $(\sinh x)' = \cosh x > 0$ är $\sinh$ strängt växande på hela $\mathbb{R}$ och har därför en **invers**.

4. Inversa hyperboliska funktioner

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1$$

Härledningen av arsinh står bland de lösta övningarna nedan.

Härledning av artanh

$\tanh$ antar värden i $(-1, 1)$. Vi löser $x = \tanh y$ för y :

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \iff x(e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1 \iff e^{2y}(1 - x) = 1 + x \iff e^{2y} = \frac{1+x}{1-x},$$

$$\text{så } 2y = \ln \frac{1+x}{1-x} \text{ och } y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Vanliga fel

- **Fel tecken i identiteten.** Det är $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, med *minus* – inte plus som för $\cos$ och $\sin$.
- **Minustecken i derivatan.** $(\cosh x)' = +\sinh x$, inte $-\sinh x$.
- **Att glömma att $\cosh x \geq 1$.** Ekvationen $\cosh x = \frac{1}{2}$ saknar reella lösningar, och $\cosh x = c > 1$ har två lösningar $x = \pm \ln(c + \sqrt{c^2 - 1})$ eftersom $\cosh$ är jämn.
- **Att behålla båda rötterna efter substitutionen $t = e^x$.** Andragradsekvationen i t kan ge en negativ rot, men $e^x > 0$, så den ska förkastas.

5. Lösta övningar

≡ Föreläsning 8, exempel – Inversen till $\sinh$

Vi bestämmer inversen till $\sinh x$.

Lösning

Inversen finns. $(\sinh x)' = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, så $\sinh$ är strängt växande och därmed injektiv. Vi kallar inversen arsinh .

Lös ut. $y = \operatorname{arsinh} x \iff x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$. Med $t = e^y > 0$ blir det

$$x = \frac{t - 1/t}{2} \iff 2xt = t^2 - 1 \iff t^2 - 2xt - 1 = 0,$$

med rötterna $t = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Eftersom $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$ är minusroten negativ och förkastas ($t > 0$). Alltså $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ och

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Övning – Lös $\cosh x = 2$

Vi löser ekvationen $\cosh x = 2$ exakt.

Lösning

Med $t = e^x > 0$ blir $\frac{t + 1/t}{2} = 2$, alltså $t^2 - 4t + 1 = 0$ och $t = 2 \pm \sqrt{3}$. Båda rötterna är positiva ($2 - \sqrt{3} \approx 0,27$), och eftersom $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$ är $\ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 + \sqrt{3})$:

$$x = \pm \ln(2 + \sqrt{3}) \approx \pm 1,317$$

Rimlighetskontroll. $\cosh$ är jämn och $2 > 1$, så vi väntar oss två lösningar symmetriskt kring 0.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Övning – Lös $2 \cosh x + \sinh x = 2$

Vi löser ekvationen $2 \cosh x + \sinh x = 2$.

Lösning

Skriv med e^x . Med $t = e^x > 0$ är $2 \cosh x = t + \frac{1}{t}$ och $\sinh x = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t}$, så

$$\frac{3t}{2} + \frac{1}{2t} = 2 \iff 3t^2 - 4t + 1 = 0 \iff (3t - 1)(t - 1) = 0.$$

Båda rötterna $t = 1$ och $t = \frac{1}{3}$ är positiva:

$$x = 0 \text{ eller } x = -\ln 3$$

Kontroll. $x = 0$: $2 \cdot 1 + 0 = 2$. $x = -\ln 3$: $\cosh(-\ln 3) = \frac{3+1/3}{2} = \frac{5}{3}$ och $\sinh(-\ln 3) = \frac{1/3-3}{2} = -\frac{4}{3}$, så $\frac{10}{3} - \frac{4}{3} = 2$.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 3.6 Hyperbolic Functions

Se även

- Trigonometri
- Exponentialfunktioner och logaritmer
- Elementära funktioners derivator
- Funktioner och invers

Resurser

- [Wikipedia: Hyperbolic functions](#)

Trigonometri

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#matematik #trigonometri

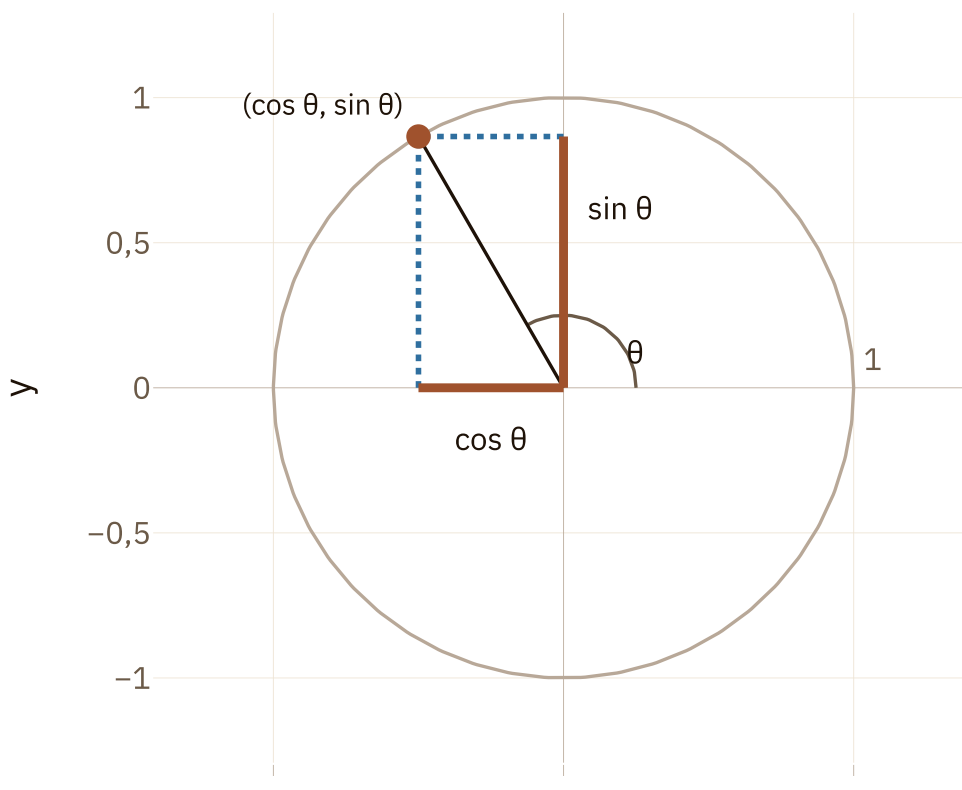
Kurs: M0065M

Sinus och cosinus är koordinaterna för en punkt som rör sig runt enhetscirkeln. Nästan allt i trigonometrin — identiteter, exakta värden, additionsformler och triangelsatser — följer av den bilden tillsammans med Pythagoras sats.

1. Enhetscirkeln

På enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ mäts vinkeln t i **radianer**: en vinkel på t radianer spänner upp en cirkelbåge med längden t . Ett helt varv är därför 2π , cirkelns omkrets.

Vinkeln θ mäts från positiva x -axeln; punktens koordinater är $(\cos \theta, \sin \theta)$.



Punkten P på cirkeln som hör till vinkeln t har koordinaterna

$$P = (\cos t, \sin t)$$

Cosinus är alltså x -koordinaten (abskissan) och sinus y -koordinaten (ordinatan). Eftersom P ligger på enhetscirkeln följer direkt

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

och att $-1 \leq \cos t \leq 1$, $-1 \leq \sin t \leq 1$.

Tangens är längden av tangentsträckan QT vid $Q = (1, 0)$ upp till linjen genom origo och P . Likformiga trianglar ger

$$\tan t = \frac{\tan t}{1} = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cos t \neq 0$$

2. Periodicitet och symmetri

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

Ett helt varv för tillbaka punkten till samma ställe, så sinus och cosinus är 2π -periodiska; även $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$. Speglar vi P i x -axeln byter y -koordinaten tecken men inte x -koordinaten: cosinus är en **jämn** och sinus en **udda** funktion.

Speglar vi i stället P i linjen $y = x$ byter koordinaterna plats, och vinkeln blir $\frac{\pi}{2} - t$:

$$\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \quad \sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

Tangens har kortare period, $\tan(t + \pi) = \tan t$, eftersom både sinus och cosinus byter tecken när vi går ett halvt varv.

3. Exakta värden

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos t$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\sin t$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Värdena i övriga kvadranter fås med symmetrierna i avsnitt 2: bestäm referensvinkeln i första kvadranten och sätt tecknet efter vilken kvadrant punkten ligger i.

Härledning av tabellen

$\pi/4$. Punkten ligger på linjen $y = x$, så $x = y$ och $x^2 + y^2 = 1$ ger $2x^2 = 1$, alltså $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (positiva i första kvadranten). Därmed är $\tan \frac{\pi}{4} = 1$.

$\pi/3$. Triangeln med hörn i origo, $(1, 0)$ och $(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$ har två sidor 1 och mellanliggande vinkel $\frac{\pi}{3}$, så den är liksidig. Höjden delar basen mitt itu: $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, och höjden är $\sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$.

$\pi/6$. Komplementformlerna ger $\sin \frac{\pi}{6} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ och $\cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Additionsformler

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Byter vi β mot $-\beta$ och använder att cosinus är jämn och sinus udda får vi subtraktionsformlerna

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

För tangens ger division av sinus- med cosinusformeln

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Härledning – avståndet mellan två punkter på enhetscirkeln

Låt $P = (\cos s, \sin s)$ och $Q = (\cos t, \sin t)$. Vinkeln mellan dem är $s - t$. Vrider vi hela figuren så att Q hamnar i $R = (1, 0)$ hamnar P i $M = (\cos(s - t), \sin(s - t))$, och avståndet är detsamma: $|PQ| = |MR|$.

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= (\cos s - \cos t)^2 + (\sin s - \sin t)^2 = 2 - 2(\cos s \cos t + \sin s \sin t) \\ |MR|^2 &= (\cos(s - t) - 1)^2 + \sin^2(s - t) = 2 - 2\cos(s - t) \end{aligned}$$

(Båda gångerna har vi använt $\sin^2 + \cos^2 = 1$.) Likhet ger $\cos(s - t) = \cos s \cos t + \sin s \sin t$.

- Byt t mot $-t$: $\cos(s + t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t$.
- Komplementformeln ger sinusformeln:

$$\sin(s + t) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - s\right) - t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - s\right) \cos t + \sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right) \sin t = \sin s \cos t + \cos s \sin t$$

- Tangens: dela täljare och nämnare i $\frac{\sin s \cos t + \cos s \sin t}{\cos s \cos t - \sin s \sin t}$ med $\cos s \cos t$.

5. Dubbla och halva vinkeln

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

Med $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ kan cosinusformeln skrivas på ytterligare två sätt:

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

Löser vi ut kvadraterna får vi formlerna för **halva vinkeln**, som används flitigt vid integration och gränsvärden:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

 Härledning

Sätt $\alpha = \beta = \theta$ i additionsformlerna: $\sin 2\theta = \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ och $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$. Ersätt sedan $\sin^2 \theta$ med $1 - \cos^2 \theta$, respektive $\cos^2 \theta$ med $1 - \sin^2 \theta$.

 Föreläsning 9, exempel 1 – exakt värde av $\cos \frac{\pi}{12}$

Vi beräknar $\cos \frac{\pi}{12}$ exakt, på två sätt.

 Lösning

Alt 1, subtraktionsformeln. Eftersom $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ är

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}}$$

Alt 2, halva vinkeln.

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}$$

där vi tar den positiva roten eftersom $\frac{\pi}{12}$ ligger i första kvadranten.

Rimlighetskontroll. Båda uttrycken är $\approx 0,9659$. De är samma tal: kvadrera det första, $\frac{2(4+2\sqrt{3})}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

6. Triangeltrigonometri

I en **rätvinklig** triangel med hypotenusan c och vinkeln A mitt emot kateten a är

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

vilket är enhetscirkelns definition uppskalad med faktorn c .

I en **allmän** triangel med sidorna a, b, c mitt emot vinklarna A, B, C (vinkelsumman är π) gäller

Areasatsen, sinussatsen och cosinussatsen

$$T = \frac{bc \sin A}{2}, \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Areasatsen och sinussatsen gäller för alla tre vinkelparen, cosinussatsen med bokstäverna permuterade.

Härledning

Dra höjden h från C ned mot sidan c , som delas i c_1 (vid A) och c_2 (vid B). Då är $h = b \sin A = a \sin B$ och $c_1 = b \cos A$.

Areasatsen. $T = \frac{ch}{2} = \frac{cb \sin A}{2} = \frac{ca \sin B}{2}$, och på samma sätt med C .

Sinussatsen. Dela varje uttryck $\frac{bc \sin A}{2} = \frac{ca \sin B}{2} = \frac{ab \sin C}{2}$ med $\frac{abc}{2}$.

Cosinussatsen. Pythagoras i triangeln vid B :

$$a^2 = h^2 + c_2^2 = (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2 = b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A$$

Cosinussatsen generaliserar Pythagoras

För $A = \frac{\pi}{2}$ är $\cos A = 0$ och formeln blir $a^2 = b^2 + c^2$. Termen $-2bc \cos A$ är korrektionen när vinkeln inte är rät.

Vanliga fel

- **Grader i stället för radianer.** I analysen är vinklar alltid i radianer; $\sin 30$ är inte $\frac{1}{2}$. Ställ räknaren i RAD.
- **Linearisera.** $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin \alpha + \sin \beta$ och $\sin 2\theta \neq 2 \sin \theta$ – använd additionsformlerna.
- **Fel tecken utanför första kvadranten.** $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, inte $\frac{1}{2}$. Rita punkten på enhetscirkeln.
- **Tappa den andra lösningen i sinussatsen.** $\sin B = k$ med $0 < k < 1$ ger två vinklar, B och $\pi - B$; båda kan ge en triangel (se exemplet nedan). $\sin^2 x$ betyder dessutom $(\sin x)^2$, inte $\sin(x^2)$.

7. Lösta övningar

≡ Föreläsning 9, exempel 3 – triangelsolvering med två lösningar

I en triangel är $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ och $A = \frac{\pi}{6}$ (30°). Vi bestämmer sidan c .

Lösning

Sinussatsen.

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ger två möjliga vinklar, $B_1 = \frac{\pi}{4}$ och $B_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Båda är tillåtna, eftersom $A + B < \pi$ i båda fallen.

Tredje vinkeln. $C_1 = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$ och $C_2 = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

Exakta sinusvärden. Additionsformlerna ger

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1), \quad \sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$$

Sinussatsen igen. $c = a \frac{\sin C}{\sin A} = 2 \sin C$, så

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2} \approx 1,932$$

eller

$$c_2 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{2} \approx 0,518$$

Rimlighetskontroll. Cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ är uppfylld för båda värdena.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 9, exempel 4 – arean av en triangel

En triangel har sidorna $a = 7$, $b = 15$ och $c = 20$. Vi beräknar dess area.

Lösning

Triangeln är inte rätvinklig ($7^2 + 15^2 \neq 20^2$), så vi behöver en vinkel.

Cosinussatsen för vinkeln A :

$$2 \cdot 15 \cdot 20 \cos A = 15^2 + 20^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576 \Rightarrow \cos A = \frac{576}{600} = \frac{24}{25}$$

Trigonometriska ettan. $\sin^2 A = 1 - \frac{24^2}{25^2} = \frac{(25-24)(25+24)}{25^2} = \frac{49}{25^2}$, och $\sin A = \frac{7}{25}$ eftersom $0 < A < \pi$.

Areasatsen.

$$T = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{15 \cdot 20 \cdot \frac{7}{25}}{2} = \boxed{42}$$

Rimlighetskontroll. Herons formel, $T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ med $p = 21$, ger $\sqrt{21 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 1} = 42$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

☰ Föreläsning 10, exempel 2 – en identitet för $\tan \frac{x}{2}$

Vi visar att

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$$

för alla x där uttrycken är definierade.

Lösning

Första likheten. Korsmultiplicera: likheten är ekvivalent med $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$, alltså $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, vilket är trigonometriska ettan.

Andra likheten. Sätt $\alpha = \frac{x}{2}$, så att $x = 2\alpha$. Dubbla vinkeln ger $\sin x = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ och $1 + \cos x = 1 + (2 \cos^2 \alpha - 1) = 2 \cos^2 \alpha$. Därmed

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \boxed{\tan \frac{x}{2}}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

☰ Föreläsning 10, exempel 9 – $\sin v$ och $\cos v$ ur $\tan v$

Vi bestämmer $\sin v$ och $\cos v$ om $\tan v = 2$.

Lösning

Dela trigonometriska ettan med $\cos^2 v$.

$$\cos^2 v = \frac{\cos^2 v}{\sin^2 v + \cos^2 v} = \frac{1}{\tan^2 v + 1} = \frac{1}{5}, \quad \sin^2 v = \frac{\tan^2 v}{\tan^2 v + 1} = \frac{4}{5}$$

Tecken. $\tan v > 0$ betyder att $\sin v$ och $\cos v$ har samma tecken (första eller tredje kvadranten):

$$\cos v = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin v = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

eller

$$\cos v = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \sin v = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Läsning

- [P.7 The Trigonometric Functions](#)

Se även

- Trigonometriska ekvationer
- Arcusfunktioner
- Hyperboliska funktioner
- Polär form för komplexa tal
- Elementära funktioners derivator

Resurser

- [3Blue1Brown: Why is pi in the sine function](#) 

Trigonometriska ekvationer

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #trigonometri

Kurs: M0065M Förkunskaper: Trigonometri

På grund av periodiciteten har trigonometriska ekvationer i regel oändligt många lösningar.

Idén

Varje trigonometrisk ekvation reduceras till ett av tre grundfall. I grundfallet ger enhetscirkeln de lösningar som ligger inom ett varv — för sinus och cosinus oftast *två* punkter, symmetriska kring en axel — och periodiciteten lägger till $2\pi n$. Nästan alla fel handlar om att tappa den andra punkten eller glömma perioden.

1. Grundfall

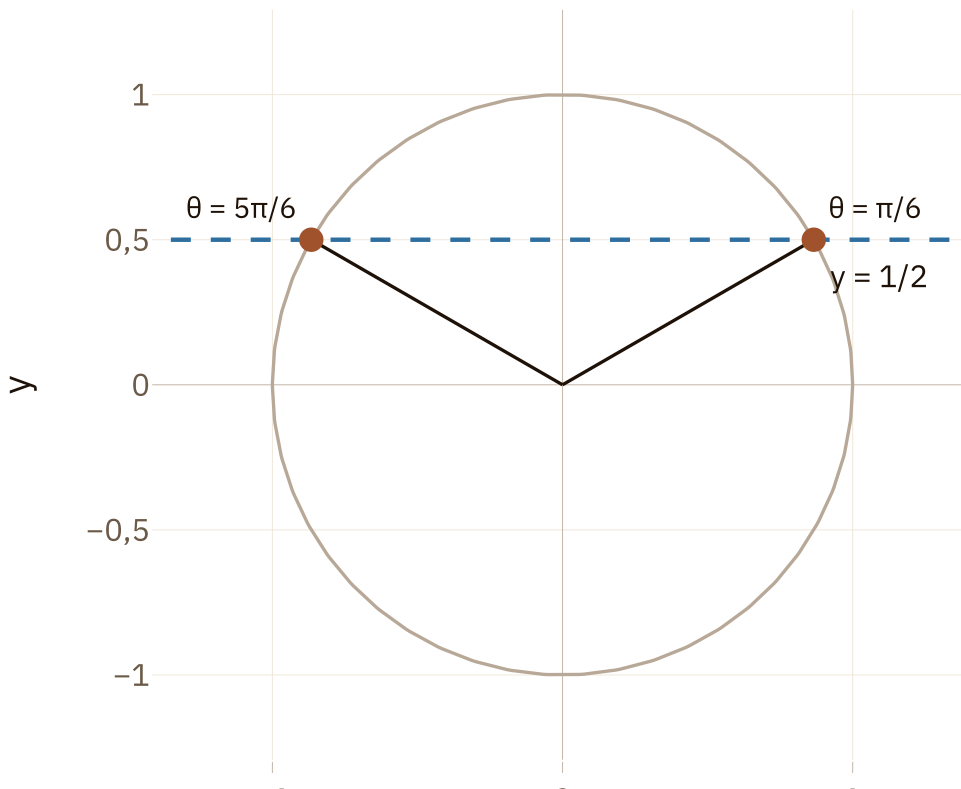
$$\sin x = a \iff x = \arcsin a + 2\pi n \vee x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = a \iff x = \pm \arccos a + 2\pi n$$

$$\tan x = a \iff x = \arctan a + \pi n$$

För sinus och cosinus krävs $-1 \leq a \leq 1$; annars saknar ekvationen lösning. Tangens antar alla reella värden och har period π , så där räcker en familj. Uttrycken $\arcsin a$, $\arccos a$ och $\arctan a$ är **arcusfunktionerna**, alltså den vinkel i huvudintervallet som har rätt funktionsvärde.

$\sin \theta = 1/2$ har två lösningar per varv: linjen $y = 1/2$ skär enhetscirkeln vid $\pi/6$ och $5\pi/6$.



Ofta är högerledet självt en trigonometrisk funktion. Då använder vi samma symmetrier direkt:

$$\sin x = \sin y \iff x = y + 2\pi n \vee x = \pi - y + 2\pi n$$

$$\cos x = \cos y \iff x = \pm y + 2\pi n, \quad \tan x = \tan y \iff x = y + \pi n$$

Härledning från enhetscirkeln

$\sin x = \sin y$ betyder att punkterna för x och y har samma y -koordinat. Den vågräta linjen genom punkten för y skär enhetscirkeln i två punkter, som är spegelbilder i y -axeln: vinklarna y och $\pi - y$. Alla vinklar som hamnar i någon av punkterna fås genom att lägga till hela varv, $2\pi n$.

$\cos x = \cos y$ betyder samma x -koordinat. Den lodräta linjen skär cirkeln i punkterna för y och $-y$, spegelbilder i x -axeln.

För tangens: $\tan(v + \pi) = \frac{\sin v \cos \pi + \cos v \sin \pi}{\cos v \cos \pi - \sin v \sin \pi} = \frac{-\sin v}{-\cos v} = \tan v$, och $\tan$ är strängt växande på $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, så inom en period finns bara en lösning.

- $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ger $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ eller $t = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$.
- $\cos t = \frac{1}{2}$ ger $t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

- $\tan v = \tan 4v$ ger $v = 4v + \pi n$, alltså $v = -\frac{\pi n}{3}$, vilket är samma mängd som $v = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

2. Teknik

- Faktorisera (t.ex. $\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ eller $\cos x = 0$).
- Använd identiteter för att samla till en trig-funktion.
- Dubbla/halva vinkelns formler.
- Byt sinus mot cosinus med $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ när ekvationen blandar dem med olika argument.
- Är argumentet $kx + c$: lös först för hela argumentet, sedan för x . Perioden $2\pi n$ blir då $\frac{2\pi n}{k}$.

Exempel – $\sin 2x = \sin x$

Vi löser ekvationen $\sin 2x = \sin x$.

Lösning

Faktorisera. Dubbla vinkeln ger

$$\sin 2x = \sin x \iff 2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \iff \sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

Vi dividerar alltså *inte* med $\sin x$ – det skulle tappa lösningarna där $\sin x = 0$.

Första faktorn. $\sin x = 0 \iff x = \pi n$.

Andra faktorn. $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

$$x = \pi n \quad \vee \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Andra vägen. Grundfallet $\sin 2x = \sin x$ ger $2x = x + 2\pi n$, alltså $x = 2\pi n$, eller $2x = \pi - x + 2\pi n$, alltså $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$. Den andra familjen innehåller $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ per varv, och tillsammans med $2\pi n$ blir det samma mängd som ovan.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

3. Hjälpvinkelsatsen

En ekvation $a \cos x + b \sin x = c$ blandar sinus och cosinus med *samma* argument. Idén är att skriva vänsterledet som en enda sinusvåg med **amplitud** A och **fasvinkel** φ :

$$a \cos x + b \sin x = A \sin(x + \varphi), \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad A \cos \varphi = b, \quad A \sin \varphi = a$$

Därefter är ekvationen ett grundfall, $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{A}$, och den har lösning precis när $|c| \leq A$.

Härledning

Additionsformeln ger $A \sin(x + \varphi) = A \sin x \cos \varphi + A \cos x \sin \varphi$. Likheten med $a \cos x + b \sin x$ för alla x är ekvivalent med

$$(A \cos \varphi - b) \sin x + (A \sin \varphi - a) \cos x = 0 \quad \text{för alla } x$$

vilket uppfylls om $A \cos \varphi = b$ och $A \sin \varphi = a$. Kvadrera och addera: $a^2 + b^2 = A^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = A^2$. Vinkeln φ bestäms av punkten $(\cos \varphi, \sin \varphi) = (\frac{b}{A}, \frac{a}{A})$ på enhetscirkeln – rita den, så att kvadranten blir rätt.

Vanliga fel

- **Tappa den andra familjen.** $\sin x = a$ har lösningarna $\arcsin a$ och $\pi - \arcsin a$ (plus $2\pi n$); $\cos x = a$ har $\pm \arccos a$.
- **Dividera med en faktor som kan vara noll.** $\sin x \cos x = \sin x$ delat med $\sin x$ tappar $x = \pi n$. Faktorisera i stället.
- **Fel period.** Tangens har period π , inte 2π . Och i $\sin 3x = a$ blir perioden för x lika med $\frac{2\pi}{3}$: dela $2\pi n$ med 3 också.
- **Fasvinkel i fel kvadrant.** $\tan \varphi = \frac{a}{b}$ räcker inte för att bestämma φ i hjälpvinkelsatsen – tecknen på $\cos \varphi$ och $\sin \varphi$ avgör.

4. Lösta övningar

 **Föreläsning 10, exempel 4** – $\cos 2x = \cos^2 x + 3 \sin x$

Vi löser ekvationen $\cos 2x = \cos^2 x + 3 \sin x$.

 Lösning

Samla till en funktion. Med $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ blir ekvationen

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x + 3 \sin x \iff \sin^2 x + 3 \sin x = 0 \iff \sin x (\sin x + 3) = 0$$

Faktorerna. $\sin x = -3$ saknar lösning, eftersom $|\sin x| \leq 1$. Kvar är $\sin x = 0$:

$$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 10, exempel 5 – sinus och cosinus med olika argument

Vi löser ekvationen

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

 Lösning

Skriv om sinus som cosinus. Med $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ blir ekvationen

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \iff \frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{3} = \pm\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n$$

Plustecknet. $3x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} - 2\pi n = \frac{5\pi}{12} - 2\pi n$, så $x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi m}{3}$ ($m = -n$ genomlöper också $\mathbb{Z}$).

Minustecknet. $\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{3} = -x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ger $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - 2\pi n = -\frac{\pi}{12} + 2\pi m$.

$$x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi m}{3} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Rimlighetskontroll. På $[0, 2\pi]$ ger det fyra lösningar, $\approx 0,436$; $2,531$; $4,625$; $6,021$, och differensen mellan leden byter tecken precis där.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 10, exempel 6 – $\tan(3x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$

Vi löser ekvationen $\tan(3x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$.

Lösning

Grundfallet. $\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$, och tangens har period π , så

$$3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi n \iff 3x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$$

Lös ut x – perioden delas också med 3:

$$x = \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 10, exempel 8 – **hjälpvinkel:** $\cos 2x - \sin 2x = 1$

Vi löser ekvationen $\cos 2x - \sin 2x = 1$.

Lösning

Hjälpvinkel. Här är $a = 1$, $b = -1$ och argumentet $2x$. Då är $A = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ och

$$\sqrt{2} \cos \varphi = -1, \quad \sqrt{2} \sin \varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

(andra kvadranten: cosinus negativ, sinus positiv). Ekvationen blir

$$\sqrt{2} \sin(2x + \frac{3\pi}{4}) = 1 \iff \sin(2x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Första familjen. $2x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \iff 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \iff x = -\frac{\pi}{4} + \pi n.$

Andra familjen. $2x + \frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \iff x = \pi n.$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad \vee \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Rimlighetskontroll. $x = 0$: $\cos 0 - \sin 0 = 1$. $x = -\frac{\pi}{4}$: $\cos(-\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2}) = 0 + 1 = 1$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Läsning

- [P.7 The Trigonometric Functions](#)

Se även

- [Trigonometri](#)
- [Arcusfunktioner](#)

Arcusfunktioner

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #trigonometri

Kurs: M0065M **Förkunskaper:** Trigonometri, Funktioner och invers

1. Idé

Arcusfunktionerna är inverserna till de trigonometriska funktionerna, definierade på intervall där originalet är strängt monotont.

De svarar på frågan *vilken vinkel har det här sinus-, cosinus- eller tangensvärdet?* Eftersom sinus antar varje värde oändligt många gånger har frågan inget entydigt svar förrän vi väljer ut ett intervall där funktionen är injektiv (1–1). Arcusfunktionen ger alltid vinkeln i just det intervallet, **huvudintervallet** — de andra lösningarna hittar vi med periodiciteten, se [Trigonometriska ekvationer](#).

- Sinus: $(\sin x)' = \cos x > 0$ på $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, så sinus är strängt växande på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- Cosinus: $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, och $\frac{\pi}{2} - x$ ligger i $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ precis när $x \in [0, \pi]$. Där är cosinus strängt avtagande.
- Tangens: $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \geq 1$, så tangens är strängt växande på $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

2. Definitioner

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Sinus begränsad till $[-\pi/2, \pi/2]$ och dess invers $\arcsin$, speglade i $y = x$.



$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Som för varje invers byter x och y roll:

$y = \arcsin x \iff x = \sin y,$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x \iff x = \cos y,$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \arctan x \iff x = \tan y,$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Kancelleringslagarna gäller bara när argumentet ligger i rätt mängd:

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1, 1]$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0, \pi], \quad \arctan(\tan x) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \tan(\arctan x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Några värden, avlästa i tabellen för exakta värden i **Trigonometri**:

- $\arctan 1 = \pi/4$, $\arcsin(1/2) = \pi/6$.
- $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ (andra kvadranten, tillåten för $\arccos$), $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

☰ Föreläsning 11, exempel 6 och 7 – när cancelleringen inte gäller

Vi beräknar $\arctan(\tan \frac{2\pi}{3})$ och $\arccos(\sin(-0,2))$.

Lösning

a) $\frac{2\pi}{3}$ ligger inte i $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, så svaret är *inte* $\frac{2\pi}{3}$. Beräkna det inre först:

$$\arctan\left(\tan \frac{2\pi}{3}\right) = \arctan(-\sqrt{3}) = \boxed{-\frac{\pi}{3}}$$

Det är samma sak som att flytta vinkeln en period π in i huvudintervallet: $\frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}$.

b) Med sambandet $\arccos t = \frac{\pi}{2} - \arcsin t$ (avsnitt 3), och eftersom $-0,2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\arccos(\sin(-0,2)) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(-0,2)) = \frac{\pi}{2} - (-0,2) = \boxed{\frac{\pi}{2} + 0,2} \approx 1,771$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

3. Samband och förenklingar

Summan av arcsin och arccos. Om $y = \arccos x$ är $x = \cos y = \sin(\frac{\pi}{2} - y)$ med $\frac{\pi}{2} - y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alltså $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - y$:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1]$$

Trigonometrisk funktion av en arcusfunktion. Sätt θ lika med arcusuttrycket, rita en rätvinklig triangel och bestäm tecknet ur huvudintervallet:

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Härledning med triangeln

$\sin(\arccos x)$. Sätt $\theta = \arccos x$, så att $\cos \theta = x$ och $0 \leq \theta \leq \pi$. En rätvinklig triangel med hypotenusa 1 och närliggande katet x har motstående katet $\sqrt{1 - x^2}$, så $\sin \theta = \pm \sqrt{1 - x^2}$. På $[0, \pi]$ är $\sin \theta \geq 0$, alltså plustecknet. Samma resonemang ger $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, eftersom $\cos \theta \geq 0$ på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$\cos(\arctan x)$. Sätt $\theta = \arctan x$, så att $\tan \theta = \frac{x}{1}$ och $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Kateterna är x och 1 , hypotenusan $\sqrt{1+x^2}$, och $\cos \theta > 0$ på intervallet. Alltså $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Till exempel är $\cos(\arcsin 0,7) = \sqrt{1-0,49} = \sqrt{0,51}$, medan $\sin(\arcsin 0,7) = 0,7$ direkt ur kancelleringslagen.

$\arctan x$ är definierad för alla x och har de vågräta asymptoterna $y = \pm\pi/2$.



4. Derivator

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Derivatorna av $\arcsin$ och $\arccos$ gäller för $-1 < x < 1$; i ändpunkterna har graferna lodräta tangenter.

Att $\arctan$ har en rationell derivata gör den central i integrationen: $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$.

Härledning

arcsin. $y = \arcsin x \iff x = \sin y$ med $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Implicit derivering med avseende på x ger $1 = \cos y \cdot y'$, alltså $y' = \frac{1}{\cos y}$. På intervallet är $\cos y \geq 0$, så $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

Detta är specialfallet $f = \sin$ av regeln för **Inversa funktioners derivata**.

arctan. $y = \arctan x \iff x = \tan y$. Deriveringen ger $1 = (1 + \tan^2 y)y' = (1 + x^2)y'$.

arccos. Ur $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ följer $(\arccos x)' = -(\arcsin x)'$.

⚠ Vanliga fel

- **Kancellera utanför huvudintervallet.** $\arcsin(\sin x) = x$ bara för $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; till exempel är $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$.
- **Fel värdemängd för arccos.** $\arccos$ ger vinklar i $[0, \pi]$, inte $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$, inte $-\frac{\pi}{3}$.
- **Tolka $\arcsin x$ som $1/\sin x$.** Beteckningen $\sin^{-1} x$ på räknaren betyder invers, inte reciprok.
- **Tappa tecknet i triangelmetoden.** $\sin(\arccos x)$ är alltid ≥ 0 ; resonera med huvudintervallet i stället för att skriva $\pm$.

5. Lösta övningar

≡ Föreläsning 11, exempel 10 — $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

Vi visar att $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ för $x > 0$.

✎ Lösning

Derivera. Låt $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. Med kedjeregeln är

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Konstant. En funktion med derivatan noll på ett intervall är konstant där, så $f(x) = C$ för $x > 0$. Värdet i $x = 1$ ger konstanten:

$$C = f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Anmärkning. $x = 0$ ligger inte i definitionsmängden, så för $x < 0$ gäller en annan konstant. Eftersom $\arctan$ är udda blir den $-\frac{\pi}{2}$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 11, exempel 11 – $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{6}}$

Vi beräknar exakt $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Lösning

Namnge vinklarna. Sätt $u = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ och $v = \arcsin \frac{2}{\sqrt{6}}$. Argumenten är positiva, så $0 < u, v < \frac{\pi}{2}$ och cosinus är positiv:

$$\cos u = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \cos v = \sqrt{1 - \frac{4}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Additionsformeln.

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3\sqrt{2}} = 0$$

Välj rätt vinkel. $\cos(u + v) = 0$ ger $u + v = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, men $0 < u + v < \pi$, så

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 11, exempel 12 – $2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$

Vi förenklar $2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$.

Lösning

Namnge vinklarna. $u = \arctan \frac{1}{3}$ och $v = \arctan \frac{1}{7}$, med $0 < u, v < \frac{\pi}{2}$.

Tangens för dubbla vinkeln. Additionsformeln för tangens med $u = v$:

$$\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} = \frac{2/3}{1 - 1/9} = \frac{3}{4}$$

En gång till.

$$\tan(2u + v) = \frac{\tan 2u + \tan v}{1 - \tan 2u \tan v} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{28}} = \frac{21 + 4}{28 - 3} = 1$$

Välj rätt vinkel. $\tan(2u + v) = 1$ ger $2u + v = \frac{\pi}{4} + \pi n$. Grovt är $0 < 2u + v < \frac{3\pi}{2}$, och de enda kandidaterna där är $\frac{\pi}{4}$ och $\frac{5\pi}{4}$. Men $\tan 2u = \frac{3}{4} > 0$ med $0 < 2u < \pi$ betyder $2u < \frac{\pi}{2}$, och $v < \frac{\pi}{4}$ eftersom $\frac{1}{7} < 1$; alltså $2u + v < \frac{3\pi}{4}$ och

$$2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Läsning

- [3.5 The Inverse Trigonometric Functions](#)

Se även

- Trigonometri
- Inversa funktioners derivata
- Trigonometriska ekvationer
- Funktioner och invers
- Elementära funktioners derivator

Resurser

- [Wikipedia: Inverse trigonometric functions](#) 

Gränsvärden

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #gränsvärde

Kurs: M0065M Förkunskaper: Funktioner

Idén. Ett gränsvärde beskriver vad en funktion *närmar sig* när x närmar sig en punkt, oberoende av vad som händer i själva punkten. Det är verktyget för uttryck som inte går att räkna ut genom insättning, som $\frac{0}{0}$, och grunden för både **Kontinuitet** och **Derivata**: derivatan är ett gränsvärde av typen $\frac{0}{0}$.

1. Grunddefinition

Vi skriver

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

om $f(x)$ kan göras godtyckligt nära L genom att välja x tillräckligt nära a , men med $x \neq a$.

Note

Gränsvärdet beror på hur funktionen beter sig **nära** punkten, inte nödvändigtvis på värdet $f(a)$.

Hävbar situation

För

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

gäller för $x \neq 2$ att $f(x) = x + 2$, så

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

även om uttrycket inte är definierat i $x = 2$.

Formell definition

Formuleringen “godtyckligt nära” görs exakt med ε och δ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \text{för varje } \varepsilon > 0 \text{ finns } \delta > 0 \text{ så att } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Hur litet avstånd ε till L vi än kräver, så finns ett avstånd δ kring a inom vilket kravet uppfylls. Villkoret $0 < |x - a|$ är det som gör att $f(a)$ inte spelar någon roll.

2. Räkneregler

Om $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ och $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ gäller bland annat:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g) = L + M, \quad \lim_{x \rightarrow a} (fg) = LM$$

och

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{om } M \neq 0.$$

För kontinuerliga funktioner kan man ofta använda direkt insättning.

Kursen kallar det **instoppningssatsen**: är f kontinuerlig i a får vi sätta in $x = a$ direkt, till exempel $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x+6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Först när insättningen ger en **obestämd form** behövs omskrivning. Det finns sju sådana:

$$\left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad [0^0], \quad [1^\infty], \quad [\infty^0].$$

Instängningsregeln

Om $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ nära a och $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, så är även $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$. Den används i §4 och i exemplet i §5.

3. Ensidiga gränsvärden

De ensidiga gränsvärdena skrivs

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Ett tvåsidigt gränsvärde existerar precis när båda ensidiga existerar och är lika:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

⋮ När gränsvärdet inte finns

För $f(x) = \frac{|x|}{x}$ fås

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

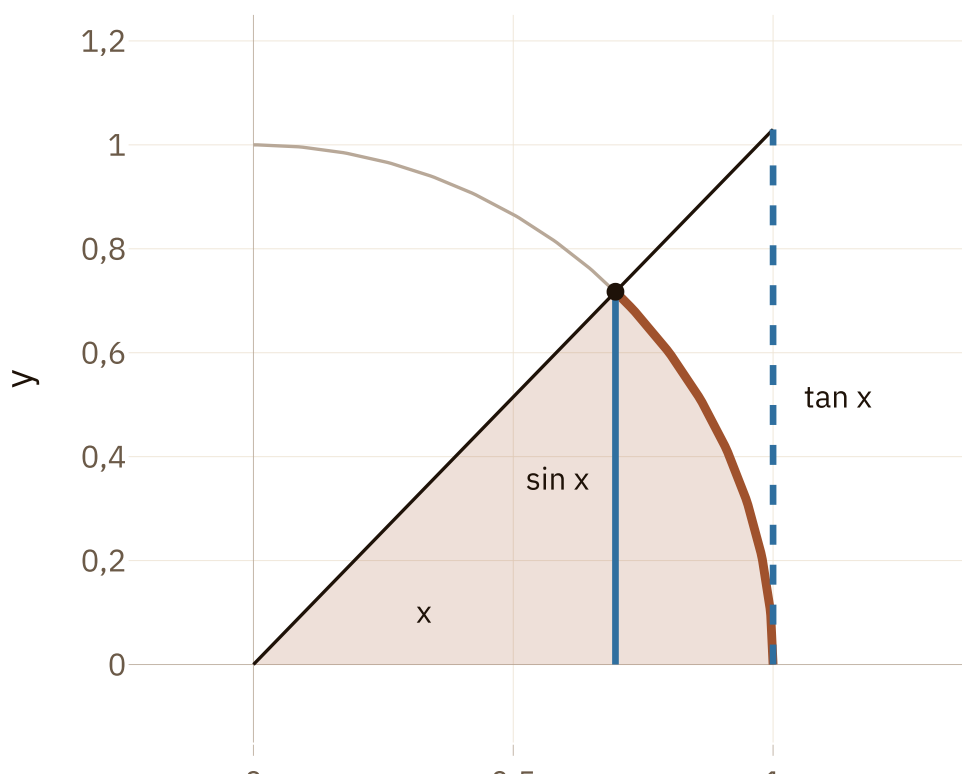
så det tvåsidiga gränsvärdet existerar inte.

4. Standardgränsvärden

Följande är särskilt viktiga:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

För $0 < x < \pi/2$ gäller $\sin x \leq x \leq \tan x$ (sträcka, båge, tangentsträcka). Division med $\sin x$ och instängning ger $\sin x/x \rightarrow 1$.



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Härledning

$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$. Låt $0 < x < \frac{\pi}{2}$ och lägg vinkeln x i enhetscirkeln med $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $P = (\cos x, \sin x)$ och $T = (1, \tan x)$. Triangeln OAP ligger i cirkelsektorn OAP , som ligger i triangeln OAT :

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{x}{x} < \frac{\tan x}{x}.$$

Multiplikation med $\frac{2}{\sin x} > 0$ och invertering ger

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Eftersom $\cos x \rightarrow 1$ ger instängningsregeln $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0^+$. Funktionen är jämn, så samma gräns gäller från vänster.

$\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$. Logaritmlagarna ger $\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln((1+x)^{1/x})$. Med $x = 1/n$ är $(1+x)^{1/x} = (1+\frac{1}{n})^n \rightarrow e$, och eftersom $\ln$ är kontinuerlig går uttrycket mot $\ln e = 1$.

$\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$. Sätt $t = e^x - 1$, alltså $x = \ln(1+t)$, där $t \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$:

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{1}{\ln(1+t)/t} \rightarrow \frac{1}{1} = 1.$$

Följdgränsvärdet för cosinus

Förläng med $1 + \cos x$: $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \rightarrow \frac{1}{2}$. Särskilt gäller $\frac{1 - \cos x}{x} \rightarrow 0$.

Typiskt användningsmönster

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 = 3$$

5. Vanliga tekniker

Vanliga verktyg

- faktorisera och förkorta
- multiplicera med konjugat
- dela med högsta potens vid $x \rightarrow \infty$
- använd standardgränsvärden
- använd **Taylors formel** eller L'Hôpitals regel när kursen kommit dit

Instängningsregeln

Eftersom $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ gäller

$$-|x| \leq x \sin(1/x) \leq |x|.$$

Båda yttretermerna går mot 0, alltså

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0.$$

⚠ Vanliga fel

- $\left[\frac{0}{0}\right] = 1$ **eller** 0. En obestämd form säger ingenting om värdet; den säger bara att vi måste skriva om uttrycket.
- **Stryka faktorer utan att faktorisera.** I $\frac{x^3 - 8}{x^3 - 4x^2 + 8}$ går det bara att förkorta när vi sett att $x - 2$ är en faktor i *både* täljare och nämnare.
- **Glömma ensidiga gränsvärden vid absolutbelopp.** $|x - 2|$ byter uttryck i $x = 2$, så vi måste räkna från höger och vänster var för sig.
- $\frac{\sin 3x}{x} \rightarrow 1$. Standardgränsvärdet kräver *samma* uttryck i sinus och nämnare: $\frac{\sin 3x}{3x} \rightarrow 1$, så $\frac{x \sin 3x}{x} \rightarrow 3$.

6. Oegentliga gränsvärden och asymptoter

Om

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

har grafen ofta en **vertikal asymptot** $x = a$.

Om

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$$

har grafen en **horisontell asymptot** $y = L$.

Räknetekniken för dessa fall finns i **Oegentliga gränsvärden**.

7. Lösta övningar

≡ Föreläsning 13, exempel 5 – konjugat

Vi beräknar

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}.$$

Lösning

Typ. Insättning ger $\left[\frac{0}{0}\right]$. Roten i nämnaren tas bort genom förlängning med konjugatet $\sqrt{x+3} + 2$.

Förläng. Konjugatregeln ger $(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2) = (x+3) - 4 = x - 1$:

$$\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x-1} = (x+1)(\sqrt{x+3} + 2), \quad x \neq 1.$$

Sätt in. Uttrycket är kontinuerligt i $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x+3} + 2) = 2(\sqrt{4} + 2) = \boxed{8}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

☰ Föreläsning 13, exempel 8 – polynomdivision

Vi beräknar

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 4x^2 + 8}.$$

Lösning

Typ. Både täljare och nämnare är 0 i $x = 2$, så $x - 2$ är en faktor i båda (faktorsatsen).

Faktorisera. Polynomdivision med $x - 2$ ger

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4), \quad x^3 - 4x^2 + 8 = (x - 2)(x^2 - 2x - 4).$$

Förkorta och sätt in.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 2x - 4} = \frac{4 + 4 + 4}{4 - 4 - 4} = \boxed{-3}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 13, exempel 12 – absolutbelopp

Vi undersöker

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x^2 - 4}.$$

Lösning

Typ. Insättning ger $[\frac{0}{0}]$, och $|x - 2|$ byter uttryck i $x = 2$:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ -(x - 2), & x < 2. \end{cases}$$

Från höger.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{4}$$

Från vänster.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x + 2} = -\frac{1}{4}$$

Slutsats. De ensidiga gränsvärdena är olika, så gränsvärdet existerar inte.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 14, exempel 3 a–c – standardgränsvärden

Vi beräknar

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{7x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 7x + x \cos 5x + x^2}{\sin 10x + 5x}.$$

Lösning

a) Skriv $\tan 4x = \frac{\sin 4x}{\cos 4x}$ och gör sinusargumentet och nämnaren lika:

$$\frac{\tan 4x}{7x} = \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{4}{7 \cos 4x} \rightarrow 1 \cdot \frac{4}{7} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

b) Förläng med $1 + \cos x$ och använd $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

c) Dela täljare och nämnare med x :

$$\frac{7 \cdot \frac{\sin 7x}{7x} \cdot \frac{1}{\cos 7x} + \cos 5x + x}{10 \cdot \frac{\sin 10x}{10x} + 5} \rightarrow \frac{7 + 1 + 0}{10 + 5} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Läsning

- [1.2 Limits of Functions](#)
- [1.3 Limits at Infinity](#)

Se även

- [Kontinuitet](#)
- [Derivata](#)
- [Taylors formel](#)
- [Oegentliga gränsvärden](#)
- [Gränsvärdesberäkning med Taylor](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Limits](#)
- [Wikipedia: Limit of a function](#)

Oegentliga gränsvärden

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #gränsvärde

Kurs: M0065M **Förkunskaper:** Gränsvärden

“Oegentligt” används dels när argumentet $x \rightarrow \pm\infty$, dels när värdet $f(x) \rightarrow \pm\infty$.

Idén. Oegentliga gränsvärden beskriver en funktions beteende *långt ut* och *nära en singularitet*. De ger grafens horisontella och vertikala asymptoter, och de rangordnar hur snabbt olika funktioner växer, vilket avgör vem som vinner i ett uttryck som $\frac{x^{10}}{e^x}$.

1. Mot oändligheten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

betyder att $f(x)$ kan göras godtyckligt nära L genom att välja x tillräckligt stort.

På motsvarande sätt definieras $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Grundgränsvärdet är

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad n > 0,$$

och nästan all räkning mot oändligheten går ut på att skriva om uttrycket så att bara sådana termer återstår.

Strategi: bryt ut det dominerande

Bryt ut den term som dominerar i **nämnameren** (för polynom: högsta potensen) ur både täljare och nämnare. Då går alla övriga termer mot 0.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3}{x^3 + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{2}{x^3}\right)} = \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0$$

För rationella funktioner avgör graderna svaret: täljarens grad lägre ger 0, samma grad ger kvoten av ledande koefficienter, och högre grad ger $\pm\infty$.

☰ Exempel – absolutbelopp mot $-\infty$

Vi beräknar

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 5}{|3x + 2|}.$$

Lösning

Ta bort beloppet. För $x < -\frac{2}{3}$ är $3x + 2 < 0$, så $|3x + 2| = -(3x + 2)$. Det gäller för alla tillräckligt negativa x .

Bryt ut x .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 5}{-(3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{-3 - \frac{2}{x}} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

Mot $+\infty$ blir svaret i stället $+\frac{2}{3}$; grafen har två olika horisontella asymptoter.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget. (Föreläsning 14, exempel 8.)

2. Värdet blir oändligt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

betyder att $f(x)$ kan göras godtyckligt stort nära a . Motsvarar ofta en vertikal asymptot.

Strängt taget *existerar* gränsvärdet inte, eftersom ∞ inte är ett tal, men skrivsättet talar om *hur* det inte existerar. Ofta måste vi skilja på sidorna:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

För $\frac{1}{x}$ är de ensidiga resultaten olika, så där kan vi bara säga att gränsvärdet inte existerar.

Teckenstudium vid $\left[\frac{c}{0}\right]$

Går täljaren mot ett tal $c \neq 0$ och nämnaren mot 0 blir kvoten obegränsad. Tecknet bestäms av täljarens tecken och av vilket tecken nämnaren har *på den sida* vi närmar oss från. Exempel:

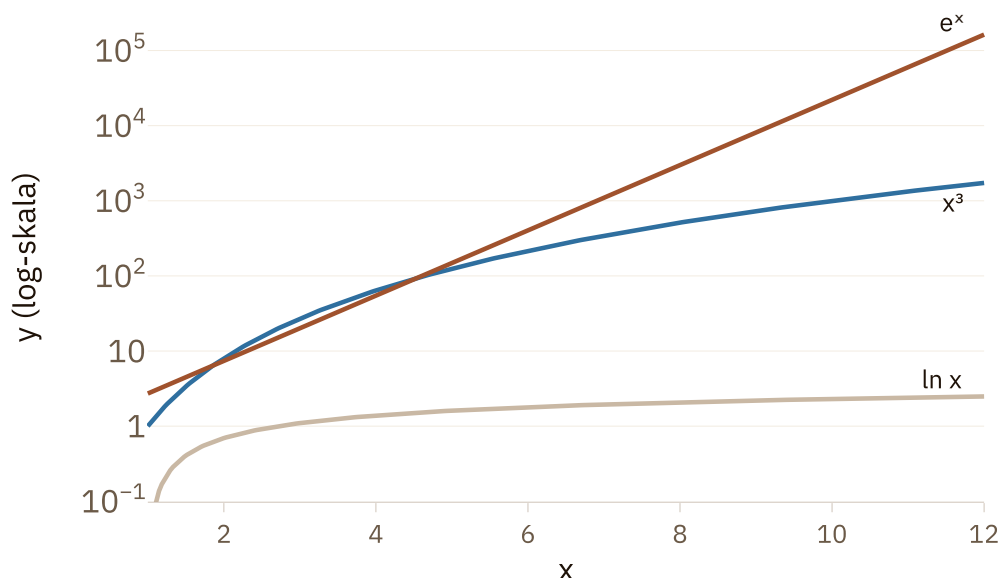
$$\frac{x}{(2+x)^2} \rightarrow -\infty \text{ då } x \rightarrow -2, \text{ eftersom täljaren är nära } -2 \text{ och nämnaren är positiv på båda sidor.}$$

3. Standardgränsvärden

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0 \quad (p > 0)$$

Tumregel: e^x växer snabbare än varje potens, som växer snabbare än $\ln x$.

I logaritmisk skala syns tillväxtordningen: $\ln x \ll x^3 \ll e^x$ när $x \rightarrow \infty$.



Kursens lista över standardgränsvärden för utantillkunskap innehåller fyra sådana jämförelser. För $a > 0$ gäller

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^a e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0$$

och dessutom, för varje reellt t ,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^x = e^t,$$

som innehåller $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e$ i **Gränsvärden** som specialfallet $t = 1$.

 Härledning

Den första. För $x > 0$ är $e^x \geq \frac{x^k}{k!}$ för varje heltal $k \geq 0$; det är en term i Maclaurinserien, se **Taylor's formel**. Välj $k > a$. Då är

$$0 < \frac{x^a}{e^x} \leq \frac{k! x^a}{x^k} = \frac{k!}{x^{k-a}} \rightarrow 0,$$

och instängningsregeln ger resultatet.

De tre andra följer genom variabelbyte.

- $x = e^s$: $\frac{\ln x}{x^a} = \frac{s}{e^{as}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{as}{e^{as}} \rightarrow 0$ då $s \rightarrow \infty$.
- $x = -s$: $|x|^a e^x = \frac{s^a}{e^s} \rightarrow 0$ då $s \rightarrow \infty$.
- $x = \frac{1}{s}$: $x^a \ln x = -\frac{\ln s}{s^a} \rightarrow 0$ då $s \rightarrow \infty$.

4. Obestämda former mot oändligheten

Formerna $[\frac{\infty}{\infty}]$ och $[\infty - \infty]$ har inget givet värde; resultatet beror på *hur fort* termerna växer.

 Tre verktyg

- $[\frac{\infty}{\infty}]$: bryt ut det dominerande (§1), eller jämför tillväxt med standardgränsvärdena (§3).
- $[\infty - \infty]$ **med rötter**: förläng med konjugatet, så att skillnaden blir en kvot.
- **Rötter och negativa x**: $\sqrt{x^2} = |x|$, som är $-x$ när $x < 0$.

L'Hôpitals regel ger ett alternativ för $[\frac{0}{0}]$ och $[\frac{\infty}{\infty}]$ när derivatan är införd; se **Gränsvärdesberäkning med Taylor** för det kraftfullare verktyget för $[\frac{0}{0}]$.

 Vanliga fel

- $\infty - \infty = 0$ och $\frac{\infty}{\infty} = 1$. Båda är obestämda. $\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} \rightarrow 2$, inte 0.
- $\sqrt{x^2} = x$ **för alla** x . För $x \rightarrow -\infty$ är $\sqrt{x^2} = -x$, och tecknet på svaret byts.
- **Bryta ut fel term**. Att dela med x i stället för den högsta potensen i nämnaren lämnar kvar termer som växer, och räkningen går inte att avsluta.
- **Skriva** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$. De ensidiga gränsvärdena har olika tecken; då existerar gränsvärdet inte ens i oegentlig mening.

5. Lösta övningar

≡ Föreläsning 14, exempel 7 – rot i nämnaren

Vi beräknar

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{3x^2 + x + 1}}.$$

Lösning

Bryt ut x . Under roten bryter vi ut x^2 , och $\sqrt{x^2} = |x|$:

$$\frac{2x - 1}{\sqrt{3x^2 + x + 1}} = \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{|x| \sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}.$$

$x \rightarrow +\infty$. Här är $|x| = x$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$x \rightarrow -\infty$. Här är $|x| = -x$, och kvoten $\frac{x}{|x|} = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(2 - \frac{1}{x})}{\sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 14, exempel 9 – konjugat vid $[\infty - \infty]$

Vi beräknar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}).$$

Lösning

Förläng med konjugatet. Skillnaden av kvadraterna tar bort rötterna i täljaren:

$$\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} = \frac{(x^2 + 2x) - (x^2 - 2x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Bryt ut x . För $x > 0$ är $\sqrt{x^2} = x$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \frac{4}{1 + 1} = \boxed{2}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Asymptotbladet, övning 3 – sned asymptot

Vi bestämmer asymptoten till $y = \sqrt{x^2 + x}$ då $x \rightarrow +\infty$. En linje $y = kx + m$ är asymptot precis när

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{och} \quad m = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

båda existerar.

Lösning

Lutningen. För $x > 0$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

Förskjutningen. Nu uppstår $[\infty - \infty]$, och vi förlänger med konjugatet:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Svar.

$$\boxed{y = x + \frac{1}{2}}$$

Facit: $y = x + 1/2$.

≡ Övning – exponential mot potens

Vi beräknar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + x^{10}}{2e^x + \ln x}.$$

Lösning

Dominerande term. Enligt §3 växer e^x snabbast, så vi bryter ut e^x ur täljare och nämnare:

$$\frac{e^x + x^{10}}{2e^x + \ln x} = \frac{1 + \frac{x^{10}}{e^x}}{2 + \frac{\ln x}{e^x}}.$$

Standardgränsvärden. $\frac{x^{10}}{e^x} \rightarrow 0$, och $0 < \frac{\ln x}{e^x} < \frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ för $x > 1$. Alltså

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + x^{10}}{2e^x + \ln x} = \frac{1 + 0}{2 + 0} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Rimlighetskontroll. Numeriskt i $x = 200$ blir kvoten 0,5000 på fyra decimaler. Vid $x = 20$ är den däremot ungefär $1,06 \cdot 10^4$, eftersom x^{10} dominerar ända tills x är omkring 36.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- [1.3 Limits at Infinity and Infinite Limits](#)

Se även

- Gränsvärden
- Grafitning och asymptoter
- Kontinuitet
- Gränsvärdesberäkning med Taylor

Kontinuitet

19 okt. 2026, 7 min läsning

UTKAST

#envariabelanalys #kontinuitet

Kurs: M0065M **Förkunskaper:** Funktioner, Gränsvärden

Idén. En kontinuerlig funktion gör inga hopp: små ändringar i x ger små ändringar i $f(x)$, och grafen kan ritas utan att lyfta pennan. Det är kontinuiteten som gör direkt insättning i gränsvärden tillåten, och den bär de stora existenssatserna: en kontinuerlig funktion som byter tecken har ett nollställe, och på ett slutet intervall har den ett största och ett minsta värde.

1. Definition

Definition

Funktionen f är kontinuerlig i punkten a om

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Detta kräver tre saker:

1. $f(a)$ är definierad
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existerar
3. gränsvärdet är lika med funktionsvärdet

Är något av villkoren brutet säger vi att f är **diskontinuerlig** i a .

Ensidig kontinuitet. f är *högerkontinuerlig* i a om $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ och *vänsterkontinuerlig* om $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$. I en inre punkt är f kontinuerlig precis när den är både höger- och vänsterkontinuerlig. I en ändpunkt av definitionsmängden räcker den ena sidan: f är kontinuerlig i vänstra ändpunkten a om den är högerkontinuerlig där, och i högra ändpunkten b om den är vänsterkontinuerlig där.

På ett intervall. f är kontinuerlig på intervallet I om den är kontinuerlig i varje punkt av I . En **kontinuerlig funktion** är kontinuerlig i varje punkt av sin definitionsmängd. Därför är $\frac{1}{x}$ en kontinuerlig funktion, trots grafens avbrott: $x = 0$ hör inte till definitionsmängden.

2. Typer av diskontinuitet

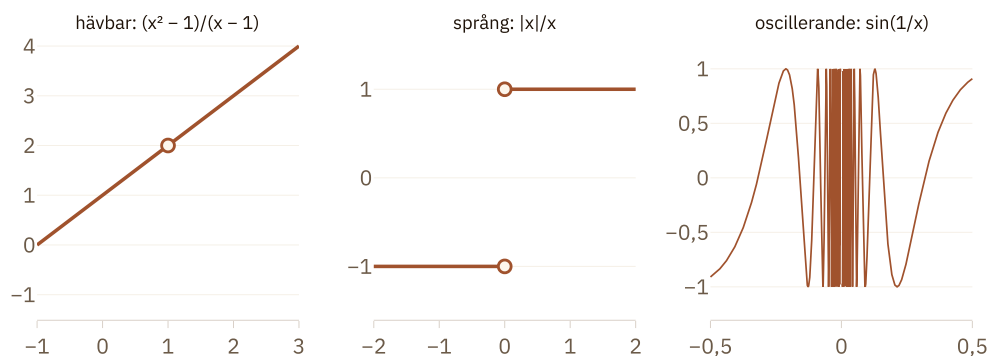
≡ Hävbar diskontinuitet

Funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

har gränsvärdet 2 då $x \rightarrow 1$, men uttrycket är inte definierat i $x = 1$. Det är en hävbar diskontinuitet.

Tre sorters diskontinuitet: ett hål som kan fyllas, ett språng, och en funktion som oscillerar utan gränsvärde.



≡ Språngdiskontinuitet

Om vänster- och högergränsvärdet finns men är olika, har funktionen ett språng. Exempel: $f(x) = \frac{|x|}{x}$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 1$ har $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ och $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. Den är högerkontinuerlig men inte kontinuerlig i 0, och inget val av $f(0)$ kan ta bort språnget.

≡ Väsentlig diskontinuitet

Funktionen $\sin(1/x)$ nära $x = 0$ oscillerar så mycket att något gränsvärde inte finns.

3. Räkneregler

Om f och g är kontinuerliga i a , så är även följande funktioner kontinuerliga i a :

- $f + g$
- $f - g$
- fg
- $\frac{f}{g}$ om $g(a) \neq 0$
- sammansättningen $g \circ f$

Det innebär att elementära funktioner i allmänhet är kontinuerliga på sina definitionsmängder.

Polynom, rationella funktioner, rationella potenser $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$, de trigonometriska funktionerna och $|x|$ är alla kontinuerliga där de är definierade.

Satsen om sammansättning ger en regel som används hela tiden: en kontinuerlig yttre funktion får flyttas förbi limes-tecknet. Om $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ och f är kontinuerlig i L , så är

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow c} g(x)) = f(L)$$

Det är den regeln som ger $\ln((1+x)^{1/x}) \rightarrow \ln e$ i härledningen av standardgränsvärdena i [Gränsvärden](#).

4. Viktiga satser

4.1 Direkt insättning

Om en funktion är kontinuerlig i en punkt får man beräkna gränsvärdet genom direkt insättning.

Example

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x/2) = \sin(\pi/2) = 1$$

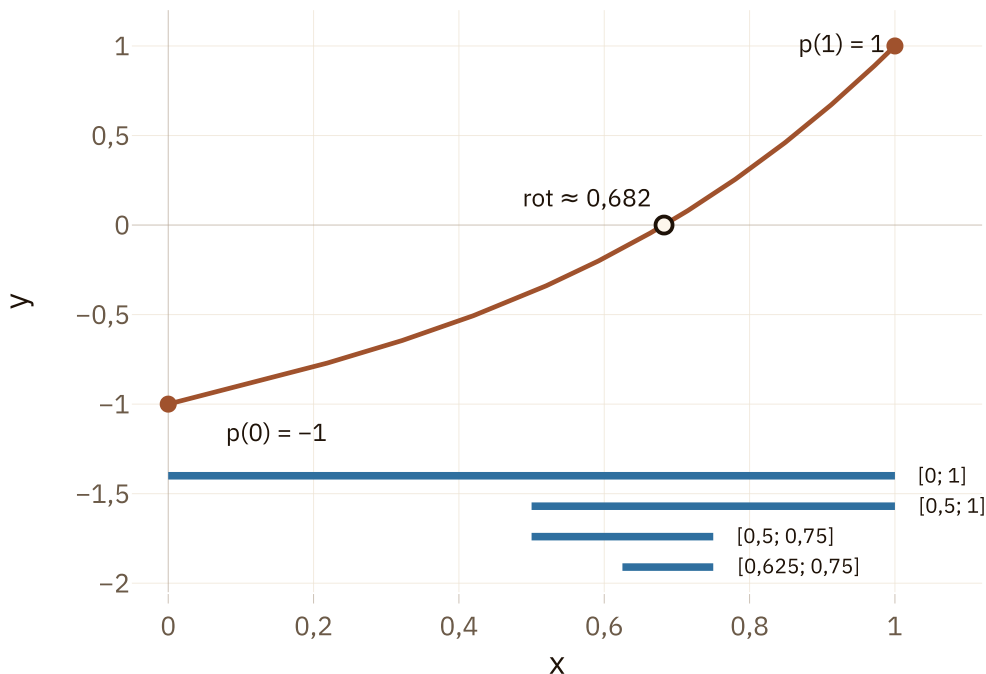
4.2 Mellanliggande värdets sats

Important

Om f är kontinuerlig på $[a, b]$, så antar den varje värde mellan $f(a)$ och $f(b)$.

Särskilt viktigt: om $f(a)$ och $f(b)$ har olika tecken finns minst ett nollställe i (a, b) .

Intervallhalvering: $p(0) < 0 < p(1)$, så en rot finns i $[0, 1]$. Varje halvering behåller den halva där teckenbytet sker.



Idé bakom satsen: halveringsmetoden

Antag $f(a) < 0 < f(b)$. Beräkna f i mittpunkten $m = \frac{a+b}{2}$. Är $f(m) = 0$ är vi klara; annars byter f tecken på en av halvorna $[a, m]$ eller $[m, b]$, och vi behåller den. Upprepat ger det en följd av inneslutna intervall med längderna $\frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$, där f alltid är negativ i vänster ändpunkt och positiv i höger. Ändpunkterna närmar sig ett gemensamt tal c (detta kräver de reella talens fullständighet, som kursen tar för given). Kontinuiteten ger då $f(c) \leq 0$ från vänsterändpunkterna och $f(c) \geq 0$ från högerändpunkterna, alltså $f(c) = 0$.

Metoden är också ett praktiskt sätt att ringa in ett nollställe, se exemplet nedan.

Exempel – ett nollställe till $x^3 + x - 1$

Vi visar att ekvationen $x^3 + x - 1 = 0$ har en lösning i intervallet $(0, 1)$ och ringar in den till ett intervall av längd $\frac{1}{8}$.

Lösning

Förutsättningar. $p(x) = x^3 + x - 1$ är ett polynom och alltså kontinuerligt på $[0, 1]$.

Teckenbyte. $p(0) = -1 < 0$ och $p(1) = 1 > 0$. Enligt satsen finns ett $c \in (0, 1)$ med $p(c) = 0$.

Halvera tre gånger.

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0, \quad p\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{64} > 0, \quad p\left(\frac{5}{8}\right) = -\frac{67}{512} < 0.$$

Tecknet byts mellan $\frac{5}{8}$ och $\frac{3}{4}$, så

$$c \in \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right) = (0,625; 0,75)$$

Eftersom $p'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ är p strängt växande, så lösningen är dessutom den enda.

Rimlighetskontroll. Numerisk lösning ger $c \approx 0,6823$, som ligger i intervallet.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

4.3 Extremvärdessatsen

Important

Om f är kontinuerlig på ett slutet intervall $[a, b]$, så antar den både ett största och ett minsta värde där.

Den satsen ligger bakom metoden för globala extremvärden i [Extremvärden](#).

Satsen garanterar bara att extremvärdena *finns*; den säger inte var. Båda villkoren behövs: $\frac{1}{x}$ på det öppna $(0, 1]$ saknar största värde, och $f(x) = x$ för $x < 1$, $f(1) = 0$ saknar största värde på $[0, 1]$ eftersom den är diskontinuerlig i 1.

⚠ Vanliga fel

- **Använda satserna utan att kontrollera villkoren.** $\frac{1}{x}$ har $f(-1) < 0 < f(1)$ men inget nollställe på $[-1, 1]$; den är inte kontinuerlig där, eftersom 0 inte ens hör till definitionsmängden.
- **Extremvärdessatsen på öppet intervall.** På (a, b) eller $[a, \infty)$ kan största eller minsta värde saknas.
- **Tro att en formel för $x \neq a$ räcker.** Kontinuitet i a kräver att $f(a)$ är definierat och lika med gränsvärdet; en hävbar diskontinuitet tas bara bort om vi *definierar* $f(a)$ som gränsvärdet.
- **Blanda ihop “kontinuerlig funktion” och “kontinuerlig på $\mathbb{R}$ ”.** $\frac{1}{x}$ är en kontinuerlig funktion men går inte att utvidga kontinuerligt till $x = 0$.

5. Kontinuitet och analysens fortsättning

Kontinuitet fungerar som bryggan mellan **Gränsvärden** och **Derivata**:

- först studerar man om gränsvärdet finns
- sedan om det sammanfaller med funktionsvärdet
- därefter kan man undersöka förändring med derivata

Integraler kräver också ofta kontinuitet för att fundamentalsatsen ska gälla i sin vanligaste form.

6. Lösta övningar

≡ Föreläsning 15, exempel 4 – kontinuerlig utvidgning

Funktionen

$$f(t) = \frac{t^2 - 5t + 6}{t^2 - t - 6}$$

är inte definierad i $t = 3$. Vi undersöker hur f kan definieras där så att den blir kontinuerlig i $t = 3$, och om samma sak går i $t = -2$.

Lösning

Faktorisera.

$$f(t) = \frac{(t-2)(t-3)}{(t+2)(t-3)}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}.$$

Gränsvärdet i $t = 3$.

$$\lim_{t \rightarrow 3} f(t) = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t-2}{t+2} = \frac{1}{5}$$

Utvidgningen. Sätt

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} \frac{t-2}{t+2}, & t \neq -2, t \neq 3, \\ \frac{1}{5}, & t = 3. \end{cases}$$

Då är $\lim_{t \rightarrow 3} \tilde{f}(t) = \tilde{f}(3)$, så $f(3) = \frac{1}{5}$ ger kontinuitet. Diskontinuiteten i $t = 3$ är **hävbar**.

I $t = -2$. Täljaren går mot $-4 \neq 0$ och nämnaren mot 0 , så $f(t) \rightarrow \pm\infty$ från de två sidorna. Något ändligt gränsvärde finns inte, och f kan inte göras kontinuerlig i $t = -2$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 15, exempel 5 – extremvärden på slutet intervall

Summan av två icke-negativa tal är 8. Vi bestämmer den minsta och den största möjliga summan av talens kvadrater.

Lösning

Modell. Talen är x och $8 - x$ med $0 \leq x \leq 8$. Vi söker min och max av

$$f(x) = x^2 + (8 - x)^2, \quad x \in [0, 8].$$

Existens. f är ett polynom och alltså kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[0, 8]$. Extremvärdessatsen garanterar att både minsta och största värde antas.

Kvadratkomplettera.

$$f(x) = 2x^2 - 16x + 64 = 2(x - 4)^2 + 32.$$

Minimum fås då $(x - 4)^2 = 0$: $f(4) = 32$.

Maximum fås då x ligger så långt från 4 som möjligt, i ändpunkterna: $f(0) = f(8) = 64$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Övning – välj konstanten

Vi bestämmer konstanten a så att

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, & x < 1, \\ 3x - a, & x \geq 1 \end{cases}$$

blir kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$.

Lösning

Där det räcker med räkneregler. För $x < 1$ och $x > 1$ är f ett polynom och alltså kontinuerlig. Bara skarven $x = 1$ återstår.

Ensidiga gränsvärden.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 - a = f(1).$$

f är alltså högerkontinuerlig i 1 för varje a .

Villkor. Kontinuitet kräver att de är lika: $a + 1 = 3 - a$, alltså $\boxed{a = 1}$.

Rimlighetskontroll. Med $a = 1$ är $f(0,999) = 0,999^2 + 1 \approx 1,998$ och $f(1) = 2$, och skillnaden krymper när $x \rightarrow 1^-$.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 1.4 Continuity

Se även

- Gränsvärden

- Derivata
- Extremvärden
- Integraler
- Oegentliga gränsvärden

Resurser

- [Khan Academy: Continuity](#) 
 - [Wikipedia: Continuous function](#) 
 - [Wikipedia: Intermediate value theorem](#) 
-

Derivata

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#envariabelanalys #derivata

Kurs: M0065M **Förkunskaper:** Gränsvärden, Kontinuitet

Derivatan svarar på frågan *hur snabbt ändras funktionen just här?* Vi kan inte dela en förändring med ett tidsintervall av längd noll, så vi gör det näst bästa: vi mäter medellutningen över ett litet intervall och låter intervallet krympa. Gränsvärdet, om det finns, är tangentens lutning.

1. Definition

Definition

Derivatan av f i punkten a definieras av

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivatan mäter funktionens **momentana förändringshastighet**.

Idén – från sekant till tangent

Linjen genom $P = (a, f(a))$ och en rörlig punkt $Q = (a+h, f(a+h))$ på kurvan är en **sekant**. Dess lutning är **differenskvoten**

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

När Q glider mot P vrider sig sekanten kring P . Vi *definierar* tangenten som den linje genom P vars lutning är gränsvärdet av sekanternas lutningar.

Den alternativa formen

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

är ofta praktisk.

Existerar gränsvärdet säger vi att f är **deriverbar** i a . Låter vi punkten variera får vi en ny funktion f' , och vi skriver

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x), \quad f'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

≡ Exempel – derivatan av $\sqrt{x}$ ur definitionen

Vi bestämmer $f'(x)$ för $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, direkt ur definitionen.

Lösning

Förläng med konjugatet så att rottecknen försvinner ur täljaren:

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}.$$

Låt $h \rightarrow 0$. Roten är kontinuerlig, så $\sqrt{x+h} \rightarrow \sqrt{x}$ och

$$f'(x) = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{2} x^{-1/2}.$$

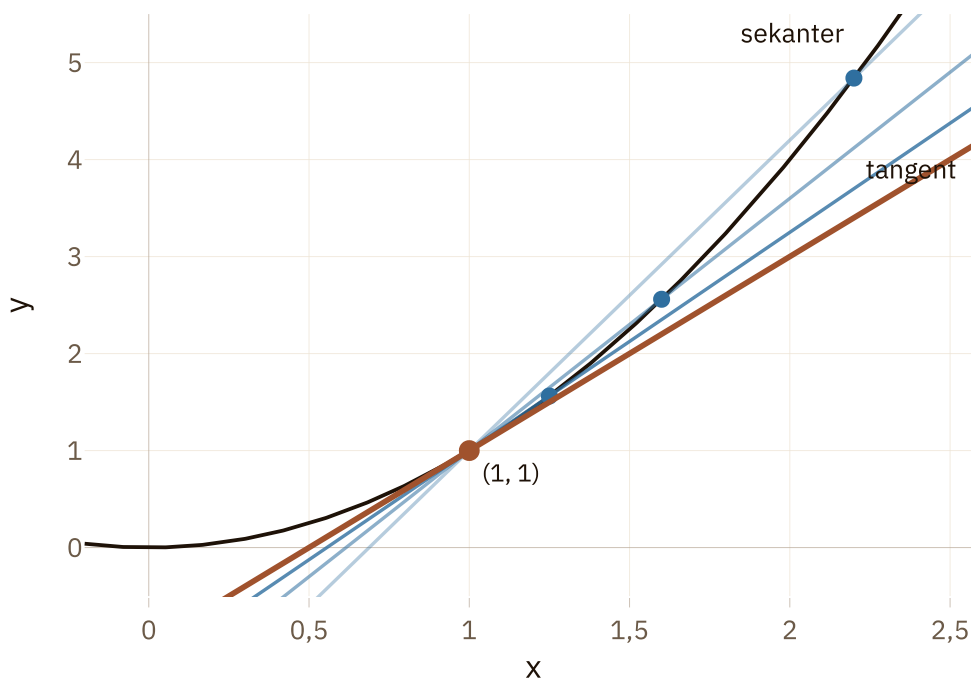
Det stämmer med potensregeln $(x^n)' = nx^{n-1}$ för $n = \frac{1}{2}$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

2. Geometrisk och fysisk tolkning

- geometriskt: tangentens lutning i punkten $(a, f(a))$
- fysiskt: momentan hastighet om f beskriver läge som funktion av tid

Sekanterna genom $(1, 1)$ och $(1+h, (1+h)^2)$ vrids mot tangenten $y = 2x - 1$ när $h \rightarrow 0$.



Tangentens ekvation är

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Normalen är linjen genom samma punkt som står vinkelrätt mot tangenten. Två linjer med lutningarna k_1 och k_2 är vinkelräta när $k_1 k_2 = -1$, så om $f'(a) \neq 0$ är normalen

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

Exempel

Om $f(x) = x^2$ och $a = 3$, så är $f'(x) = 2x$ och $f'(3) = 6$. Tangenten blir

$$y = 9 + 6(x - 3) = 6x - 9.$$

Normalen har lutningen $-\frac{1}{6}$, alltså $y = 9 - \frac{1}{6}(x - 3)$.

Vertikal tangent och spets

Gränsvärdet kan bli oändligt. För $f(x) = x^{1/3}$ är

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^{1/3}}{h} = \frac{1}{h^{2/3}} \rightarrow +\infty \quad \text{från båda håll,}$$

så grafen är slät men har y-axeln som (vertikal) tangent i origo; f är inte deriverbar där. För $f(x) = x^{2/3}$ blir differenskvoten $1/h^{1/3}$, som går mot $+\infty$ från höger och $-\infty$ från vänster. Kurvan har en **spets** i origo och saknar tangent där.

⚠ Vanliga fel

- **Sätta $h = 0$ för tidigt.** Differenskvoten är alltid $\frac{0}{0}$ i $h = 0$; först måste h förkortas bort (utveckla, förläng med konjugat, gör liknämning).
- **Blanda ihop $f'(x)$ och $f'(a)$.** Tangentens lutning är ett tal, $f'(a)$. Skriver vi $y = f(a) + f'(x)(x - a)$ blir "tangenten" ingen rät linje.
- **Punkten ligger inte på kurvan.** Tangent genom en punkt utanför kurvan kräver att tangeringspunkten $(a, f(a))$ införs som obekant (se Föreläsning 17, exempel 7 nedan).
- **Normalens lutning.** Den är $-1/f'(a)$, inte $1/f'(a)$ och inte $-f'(a)$.

3. Standardregler

Regel	Formel
Konstantregel	$(c)' = 0$
Potensregel	$(x^n)' = nx^{n-1}$
Summaregel	$(f + g)' = f' + g'$
Produktregel	$(fg)' = f'g + fg'$
Kvotregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
Kedjeregeln	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Reglerna härleds och övas i [Deriveringsregler](#).

💡 Tip

Kedjeregeln kan sammanfattas som: **yttre derivata gånger inre derivata**.

☰ Kedjeregeln

$$\frac{d}{dx}e^{x^2} = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$$

✎ Härledning: potensregeln för $n = 1, 2, 3, \dots$

Faktoriseringen $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, med n termer i den andra parentesen, ger med $a = x + h$, $b = x$ och $a - b = h$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}.$$

När $h \rightarrow 0$ går varje term mot x^{n-1} , och det är n termer:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

4. Deriverbarhet och kontinuitet

🔥 Important

Om f är deriverbar i a , så är f också kontinuerlig i a .

✎ Härledning

Eftersom differenskvoten har gränsvärdet $f'(a)$ gäller

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h = f'(a) \cdot 0 = 0,$$

alltså $f(a+h) \rightarrow f(a)$ när $h \rightarrow 0$. Det är precis definitionen av att f är **kontinuerlig** i a .

Omvändningen gäller däremot inte alltid.

☰ Klassiskt motexempel

Funktionen $f(x) = |x|$ är kontinuerlig i 0, men inte deriverbar där eftersom vänster- och högerderivatan är olika. Differenskvoten i 0 är $|h|/h$, som är 1 för $h > 0$ och -1 för $h < 0$. För $x \neq 0$ är $f'(x) = \text{sgn}(x)$.

Tumregel: derivatan finns där kurvans lutning ändras “mjukt”. I ett hörn, en spets eller en vertikal tangent saknas den.

5. Vanliga derivator

Funktion	Derivata
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Härledningarna finns i [Elementära funktioners derivator](#). Högre derivator används sedan i [Taylors formel](#) och analys av [Extremvärden](#).

6. Varför derivatan är central

Med derivatan kan man:

- avgöra om en funktion växer eller avtar
- hitta lokala och globala extremvärden
- approximera funktioner med tangenter och Taylors formel
- koppla ihop förändring och area via [Integraler](#)

7. Lösta övningar

☰ Föreläsning 17, exempel 1 – tangent ur definitionen

Vi bestämmer en ekvation för tangenten till kurvan $y = 2x^2 - 5$ i punkten $(2, 3)$, med hjälp av derivatans definition.

 Lösning

Lutningen. Med $f(x) = 2x^2 - 5$ är

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(4+4h+h^2) - 5 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8h + 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (8 + 2h) = 8$$

Enpunktsformeln. $y - 3 = 8(x - 2)$, dvs

$$\boxed{y = 8x - 13}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 17, exempel 7 – tangent genom en punkt utanför kurvan

Vi bestämmer de tangenter till kurvan $y = x^2 + 3$ som går genom punkten $(1, 0)$.

 Lösning

Punkten ligger inte på kurvan ($1^2 + 3 \neq 0$). Vi kallar tangeringspunkten $(a, a^2 + 3)$ och söker a .

Tangenten i $(a, a^2 + 3)$. $y' = 2x$ ger lutningen $2a$, så

$$y - (a^2 + 3) = 2a(x - a).$$

Villkoret. Tangenten ska gå genom $(1, 0)$:

$$0 - (a^2 + 3) = 2a(1 - a) \iff a^2 - 2a - 3 = 0 \iff (a + 1)(a - 3) = 0.$$

Två tangenter. $a = -1$ ger $y - 4 = -2(x + 1)$ och $a = 3$ ger $y - 12 = 6(x - 3)$:

$$\boxed{y = -2x + 2}$$

och

$$\boxed{y = 6x - 6}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 17, exempel 8 – tangent till en rationell funktion

Vi bestämmer tangenten till kurvan $y = f(x) = \frac{2x}{x+2}$ i $x = 2$. Vi har ännu ingen kvotregel, så lutningen tas fram ur definitionen.

Lösning

Punkten. $f(2) = \frac{4}{4} = 1$.

Lutningen. Vi gör liknämngt i täljaren:

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2(2+h)}{4+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+2h) - (4+h)}{h(4+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4+h} = \frac{1}{4}.$$

Tangenten. $y - 1 = \frac{1}{4}(x - 2)$, dvs

$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

Rimlighetskontroll. Kvotregeln ger $f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$ och $f'(2) = \frac{1}{4}$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Läsning

- [2.1 Tangent Lines](#)
- [2.2 The Derivative](#)

Se även

- [Kontinuitet](#)
- [Extremvärden](#)
- [Taylors formel](#)
- [Integraler](#)
- [Deriveringsregler](#)
- [Elementära funktioners derivator](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: The derivative](#) 
- [Khan Academy: Derivative as a concept](#) 
- [Wikipedia: Derivative](#) 

Deriveringsregler

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #derivata

Kurs: M0065M Förkunskaper: Derivata

Att derivera ur definitionen fungerar, men blir snabbt ohanterligt. Deriveringsreglerna säger hur derivatan av en summa, en produkt, en kvot och en sammansatt funktion byggs upp av delarnas derivator. Med dem och en kort tabell över **elementära derivator** kan vi derivera i stort sett varje formeluttryck utan att räkna ett enda gränsvärde.

1. Linjäritet

Om f och g är deriverbara gäller:

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(cf)' = cf'$$

Derivering är alltså en **linjär** operation: vi kan derivera term för term och bryta ut konstanter. Båda följer direkt av gränsvärdeslagarna för summor och konstanta faktorer.

2. Produktregeln

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (\text{produktregeln})$$

Idén

Tänk på $f \cdot g$ som arean av en rektangel med sidorna f och g . Växer sidorna med Δf och Δg tillkommer två remsor, $\Delta f \cdot g$ och $f \cdot \Delta g$, plus en liten hörnruta $\Delta f \Delta g$ som är försumbar i gränsen. De två remsorna är de två termerna i regeln.

 Härledning

Vi lägger till och drar ifrån $f(x)g(x+h)$ i täljaren:

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

När $h \rightarrow 0$ går den första kvoten mot $f'(x)$ och den andra mot $g'(x)$. Eftersom g är deriverbar är den också kontinuerlig, så $g(x+h) \rightarrow g(x)$. Kvar blir $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Regeln upprepas för fler faktorer; varje term deriverar en faktor i taget:

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

3. Kvotregeln

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (\text{kvotregeln})$$

Specialfallet $f = 1$ är **reciprocitetsregeln** $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$, som gäller där $g \neq 0$.

 Härledning

Reciprocitetsregeln. Vi gör liknämngt:

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = -\frac{1}{g(x)g(x+h)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \rightarrow -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Kvotregeln. Skriv $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ och använd produktregeln:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Exempel – kvotregeln

Vi deriverar $z(t) = \frac{t^2 + 2t}{t^2 - 1}$.

 Lösning

$$z'(t) = \frac{(2t+2)(t^2-1) - (t^2+2t) \cdot 2t}{(t^2-1)^2} = \frac{2t^3 + 2t^2 - 2t - 2 - 2t^3 - 4t^2}{(t^2-1)^2} = \boxed{-\frac{2(t^2+t+1)}{(t^2-1)^2}}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

4. Kedjeregeln

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)} \quad (\text{kedjeregeln})$$

Med $y = f(u)$ och $u = g(x)$ blir regeln i Leibniz notation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Den **yttre** funktionen deriveras med den inre orörd, och resultatet multipliceras med den **inre** funktionens derivata. Med tre led blir det $(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

 Example

$$\frac{d}{dx} \sin(x^2) = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

 Härledning (skiss)

Sätt $u = g(x)$ och $k = g(x+h) - g(x)$. Eftersom g är deriverbar är den kontinuerlig, så $k \rightarrow 0$ när $h \rightarrow 0$. Om $k \neq 0$ kan vi förlänga:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(u+k) - f(u)}{k} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \rightarrow f'(u) \cdot g'(x).$$

Skissen haltar om $k = 0$ för oändligt många h nära 0 (till exempel om g är konstant nära x). Ett fullständigt bevis som undviker det finns i Adams.

 Exempel – tre led

Vi deriverar $y = \frac{1}{2 + \sqrt{3x+4}}$.

 Lösning

Dela upp. $y = \frac{1}{u}$, $u = 2 + \sqrt{v}$, $v = 3x + 4$, med derivatorna

$$\frac{dy}{du} = -\frac{1}{u^2}, \quad \frac{du}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}}, \quad \frac{dv}{dx} = 3.$$

Multiplitera.

$$y' = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot 3 = \boxed{-\frac{3}{2\sqrt{3x+4}(2+\sqrt{3x+4})^2}}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

5. Kopplade hastigheter

När två eller fler tidsberoende storheter hänger ihop genom en ekvation kan vi derivera ekvationen med avseende på tiden t . Då får vi en ekvation som relaterar storheternas **ändringshastigheter**, och den kan lösas för den okända hastigheten.

 Arbetsgång

1. Rita en figur och inför storheterna som funktioner av t .
2. Skriv sambandet mellan dem (area, volym, Pythagoras, trigonometri).
3. Derivera sambandet med avseende på t – med produkt- och kedjeregeln.
4. **Först nu** sätter vi in värdena vid den aktuella tidpunkten och löser ut den sökta derivatan.

 Exempel – rektangel med konstant area

Vid en viss tidpunkt är en rektangel 16 m lång och 12 m bred. Bredden ökar med 3 m/s. Vi bestämmer hur snabbt längden ändras om arean är oförändrad.

 Lösning

Samband. $A(t) = b(t) \ell(t)$.

Derivera. Produktregeln ger $A' = b' \ell + b \ell'$.

Sätt in. $A' = 0, b' = 3, b = 12, \ell = 16$:

$$0 = 3 \cdot 16 + 12 \ell' \iff \ell' = \boxed{-4 \text{ m/s}}$$

Längden minskar med 4 m/s.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

⚠ Vanliga fel

- **Glömma inre derivatan.** $((2x + 3)^6)' = 6(2x + 3)^5 \cdot 2$, inte $6(2x + 3)^5$.
- $(fg)' = f'g'$. Produktens derivata är *inte* produkten av derivatorna; motsvarande gäller för kvoten.
- **Tecken och ordning i kvotregeln.** Täljaren är $f'g - fg'$, med minus och i den ordningen. Byts termerna byter svaret tecken.
- **Sätta in värden för tidigt** vid kopplade hastigheter. Deriverar vi efter att ha satt in $r = 5$ blir dr/dt felaktigt noll.

6. Lösta övningar

≡ Föreläsning 18, exempel 5 – förenkla före kvotregeln

Vi beräknar y' om

$$y = \frac{x}{2x + \frac{1}{3x+1}}.$$

Lösning

Förenkla dubbelbråket genom att förlänga med $3x + 1$:

$$y = \frac{(3x + 1)x}{2x(3x + 1) + 1} = \frac{3x^2 + x}{6x^2 + 2x + 1}.$$

Kvotregeln.

$$y' = \frac{(6x+1)(6x^2+2x+1) - (3x^2+x)(12x+2)}{(6x^2+2x+1)^2}.$$

Förenkla täljaren. $(36x^3 + 18x^2 + 8x + 1) - (36x^3 + 18x^2 + 2x) = 6x + 1$, så

$$y' = \frac{6x+1}{(6x^2+2x+1)^2}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 18, exempel 19 – växande cylinder

Volymen av en rät cirkulär cylinder är 60 cm^3 och växer med $2 \text{ cm}^3/\text{min}$ vid en tidpunkt då radien är 5 cm och ökar med $1 \text{ cm}/\text{min}$. Vi bestämmer hur fort höjden ändras vid denna tidpunkt.

Lösning

Samband. $V = \pi r^2 h$ med V , r och h som funktioner av t .

Derivera med produkt- och kedjeregeln:

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} h + \pi r^2 \frac{dh}{dt}.$$

Höjden vid tidpunkten. $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{60}{25\pi} = \frac{12}{5\pi} \text{ cm}.$

Sätt in $\frac{dV}{dt} = 2$, $r = 5$, $\frac{dr}{dt} = 1$:

$$2 = 2\pi \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{12}{5\pi} + 25\pi \frac{dh}{dt} = 24 + 25\pi \frac{dh}{dt} \iff \frac{dh}{dt} = \boxed{-\frac{22}{25\pi} \text{ cm/min}} \approx -0,28 \text{ cm/n}$$

Höjden **minskar**: radien växer så snabbt att volymökningen inte räcker till.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 18, exempel 20 – stegen mot en vägg

Översta delen av en 5 m lång stegen vilar mot en vertikal vägg. Basen dras bort från väggen med $\frac{1}{3} \text{ m/s}$. Vi bestämmer hur fort stegens topp åker nedåt längs väggen när den är 3 m över marken.

 Lösning

Samband. Med basens avstånd $x(t)$ till väggen och toppens höjd $y(t)$ ger Pythagoras $x^2 + y^2 = 25$.

Derivera med avseende på t :

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0.$$

Sätt in. $y = 3$ ger $x = \sqrt{25 - 9} = 4$, och $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$:

$$2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 3 \frac{dy}{dt} = 0 \iff \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{9}.$$

Toppen åker nedåt med $\boxed{\frac{4}{9} \text{ m/s}}$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Läsning

- [2.3 Differentiation Rules](#)

Se även

- [Derivata](#)
- [Elementära funktioners derivator](#)
- [Kedjeregeln](#)
- [Implicit derivering](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Chain rule and product rule](#)

Elementära funktioners derivator

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #derivata

Kurs: M0065M Förkunskaper: Derivata

Med **deriveringsreglerna** kan vi derivera sammansatta uttryck, men bara om vi redan känner derivatorna av byggstenarna: potenser, exponential- och logaritmfunktioner, trigonometriska funktioner och deras inverser. Tabellen nedan är den listan. Varje rad kommer ur ett standardgränsvärde, och härledningarna visar vilket.

1. Tabell

Funktion	Derivata
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$1/x$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$

Potensregeln $x^n \mapsto nx^{n-1}$ gäller för alla reella exponenter när $x > 0$ (se avsnitt 2). De trigonometriska formlerna förutsätter att vinklar mäts i **radianer**.

2. Exponential- och logaritmfunktioner

Talet e är den bas som gör att tangenten till $y = a^x$ i $x = 0$ har lutningen 1. Ur det följer hela raden av derivator för **exponential- och logaritmfunktioner**.

 **Härledning:** $(e^x)' = e^x$ och $(a^x)' = a^x \ln a$

För $f(x) = a^x$ är

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x f'(0).$$

Derivatan är alltså proportionell mot funktionen själv. För $a = e$ är $f'(0) = 1$ per definition, så $(e^x)' = e^x$. För andra baser skriver vi om $a^x = e^{x \ln a}$ och får med **kedjeregeln**

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = \ln a \cdot e^{x \ln a} = a^x \ln a.$$

Som biprodukt får vi standardgränsvärdena $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ och $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$.

 **Härledning:** $(\ln x)' = 1/x$

Först standardgränsvärdet $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\ln(1+k)}{k} = 1$: sätt $h = \ln(1+k)$, alltså $k = e^h - 1$, och $h \rightarrow 0$ när $k \rightarrow 0$. Då är

$$\frac{\ln(1+k)}{k} = \frac{h}{e^h - 1} \rightarrow 1.$$

För $x > 0$ ger logaritmlagarna och substitutionen $k = h/x$

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{h} = \frac{\ln(1+k)}{k} \cdot \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x}.$$

Eftersom $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ följer $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. Samma resultat fås ur **inversens derivata**, eftersom $\ln$ är inversen till e^x .

 **Härledning:** $(x^a)' = ax^{a-1}$ för reella a och $x > 0$

Skriv $x^a = e^{a \ln x}$. Kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dx} x^a = \frac{a}{x} e^{a \ln x} = \frac{a}{x} x^a = ax^{a-1}.$$

3. Trigonometriska funktioner

Derivatorna av sinus och cosinus bygger på två standardgränsvärden (vinkeln i radianer):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0.$$

 **Härledning:** $(\sin x)' = \cos x$ och $(\cos x)' = -\sin x$

Additionsformeln $\sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$ ger

$$\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} - \sin x \cdot \frac{1 - \cos h}{h} \rightarrow \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot 0 = \cos x.$$

På samma sätt ger $\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$

$$\frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = -\sin x \cdot \frac{\sin h}{h} - \cos x \cdot \frac{1 - \cos h}{h} \rightarrow -\sin x.$$

 **Härledning:** $(\tan x)'$

Kvotregeln ger

$$\frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Med trigonometriska ettan blir täljaren 1; delar vi i stället upp bråket får vi $1 + \tan^2 x$. Båda formerna är användbara:

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

På samma sätt ger reciprocitetsregeln

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{\sin x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

4. Hyperboliska funktioner

För de hyperboliska funktionerna följer allt direkt ur $(e^{\pm x})' = \pm e^{\pm x}$:

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx} \tanh x = 1 - \tanh^2 x.$$

Till exempel är $\frac{d}{dx} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Lägg märke till att $\cosh$ saknar det minustecken som $\cos$ har.

5. Logaritmisk derivering

$$\boxed{\frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}}, \quad f(x) \neq 0.$$

För $f > 0$ är det kedjeregeln; för $f < 0$ är $\ln |f| = \ln(-f)$ och derivatan $\frac{-f'}{-f}$, samma sak. Specialfallet $f(x) = x$ ger $(\ln |x|)' = 1/x$ för alla $x \neq 0$.

Formeln gör det möjligt att derivera **variabel bas upphöjt till variabel exponent**, där varken potens- eller exponentialregeln gäller. För $f > 0$ ger $y = f^g$ att $\ln y = g \ln f$, och derivering av båda sidor ger

$$\frac{y'}{y} = g' \ln f + g \frac{f'}{f} \implies y' = (g' \ln f + \frac{g f'}{f}) f^g.$$

≡ Exempel – derivatan av 5^{2x+1}

Vi deriverar $y = 5^{2x+1}$.

Lösning

Skriv om med e . $\ln y = (2x + 1) \ln 5$, så $y = e^{(2x+1) \ln 5}$.

Kedjeregeln.

$$y' = e^{(2x+1) \ln 5} \cdot 2 \ln 5 = \boxed{2 \ln 5 \cdot 5^{2x+1}}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

6. Arcusfunktioner

Derivatorna av $\arcsin$, $\arccos$ och $\arctan$ i tabellen härleds med regeln för **inversa funktioners derivata**; se även **Arcusfunktioner**. De är algebraiska, trots att funktionerna själva är transcendent, och därför dyker de upp som primitiva funktioner till rationella uttryck och rotuttryck.

Vanliga fel

- $(a^x)' = xa^{x-1}$. Potensregeln gäller när *exponenten* är konstant. Med variabel exponent är det $(a^x)' = a^x \ln a$.
- $(x^x)' = x \cdot x^{x-1}$ **eller** $x^x \ln x$. Båda är fel; varken bas eller exponent är konstant. Skriv $x^x = e^{x \ln x}$ (eller derivera logaritmiskt).
- **Grader i stället för radianer.** $(\sin x)' = \cos x$ bygger på $\sin h/h \rightarrow 1$, som bara gäller i radianer.
- **Tappa inre derivatan i logaritmen.** $(\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$, inte $\frac{1}{x^2 + 1}$.

7. Lösta övningar

Föreläsning 19, exempel 2 – kritisk punkt för x^x

Vi bestämmer alla kritiska punkter till $f(x) = x^x$, $x > 0$.

Lösning

Skriv om. $\ln y = x \ln x$, så $y = e^{x \ln x}$.

Derivera med kedje- och produktregeln:

$$f'(x) = e^{x \ln x} \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (1 + \ln x).$$

Lös $f'(x) = 0$. $x^x > 0$, så $f'(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff \ln x = -1$:

$$\boxed{x = \frac{1}{e}}$$

Funktionsvärdet där är $f(1/e) = (1/e)^{1/e} = e^{-1/e} \approx 0,692$. Eftersom $f' < 0$ för $x < 1/e$ och $f' > 0$ för $x > 1/e$ är det ett minimum.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 19, exempel 5 – tangenter genom origo

Vi bestämmer de tangenter till kurvorna $y = e^x$ respektive $y = \ln x$ som går genom origo. Ingen av kurvorna går själv genom origo.

Lösning

$y = e^x$. Tangenten i (a, e^a) är $y - e^a = e^a(x - a)$. Den går genom origo om

$$0 - e^a = e^a(0 - a) \iff e^a = ae^a \iff a = 1,$$

så tangenten är $y - e = e(x - 1)$, dvs $y = ex$.

$y = \ln x$. Tangenten i $(b, \ln b)$ är $y - \ln b = \frac{1}{b}(x - b)$. Den går genom origo om

$$0 - \ln b = \frac{1}{b}(0 - b) \iff \ln b = 1 \iff b = e,$$

så tangenten är $y = \frac{x}{e}$.

Rimlighetskontroll. Kurvorna är varandras spegelbilder i $y = x$, och det är tangenterna också: $y = ex$ speglad blir $x = ey$, alltså $y = x/e$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 19, exempel 6 – trigonometrisk kvot

Vi beräknar $\frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} \right)$.

Lösning

Kvotregeln.

$$\frac{-\sin x (1 + \sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \sin x)^2}.$$

Trigonometriska ettan gör täljaren till $-(1 + \sin x)$, och en faktor förkortas bort:

$$-\frac{1}{1 + \sin x}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Läsning

- 2.5 Derivatives of Trigonometric Functions
- 3.3 The Natural Logarithm and Exponential Functions

Se även

- Deriveringsregler
- Arcusfunktioner
- Hyperboliska funktioner
- Inversa funktioners derivata
- Exponentialfunktioner och logaritmer

Implicit derivering

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #derivata

Kurs: M0065M **Förkunskaper:** Derivata, Kedjeregeln

Många kurvor i planet är inte grafen till en funktion $y = f(x)$. De beskrivs i stället av en ekvation i två variabler. Implicit derivering ger ändå tangentens lutning i varje punkt, utan att vi behöver lösa ut y .

1. Implicit form

En ekvation $F(x, y) = 0$, där $F(x, y)$ är ett uttryck i x och y , kallas en **implicit** beskrivning av kurvan. Cirkeln med radie 5 och centrum i origo är

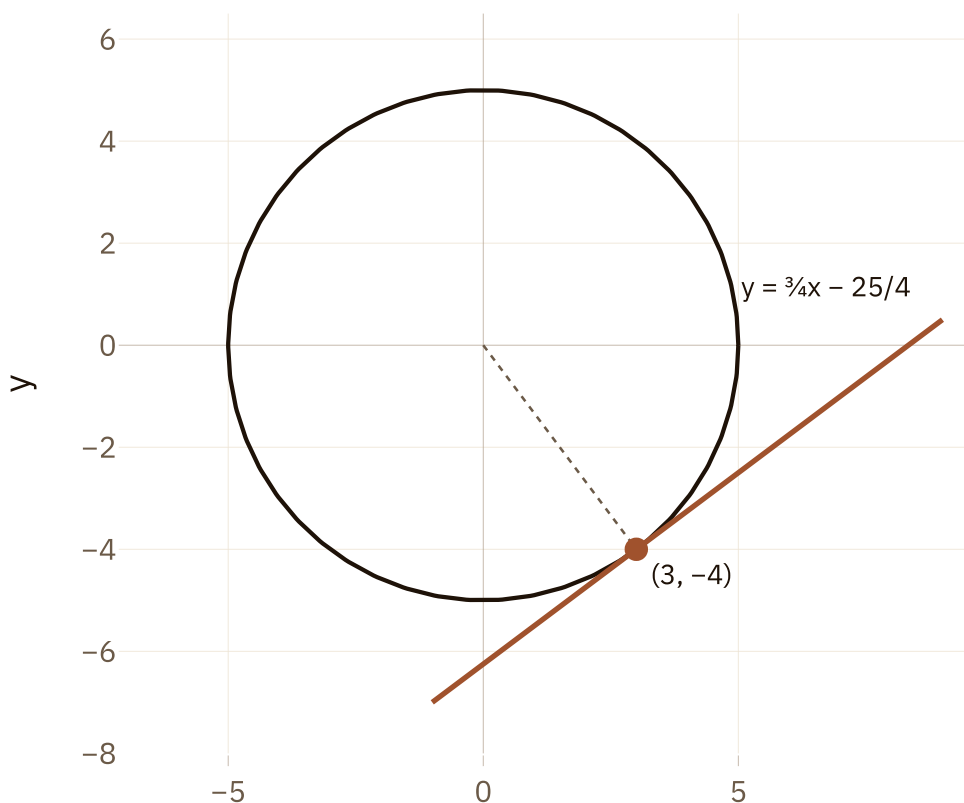
$$x^2 + y^2 = 25 \iff F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

Ibland går det att lösa ut y : här får vi $y = \sqrt{25 - x^2}$ (övre halvcirkeln) och $y = -\sqrt{25 - x^2}$ (undre). Men för en kurva som $x^2y^3 - x^3y^2 = 12$ går det inte i praktiken. Vi säger att sambandet definierar y som en (eller flera) **implicit definierade funktioner** av x .

2. Metoden

När y är en funktion av x men är given av ett samband $F(x, y) = 0$, deriverar man båda sidor med x och löser ut y' .

Cirkeln $x^2 + y^2 = 25$ och tangenten i $(3, -4)$, där $y' = -x/y = 3/4$.



Arbetsgång

1. Betrakta y som $y(x)$.
2. Derivera **båda leden** med avseende på x . Varje term som innehåller y ger en faktor y' via kedjeregeln.
3. Samla termerna med y' på ena sidan och lös ut y' .
4. Sätt in punktens koordinater — både x och y .

Nyckeln är **kedjeregeln** med y som inre funktion:

$$\frac{d}{dx} g(y) = g'(y) \cdot y'$$

Tip

Kom ihåg kedjeregeln varje gång y förekommer: $(y^2)' = 2yy'$, $(\sin y)' = \cos(y)y'$.

Produkter av x och y kräver dessutom produktregeln: $\frac{d}{dx}(x^2y^3) = 2xy^3 + x^2 \cdot 3y^2y'$.

≡ **Cirkel** $x^2 + y^2 = 1$

Derivera båda sidor:

$$2x + 2y y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

Svaret beror på både x och y . Det är naturligt: i en och samma x -koordinat har cirkeln två punkter, med motsatta lutningar. Där $y = 0$ är tangenten vertikal och y' odefinierad.

≡ Exempel – tangent och normal till en cirkel

Vi bestämmer tangenten och normalen till cirkeln $x^2 + y^2 = 25$ i punkten $(3, -4)$.

Lösning

Derivera implicit. $2x + 2y y' = 0$, så $y' = -\frac{x}{y}$.

I punkten. $y' = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$.

Tangenten. $y + 4 = \frac{3}{4}(x - 3)$, dvs

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$$

Normalen har lutningen $-\frac{4}{3}$: $y + 4 = -\frac{4}{3}(x - 3)$, dvs $y = -\frac{4}{3}x$.

Rimlighetskontroll. Normalen går genom origo, cirkelns medelpunkt, precis som en radie ska.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Härledning: varför metoden fungerar

Antag att $y = y(x)$ är deriverbar och uppfyller $F(x, y(x)) = 0$ för alla x i ett intervall. Då är vänsterledet en funktion av x som är identiskt noll, så dess derivata är noll. Varje term deriveras med de vanliga reglerna; en term $g(y(x))$ ger enligt kedjeregeln $g'(y(x))y'(x)$. Resultatet är en

ekvation som är *linjär* i y' och därför alltid kan lösas, utom där koefficienten framför y' är noll. Där har kurvan vertikal tangent, eller så beskriver ekvationen inte y som en deriverbar funktion av x nära punkten.

3. Andra derivatan

y'' fås genom att derivera uttrycket för y' en gång till — **implicit**, eftersom det innehåller y — och sedan ersätta y' med uttrycket vi redan har. Ofta kan kurvans ekvation användas för att förenkla resultatet (se Föreläsning 20, exempel 4 nedan).

Vanliga fel

- **Glömma y' .** $\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2y'$, inte $3y^2$. Samma för varje term med y , även inne i en produkt.
- **Derivera högerledet fel.** En konstant som 12 ger 0; högerledet deriveras också.
- **Bara sätta in x .** Lutningen $y' = -x/y$ kräver punktens y -koordinat; cirkeln har två punkter för varje x .
- **Dela med noll.** Där koefficienten framför y' är noll (till exempel $y = 0$ på en cirkel) är tangenten vertikal, och y' saknas.

4. Lösta övningar

Föreläsning 20, exempel 3 — tangent till en implicit kurva

Vi bestämmer tangentens ekvation till kurvan $x^2y^3 - x^3y^2 = 12$ i punkten $(-1, 2)$.

Lösning

Punkten ligger på kurvan. $(-1)^2 \cdot 2^3 - (-1)^3 \cdot 2^2 = 8 + 4 = 12$.

Derivera implicit med produktregeln och kedjeregeln:

$$2xy^3 + x^2 \cdot 3y^2y' - (3x^2y^2 + x^3 \cdot 2yy') = 0.$$

Lös ut y' .

$$(3x^2y^2 - 2x^3y)y' = 3x^2y^2 - 2xy^3 \iff y' = \frac{3x^2y^2 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 2x^3y}.$$

I punkten $(-1, 2)$.

$$y' = \frac{3 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) \cdot 8}{3 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) \cdot 2} = \frac{12 + 16}{12 + 4} = \frac{7}{4}.$$

Tangenten.

$$\boxed{y - 2 = \frac{7}{4}(x + 1)} \iff y = \frac{7}{4}x + \frac{15}{4}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 20, exempel 4 – andraderivata på en ellips

Vi bestämmer y'' uttryckt i x och y när $x^2 + 4y^2 = 4$. Kurvan är ellipsen $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$.

Lösning

Första derivatan. $2x + 8yy' = 0$, så

$$y' = -\frac{x}{4y}.$$

Derivera en gång till (implicit, $2x + 8yy' = 0$ med produktregeln på yy'):

$$2 + 8(y')^2 + 8yy'' = 0 \iff y'' = -\frac{1 + 4(y')^2}{4y}.$$

Sätt in y' .

$$y'' = -\frac{1 + \frac{x^2}{4y^2}}{4y} = -\frac{4y^2 + x^2}{16y^3}.$$

Använd kurvans ekvation. $x^2 + 4y^2 = 4$, så

$$\boxed{y'' = -\frac{1}{4y^3}}$$

Rimlighetskontroll. På övre halvan ($y > 0$) är $y'' < 0$: ellipsen buktar nedåt där, som den ska.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

☰ Föreläsning 20, exempel 5 – kurvor som skär varandra under rät vinkel

Vi visar att ellipsen $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$ och hyperbeln $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ skär varandra under räta vinklar.

Lösning

Vi ska visa att kurvorna har en skärningspunkt (a, b) och att tangenterna där är vinkelräta, alltså att produkten av lutningarna är -1 .

Skärningspunkter. Subtrahera ekvationerna:

$$a^2 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{13^2} \right) = b^2 \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{12^2} \right) \iff a^2 \cdot \frac{160}{3^2 \cdot 13^2} = b^2 \cdot \frac{10}{4^2 \cdot 12^2},$$

vilket ger

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{3^2 \cdot 13^2}{4^2 \cdot 12^2}.$$

Insättning visar att skärningspunkterna är $(\pm \frac{39}{5}, \pm \frac{48}{5})$, men vi behöver bara kvoten.

Lutningarna fås genom implicit derivering av respektive kurva:

$$\frac{2x}{13^2} + \frac{2yy'}{12^2} = 0 \Rightarrow k_1 = -\frac{12^2}{13^2} \cdot \frac{a}{b}, \quad \frac{2x}{3^2} - \frac{2yy'}{4^2} = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{4^2}{3^2} \cdot \frac{a}{b}.$$

Produkten.

$$k_1 k_2 = -\frac{12^2 \cdot 4^2}{13^2 \cdot 3^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} = -\frac{12^2 \cdot 4^2}{13^2 \cdot 3^2} \cdot \frac{3^2 \cdot 13^2}{4^2 \cdot 12^2} = \boxed{-1}$$

Tangenterna är vinkelräta i varje skärningspunkt.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Läsning

- 2.9 Implicit Differentiation

Se även

- [Kedjeregeln](#)

- Inversa funktioners derivata
 - Deriveringsregler
 - Derivata
-

Inversa funktioners derivata

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #derivata

Kurs: M0065M Förkunskaper: Derivata, Funktioner och invers

Grafen till inversen f^{-1} är grafen till f speglad i linjen $y = x$. Speglingen byter plats på x - och y -led, så en tangent med lutningen k blir en tangent med lutningen $1/k$. Det är hela innehållet i formeln nedan: inversens derivata är det inverterade värdet av f 's derivata, i den *motsvarande* punkten.

1. När finns inversen?

Om $f'(x) > 0$ på ett intervall (a, b) är f strängt växande där; om $f'(x) < 0$ är den strängt avtagande. I båda fallen är f **1-1** på intervallet och har en invers definierad genom

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y).$$

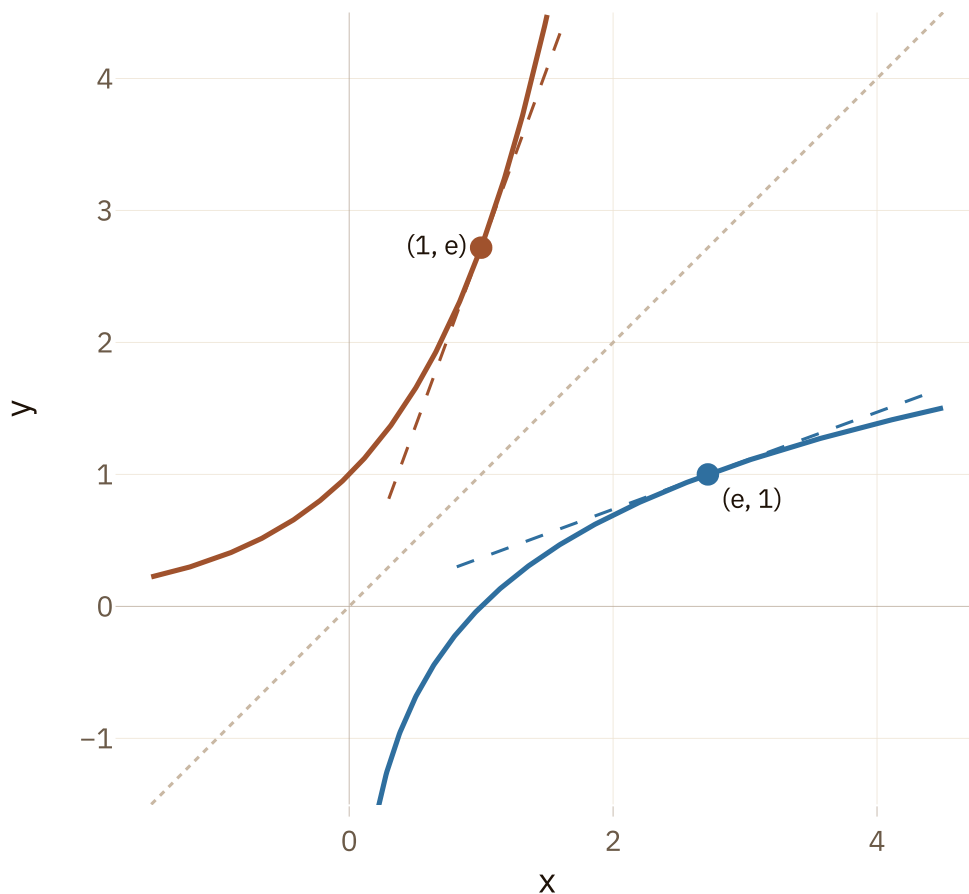
Att f' är noll i en **isolerad** punkt förstör inte monotonin: $f(x) = x^3$ är strängt växande trots att $f'(0) = 0$. Men i en sådan punkt har f en horisontell tangent, och speglingen får där en vertikal tangent — inversen är inte deriverbar i motsvarande punkt.

2. Formeln

Om f är deriverbar och strängt monoton med $y = f(x)$, så är inversen f^{-1} deriverbar där $f'(x) \neq 0$ och

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Speglingen i $y = x$ byter plats på x och y , så lutningen e i $(1, e)$ blir lutningen $1/e$ i $(e, 1)$.



Härledning

Sätt $y = f^{-1}(x)$, alltså $x = f(y)$ med $y = y(x)$. **Implicit derivering** med avseende på x ger med kedjeregeln

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}f(y) \implies 1 = f'(y) \cdot y',$$

så

$$y' = \frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Här har vi förutsatt att inversen är deriverbar; att den faktiskt är det där $f' \neq 0$ följer av speglingsargumentet i inledningen.

Lär dig metoden, inte formeln

I stället för att sätta in i formeln: skriv $x = f(y)$, derivera implicit och lös ut y' . Då kan det inte bli fel på vilken punkt f' ska beräknas i.

Example

För $f(x) = e^x$ med invers $f^{-1}(y) = \ln y$ ger formeln

$$(\ln y)' = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

Exempel – visa att inversen finns och beräkna dess derivata

Vi visar att $f(x) = \frac{4x^3}{x^2 + 1}$ är 1-1 och bestämmer $(f^{-1})'(2)$.

Lösning

Monotoni. Kvotregeln ger

$$f'(x) = \frac{12x^2(x^2 + 1) - 4x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^4 + 12x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

$f'(x) > 0$ överallt utom i den isolerade punkten $x = 0$, där $f'(0) = 0$. Alltså är f strängt växande på hela $\mathbb{R}$ och därmed 1-1.

Motsvarande punkt. Vi söker $y = f^{-1}(2)$, dvs lösningen till $\frac{4y^3}{y^2 + 1} = 2$, eller $4y^3 = 2(y^2 + 1)$. Vi ser direkt att $y = 1$ är en lösning, och eftersom f är 1-1 är det den enda.

Implicit derivering av $x = f(y)$ ger $1 = f'(y)y'$, så

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{(1^2 + 1)^2}{4 \cdot 1^4 + 12 \cdot 1^2} = \frac{4}{16} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

3. Arcusfunktionernas derivator

Samma metod ger derivatorna av **arcusfunktionerna**.

 Härledning: arcsin, arccos och arctan

arcsin. $y = \arcsin x \iff x = \sin y$ med $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Implicit derivering ger $1 = \cos y \cdot y'$. På intervallet är $\cos y \geq 0$, så trigonometriska ettan ger $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ och

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

arccos. Eftersom $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ är

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

arctan. $y = \arctan x \iff x = \tan y$ med $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Implicit derivering ger $1 = (1 + \tan^2 y)y'$, alltså

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

På samma sätt ger $y = \ln x \iff x = e^y$ att $1 = e^y y'$, alltså $(\ln x)' = 1/e^y = 1/x$.

 Vanliga fel

- **Fel punkt.** $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ där $f(a) = b$ – inte $\frac{1}{f'(b)}$. Först måste vi lösa $f(a) = b$.
- **Hoppa över monotonin.** Uppgifter av typen *visa att inversen finns* kräver ett argument, typiskt att $f' > 0$ (eller < 0) utom i isolerade punkter.
- $(f^{-1})' = \left(\frac{1}{f}\right)'$. Inversen f^{-1} är inte $1/f$. Beteckningen f^{-1} betyder omvänd funktion, inte reciprok.
- **Fel rottecken för arcsin.** $\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1 - x^2}$ eftersom vinkeln ligger i $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ där cosinus är icke-negativ.

4. Lösta övningar

 Föreläsning 21, exempel 2 – invers till $x\sqrt{3 + x^2}$

Vi visar att $f(x) = x\sqrt{3 + x^2}$ är 1-1 och bestämmer $(f^{-1})'(-2)$.

 Lösning

Monotoni. Produkt- och kedjeregeln ger

$$f'(x) = \sqrt{3+x^2} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{3+x^2}} = \frac{3+2x^2}{\sqrt{3+x^2}} > 0$$

för alla x , så f är strängt växande på $\mathbb{R}$ och därmed 1–1.

Motsvarande punkt. Vi löser $y\sqrt{3+y^2} = -2$. Kvadrering ger $y^4 + 3y^2 - 4 = 0$, och med $t = y^2$ blir det $(t-1)(t+4) = 0$. $t = -4$ är omöjligt, så $y^2 = 1$. Insättning visar att bara $y = -1$ ger -2 (kvadreringen gav en falsk rot).

Implicit derivering av $x = f(y)$ ger $1 = f'(y)y'$:

$$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{\sqrt{3+1}}{3+2} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

 Föreläsning 21, exempel 4 – explicit invers

Vi visar att $f(x) = 1 + 2x^3$ är 1–1 och bestämmer $(f^{-1})'(x)$.

 Lösning

Monotoni. $f'(x) = 6x^2 > 0$ för $x \neq 0$, och $f'(0) = 0$ i en isolerad punkt. Alltså är f strängt växande på $\mathbb{R}$ och 1–1.

Inversen. $x = 1 + 2y^3 \iff y^3 = \frac{x-1}{2} \iff y = f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^{1/3}.$

Alternativ 1 – direkt. Kedjeregeln:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{-2/3}.$$

Alternativ 2 – implicit. $1 = f'(y)y' = 6y^2 y'$ ger

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{6y^2} = \frac{1}{6\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2/3}}, \quad x \neq 1.$$

I $x = 1$, som motsvarar $y = 0$ där $f'(0) = 0$, har inversen vertikal tangent och saknar derivata.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

☰ Föreläsning 21, exempel 5 – invers till $x/\cos x$

Vi visar att $f(x) = \frac{x}{\cos x}$ är 1-1 på $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, bestämmer definitionsmängden för f^{-1} och beräknar $(f^{-1})'(0)$.

Lösning

Monotoni. Kvotregeln ger

$$f'(x) = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}.$$

På intervallet är $\cos x > 0$, och $x \sin x \geq 0$ eftersom x och $\sin x$ har samma tecken. Alltså är $f'(x) > 0$, och f är strängt växande och 1-1.

Värdemängden. $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{x}{\cos x} = +\infty$ och $\lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} \frac{x}{\cos x} = -\infty$. f är kontinuerlig, så $V_f = \mathbb{R}$ och

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

Derivatan. $f(0) = 0$, så $f^{-1}(0) = 0$. Implicit derivering av $x = f(y)$ ger

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{\cos^2 0}{\cos 0 + 0 \cdot \sin 0} = \boxed{1}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Läsning

- 3.1 Inverse Functions

Se även

- [Funktioner och invers](#)
 - [Arcusfunktioner](#)
 - [Implicit derivering](#)
 - [Elementära funktioners derivator](#)
-

Extremvärden

19 okt. 2026, 7 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #derivata #extremvärde #monotoni

Kurs: M0065M **Förkunskaper:** Derivata, Kontinuitet

Extremvärden är de största och minsta värden en funktion antar, antingen i hela sin definitionsmängd (globala) eller bara i närheten av en punkt (lokala). Vi använder dem för att optimera: största volym, kortaste tid, minsta avstånd.

Idén

I en jämn topp eller dal är tangenten vågrät, så derivatan är noll där. Derivatan pekar alltså ut ett fåtal **kandidater**, och vi behöver bara jämföra funktionsvärdena i dem i stället för att pröva alla x .

1. Kritiska punkter och extremvärden

Globalt maximum i $x_0 \in D_f$: $f(x) \leq f(x_0)$ för alla $x \in D_f$. **Lokalt maximum** i x_0 : det finns $h > 0$ så att $f(x) \leq f(x_0)$ när $|x - x_0| < h$ och $x \in D_f$. Minimum definieras på samma sätt med olikheten vänd.

Definition

En kritisk punkt är ett tal c där $f'(c) = 0$ eller där $f'(c)$ inte existerar.

Kursens språkbruk

I föreläsningarna delas kandidaterna upp i tre sorter: **kritiska punkter** ($f'(c) = 0$, även kallade stationära), **singulära punkter** ($f'(c)$ existerar inte) och **ändpunkter** till definitionsintervallet. Definitionen ovan slår ihop de två första.

Lokala extremvärden måste sökas bland **kritiska punkter** och eventuella ändpunkter.

Lokalt extremvärde i $x_0 \Rightarrow x_0$ är kritisk punkt, singulär punkt eller ändpunkt

Härledning

Antag att f har lokalt maximum i x_0 och att x_0 varken är ändpunkt eller singulär punkt. Då är f definierad på något $(x_0 - h, x_0 + h)$, $f'(x_0)$ existerar och $f(x) - f(x_0) \leq 0$ där.

- För $x < x_0$ är nämnaren negativ:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

- För $x > x_0$ är nämnaren positiv:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Båda olikheterna gäller samtidigt, så $f'(x_0) = 0$. Beviset för minimum är detsamma med vända olikheter.

Warning

Villkoret $f'(c) = 0$ räcker inte i sig för att ge ett extremvärde. Funktionen $f(x) = x^3$ har $f'(0) = 0$, men inget lokalt extremvärde i 0.

2. Derivatans tecken och monotoni

Important

Om $f'(x) > 0$ på ett intervall är f strängt växande där. Om $f'(x) < 0$ på ett intervall är f strängt avtagande där.

Detta gör teckentabeller mycket användbara. Satsen bevisas med **medelvärdessatsen**.

Första derivatatestet

Om f' byter tecken från positivt till negativt vid c , har f ett lokalt maximum.

Om f' byter tecken från negativt till positivt vid c , har f ett lokalt minimum.

Byter f' *inte* tecken i en punkt där $f'(c) = 0$ är punkten en **terrasspunkt**, som $x = 0$ för x^3 .

☰ Exempel – Teckentabell för $x^3(x-1)^2$

Vi hittar och klassificerar alla lokala extremvärden till $f(x) = x^3(x-1)^2$. Finns det globala extremvärden?

Lösning

Derivata.

$$f'(x) = 3x^2(x-1)^2 + 2x^3(x-1) = x^2(x-1)(3(x-1) + 2x) = x^2(x-1)(5x-3)$$

Singulära punkter saknas. Kritiska punkter: $x = 0$, $x = \frac{3}{5}$ och $x = 1$.

Teckentabell.

x		0		$\frac{3}{5}$	
x^2	+	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-
$5x-3$	-	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗	terrass	↗	lok. max	↘

Värden.

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3^3 \cdot 2^2}{5^5} = \frac{108}{3125} \text{ (lok. max)},$$

$$f(1) = 0 \text{ (lok. min)}$$

I $x = 0$ är det en terrasspunkt, eftersom f' inte byter tecken.

Globalt. Ändpunkter saknas och $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow -\infty$. Alltså finns **inga globala extremvärden**.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget (föreläsning 24).

3. Andraderivatatest

Om $f'(c) = 0$ och f'' finns nära c , gäller:

$$f''(c) > 0 \Rightarrow \text{lokalt minimum}$$

$$f''(c) < 0 \Rightarrow \text{lokalt maximum}$$

Om $f''(c) = 0$ ger testet inget säkert svar.

Härledning

Antag $f'(c) = 0$ och $f''(c) < 0$. Då är

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = f''(c) < 0.$$

För små h har kvoten alltså samma tecken som $f''(c)$, dvs negativ. Då är $f'(c+h) < 0$ för små $h > 0$ och $f'(c+h) > 0$ för små $h < 0$: derivatan byter tecken från + till -, och första derivatatestet ger lokalt maximum. Fallet $f''(c) > 0$ går på samma sätt.

Exempel

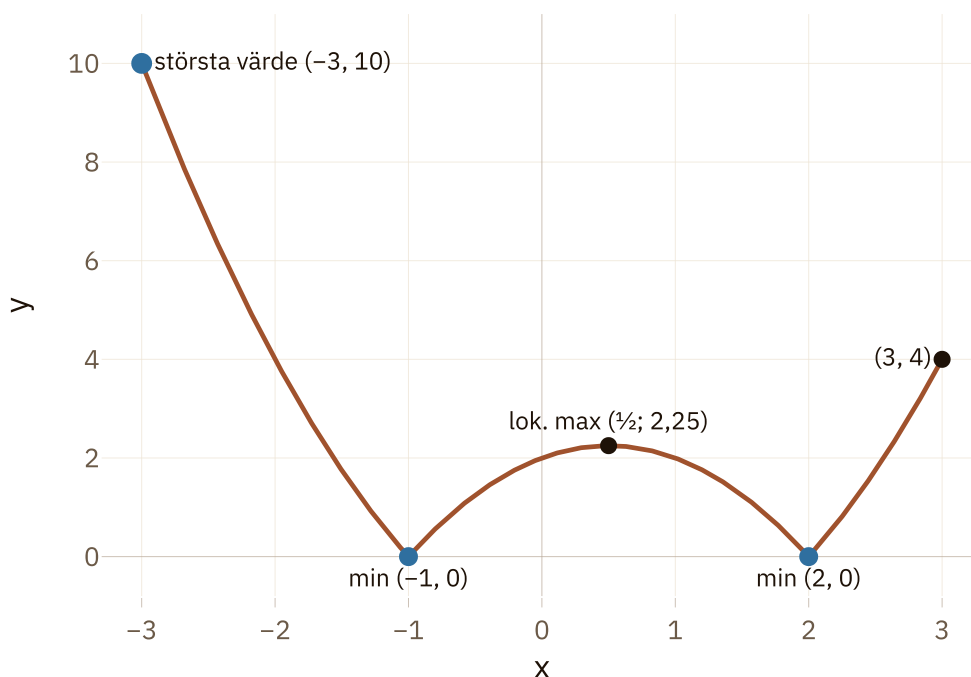
För $f(x) = x^2$ gäller $f'(0) = 0$ och $f''(0) = 2 > 0$, alltså har funktionen lokalt minimum i $x = 0$.

Både x^4 och x^3 har $f'(0) = f''(0) = 0$, men x^4 har minimum och x^3 en terrasspunkt i 0. Då får vi gå tillbaka till teckentabellen.

4. Globala extremvärden på slutna intervall

För en kontinuerlig funktion på $[a, b]$ garanterar **extremvärdessatsen** att största och minsta värdet existerar.

$|x^2 - x - 2|$ på $[-3, 3]$: största värdet i en ändpunkt, minsta i två punkter där derivatan inte finns, och ett lokalt max där $f' = 0$.



Metod

1. Hitta kritiska punkter i intervallets inre
2. Beräkna f i alla kritiska punkter
3. Beräkna $f(a)$ och $f(b)$
4. Jämför alla värden

Kritiska punkter omfattar här även de singulära, till exempel där ett absolutbelopp har en spets.

Exempel – Globala extremvärden för $|x^2 - x - 2|$ på $[-3, 3]$

Vi söker globalt maximum och minimum för $f(x) = |x^2 - x - 2|$ då $x \in [-3, 3]$.

Lösning

Existens. f är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall, så båda finns.

Derivata. $f(x) = |(x+1)(x-2)|$ och

$$f'(x) = \operatorname{sgn}((x+1)(x-2)) \cdot (2x-1), \quad x \neq -1, 2.$$

Kandidater.

- Singulära punkter: $x = -1$ och $x = 2$, med $f(-1) = f(2) = 0$.
- Kritisk punkt: $2x - 1 = 0$ ger $x = \frac{1}{2}$, med $f(\frac{1}{2}) = |-\frac{9}{4}| = \frac{9}{4}$.
- Ändpunkter: $f(-3) = |9 + 3 - 2| = 10$ och $f(3) = |9 - 3 - 2| = 4$.

Jämförelse.

$$\boxed{\max f = f(-3) = 10},$$

$$\boxed{\min f = f(-1) = f(2) = 0}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget (föreläsning 23).

Öppna intervall

På ett öppet intervall (a, b) är existensen inte garanterad. Låt $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ och $M = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. Finns något $u \in (a, b)$ med $f(u) > L$ och $f(u) > M$, har f ett globalt maximum i (a, b) . Motsvarande gäller för minimum. Samma resonemang fungerar för $(0, \infty)$ med $\lim_{x \rightarrow \infty}$.

5. Konvexitet och inflexionspunkter

Andraderivatan beskriver hur grafen böjer:

- $f''(x) > 0 \rightarrow$ grafen är konvex
- $f''(x) < 0 \rightarrow$ grafen är konkav

En inflexionspunkt uppstår när konvexiteten byter tecken. Mer om detta i [Andraderivata och konvexitet](#).

6. Extremvärdesproblem

I ett extremvärdesproblem (optimeringsproblem) ges situationen i ord, och vi måste själva ställa upp funktionen.

Arbetsgång

1. **Inför en variabel** och uttryck storheten som ska optimeras som en funktion av den.
2. **Bestäm tillåtet intervall** för variabeln ur villkoren (längder ≥ 0 och liknande).
3. **Hitta kandidaterna:** kritiska punkter, singulära punkter och ändpunkter (eller gränsvärden i ändarna om intervallet är öppet).

4. **Jämför** funktionsvärdena och svara på den fråga som faktiskt ställdes (en längd, en punkt eller själva maxvärdet).

7. Typiska användningar

Detta koncept används när man:

- kurvskissar funktioner
- löser optimeringsproblem
- avgör största och minsta värden
- förbereder approximationer med **Taylors formel**

Vanliga fel

- **Glömma ändpunkterna.** På ett slutet intervall ligger globala extremvärden ofta i en ändpunkt, som $f(-3) = 10$ i exemplet ovan.
- **Glömma singulära punkter.** Där f' inte existerar (spetsar i $| \dots |$, $\sqrt[3]{x}$) kan ett extremvärde ligga trots att $f'(c) = 0$ aldrig gäller.
- **Tro att $f'(c) = 0$ ger extremvärde.** x^3 har terrasspunkt i 0. Kontrollera med teckentabell eller andraderivata.
- **Blanda ihop lokalt och globalt.** Ett lokalt maximum behöver inte vara störst; jämför alltid med övriga kandidater och med beteendet i ändarna.

8. Lösta övningar

Föreläsning 23, exempel 2 – Största lådan

En låda ska tillverkas av en rektangulär pappskiva med måtten 7×15 dm genom att vi klipper bort lika stora kvadrater i de fyra hörnen och viker upp flikarna till sidor. Hur stor blir den största möjliga volymen?

Lösning

Modell. Låt kvadraternas sida vara x dm. Bottnen blir $(7 - 2x) \times (15 - 2x)$ och höjden x , så

$$V(x) = (7 - 2x)(15 - 2x)x = 4x^3 - 44x^2 + 105x, \quad 0 \leq x \leq \frac{7}{2}.$$

Ändpunkter. $V(0) = V(\frac{7}{2}) = 0$.

Kritiska punkter.

$$V'(x) = 12x^2 - 88x + 105 = 0 \iff x = \frac{11}{3} \pm \frac{13}{6} \iff x = \frac{35}{6} \text{ eller } x = \frac{3}{2}.$$

Bara $x = \frac{3}{2}$ ligger i intervallet, eftersom $\frac{35}{6} > \frac{7}{2}$.

Kontroll. $V''(x) = 24x - 88$ ger $V''(\frac{3}{2}) = -52 < 0$, alltså maximum.

$$V(\frac{3}{2}) = 4 \cdot 12 \cdot \frac{3}{2} = \boxed{72 \text{ dm}^3}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 23, exempel 3 – Snabbaste vägen till palatset

Aladdin sitter på en kamel i punkten P i öknen, 6 km väster om den närmaste punkten A på en väg som går rakt i nord-sydlig riktning. Vid vägens slut, 8 km söder om A , ligger palatset B . Kamelen går 18 km/h över sanden och 30 km/h längs vägen. Mot vilken punkt C på vägen ska Aladdin sikta för att komma fram så snabbt som möjligt?

Lösning

Modell. Låt $x = |AC|$. Det lönar sig inte att sikta norr om A eller söder om B , så $0 \leq x \leq 8$. Sträckan över sand är $\sqrt{36 + x^2}$ och längs vägen $8 - x$:

$$t(x) = \frac{\sqrt{36 + x^2}}{18} + \frac{8 - x}{30} \text{ h.}$$

Ändpunkter. $t(0) = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{27}{45}$ och $t(8) = \frac{10}{18} = \frac{25}{45}$.

Kritisk punkt.

$$t'(x) = \frac{x}{18\sqrt{36 + x^2}} - \frac{1}{30} = 0 \iff 5x = 3\sqrt{36 + x^2} \iff 16x^2 = 9 \cdot 36 \iff x = \frac{9}{2}.$$

(Kvadreringen är tillåten eftersom $x > 0$.) Singulära punkter saknas.

Jämförelse.

$$t(\frac{9}{2}) = \frac{15/2}{18} + \frac{7/2}{30} = \frac{15}{36} + \frac{7}{60} = \frac{24}{45} \text{ h,}$$

som är mindre än både $\frac{27}{45}$ och $\frac{25}{45}$. Aladdin ska sikta mot punkten C

$$\frac{9}{2} \text{ km söder om } A$$

och kommer då fram efter $\frac{24}{45} \text{ h} = 32 \text{ min.}$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 23, exempel 4 – Största triangeln under en tangent

Vi söker den största arean av en triangel i första kvadranten som begränsas av koordinataxlarna och en tangent till kurvan $y = e^{-x}$.

Lösning

Tangenten. Låt tangeringspunkten vara (a, e^{-a}) med $a \geq 0$. Eftersom $y' = -e^{-x}$ är tangenten

$$y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a).$$

Med $y = 0$ får vi x -skärningen $b = a + 1$, och med $x = 0$ får vi y -skärningen $h = (a + 1)e^{-a}$.

Area.

$$A(a) = \frac{bh}{2} = \frac{1}{2}(a + 1)^2 e^{-a}, \quad 0 \leq a < \infty.$$

Intervall är inte begränsat, så vi undersöker ändarna: $A(0) = \frac{1}{2}$ och $A(a) \rightarrow 0$ då $a \rightarrow \infty$.

Kritisk punkt.

$$A'(a) = (a + 1)e^{-a} - \frac{1}{2}(a + 1)^2 e^{-a} = \frac{1}{2}(a + 1)(1 - a)e^{-a} = 0 \iff a = 1$$

($a = -1$ ligger utanför intervallet.)

Jämförelse. $A(1) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e} \approx 0,74 > \frac{1}{2} = A(0)$, eftersom $e < 4$. Den största arean är

$$A = \frac{2}{e}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Läsning

- [4.4 Extreme Values](#)

Se även

- Derivata
- Kontinuitet
- Taylors formel
- Medelvärdessatsen
- Andraderivata och konvexitet
- Grafitning och asymptoter

Resurser

- [Khan Academy: Increasing and decreasing intervals](#) 
 - [Wikipedia: Maxima and minima](#) 
-

Medelvärdessatsen

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #derivata

Kurs: M0065M **Förkunskaper:** Derivata, Kontinuitet

Medelvärdessatsen kopplar ihop en funktions totala förändring över ett intervall med derivatan i en enda punkt. Den är verktyget bakom nästan alla satser om vad derivatans tecken säger om funktionen: växande, avtagande, konstant.

Idén

Kör vi 100 km på en timme har vi en medelhastighet på 100 km/h. Då måste hastighetsmätaren någon gång under resan ha visat exakt 100 km/h: vi kan inte ha legat under hela tiden, och inte över hela tiden. Medelvärdessatsen säger samma sak om en deriverbar funktion.

1. Rolles sats

Specialfallet där funktionen har samma värde i båda ändpunkterna kommer först.

Rolles sats

Om g är kontinuerlig på $[a, b]$, deriverbar på (a, b) och $g(a) = g(b)$, så finns (minst) ett $c \in (a, b)$ med $g'(c) = 0$.

Härledning

Om g är konstant på $[a, b]$ är $g'(c) = 0$ för alla c . Annars finns något $x \in (a, b)$ med till exempel $g(x) > g(a)$. Enligt [extremvärdessatsen](#) har g ett maximum i någon punkt $c \in [a, b]$, och eftersom $g(c) \geq g(x) > g(a) = g(b)$ kan c inte vara a eller b . Alltså ligger c i det öppna intervallet, där g är deriverbar, och ett inre lokalt extremvärde ger $g'(c) = 0$ (se [Extremvärden](#)). Fallet $g(x) < g(a)$ går likadant med ett minimum.

2. Medelvärdessatsen

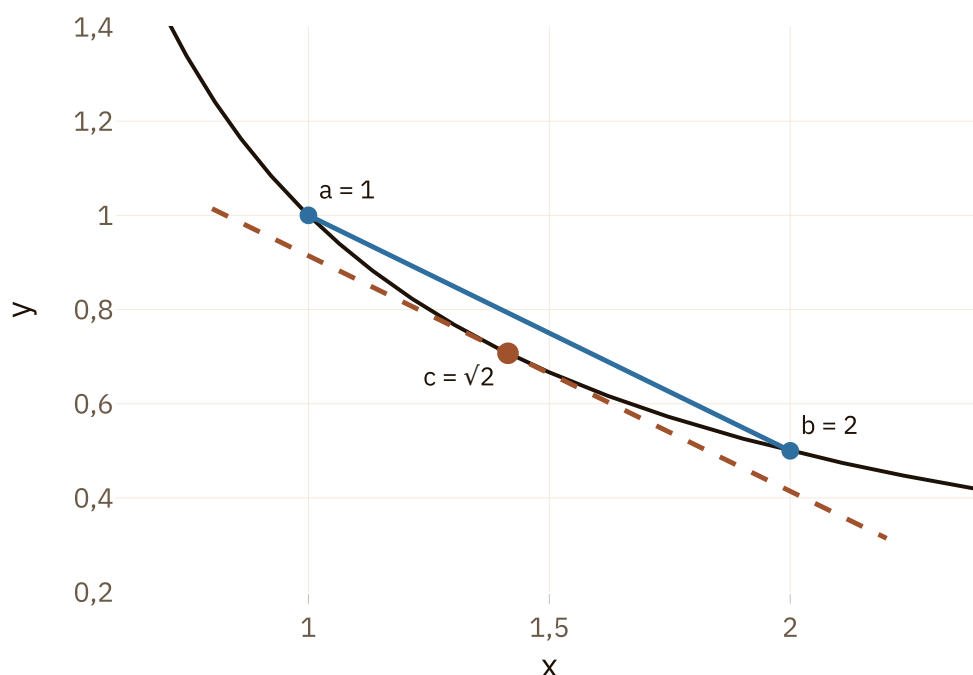
Sats

Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) , så finns ett $c \in (a, b)$ med

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometriskt: någonstans är tangenten parallell med kordan mellan $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$.

För $f(x) = 1/x$ på $[1, 2]$ har sekanten lutningen $-1/2$, och tangenten i $c = \sqrt{2}$ är parallell med den.



Härledning

Dra bort kordan från f så att ändpunkterna hamnar på samma höjd:

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

g är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) , och insättning ger $g(a) = 0$ och $g(b) = f(b) - f(b) = 0$. Rolles sats ger ett $c \in (a, b)$ med

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Villkoren behövs, och satsen är ren existens

Är f diskontinuerlig i en ändpunkt eller i en inre punkt, eller saknar f derivata i en inre punkt (en spets), kan slutsatsen falla. Satsen säger att c finns, men inte hur vi hittar det.

Exempel – Punkten där tangenten är parallell med kordan

Vi illustrerar medelvärdessatsen för $f(x) = \frac{1}{x}$ på $[1, 2]$ genom att bestämma c .

Lösning

Kordans lutning är

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1/2 - 1}{1} = -\frac{1}{2}.$$

Med $f'(c) = -\frac{1}{c^2}$ får vi $c^2 = 2$, och i intervallet $(1, 2)$ ligger

$$c = \sqrt{2}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget (föreläsning 24).

3. Följdsatser

- Om $f'(x) = 0$ på ett intervall är f konstant där.
- Om $f'(x) > 0$ på ett intervall är f strängt växande där.

På samma sätt ger $f'(x) < 0$ strängt avtagande, och $f'(x) \geq 0$ respektive $f'(x) \leq 0$ ger växande (icke-avtagande) respektive avtagande (icke-växande). Det räcker att derivatan har rätt tecken i intervallets inre, om f är kontinuerlig fram till ändpunkterna.

Härledning

Tag två godtyckliga punkter $x_1 < x_2$ i intervallet. Medelvärdessatsen ger ett $c \in (x_1, x_2)$ med

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c).$$

Eftersom $x_2 - x_1 > 0$ har $f(x_2) - f(x_1)$ samma tecken som $f'(c)$. Är $f' > 0$ överallt blir $f(x_2) > f(x_1)$, och är $f' = 0$ överallt blir $f(x_2) = f(x_1)$, dvs f är konstant.

Isolerade nollställen gör inget

$f(x) = x^3$ är strängt växande på hela $\mathbb{R}$ trots att $f'(0) = 0$. En derivata som är positiv utom i enstaka punkter ger fortfarande strängt växande.

4. Olikheter med derivata

Följsatserna ger en standardmetod för att visa en olikhet $F(x) > G(x)$:

Metod

1. Bilda $h(x) = F(x) - G(x)$.
2. Visa att $h(x_0) = 0$ i intervallets startpunkt.
3. Visa att $h'(x) > 0$ på intervallet, så att h är strängt växande.
4. Då är $h(x) > h(x_0) = 0$, dvs $F(x) > G(x)$.

Exempel – $\tan x > x$

Vi visar att $\tan x > x$ för $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Lösning

Låt $h(x) = \tan x - x$ för $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Då är $h(0) = 0$ och

$$h'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

h är alltså strängt växande, så $h(x) > h(0) = 0$, vilket ger

$$\tan x > x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget (föreläsning 24).

⚠ Vanliga fel

- **Glömma villkoren.** $f(x) = |x|$ på $[-1, 1]$ har $f(-1) = f(1)$ men ingen punkt med $f'(c) = 0$, eftersom f saknar derivata i 0.
- **Tro att c är mittpunkten.** Satsen ger bara att c finns i (a, b) . För $1/x$ på $[1, 2]$ är $c = \sqrt{2}$, inte 1,5.
- **Vända implikationen.** Strängt växande ger inte $f' > 0$ överallt; x^3 har $f'(0) = 0$.
- **Glömma startvärdet.** $h' > 0$ räcker inte för $h > 0$; vi måste också veta att $h(x_0) = 0$ (eller ≥ 0).

5. Lösta övningar

≡ Föreläsning 24, sidan 6 – $\cos t > 1 - \frac{t^2}{2}$

Vi använder medelvårdessatsen på $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$ på $[0, t]$ för att visa att $\cos t > 1 - \frac{t^2}{2}$ för $t > 0$.

✎ Lösning

Medelvårdessatsen. f är deriverbar överallt med $f'(x) = x - \sin x$. Det finns alltså ett $c \in (0, t)$ med

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{\cos t + t^2/2 - 1}{t} = c - \sin c.$$

Tecken. För $c > 0$ gäller $\sin c < c$, så $c - \sin c > 0$. Då är även vänsterledet positivt, och multiplikation med $t > 0$ ger

$$\cos t + \frac{t^2}{2} - 1 > 0 \iff \boxed{\cos t > 1 - \frac{t^2}{2}, \quad t > 0}$$

Anmärkning. Båda leden är jämna funktioner, så olikheten gäller även för $t < 0$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

☰ Föreläsning 24, sidan 11 – Var är funktionen växande?

I vilka intervall är $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 7$ växande respektive avtagande?

Lösning

Derivata.

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 16x = 4x(x^2 + 3x - 4) = 4x(x + 4)(x - 1)$$

Teckentabell.

x		-4		0	
$4x$	–	–	–	0	+
$x + 4$	–	0	+	+	+
$x - 1$	–	–	–	–	–
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	lok. min	↗	lok. max	↘

Svar. f är

strängt växande på $[-4, 0]$ och $[1, \infty)$,

strängt avtagande på $(-\infty, -4]$ och $[0, 1]$

Ändpunkterna får tas med eftersom f är kontinuerlig där.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

☰ Föreläsning 24, sidan 12 – Bernoullis olikhet

Låt $r > 1$. Vi visar att $(1 + x)^r > 1 + rx$ om $x > 0$ eller $-1 \leq x < 0$.

Lösning

Hjälpfunktion. $h(x) = (1 + x)^r - 1 - rx$ för $x \geq -1$. Då är $h(0) = 0$ och

$$h'(x) = r(1+x)^{r-1} - r = r((1+x)^{r-1} - 1).$$

Tecken. Sätt $t = 1 + x \geq 0$ och $a = r - 1 > 0$. Potensfunktionen t^a är strängt växande för $t \geq 0$, så $t^a > 1$ för $t > 1$ och $t^a < 1$ för $0 \leq t < 1$. Alltså är

$$h'(x) > 0 \text{ för } x > 0, \quad h'(x) < 0 \text{ för } -1 \leq x < 0.$$

Slutsats. h är strängt avtagande på $[-1, 0]$ och strängt växande på $[0, \infty)$, så h har sitt minsta värde $h(0) = 0$ och $h(x) > 0$ för $x \neq 0$:

$$(1+x)^r > 1+rx, \quad -1 \leq x < 0 \text{ eller } x > 0$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Läsning

- 2.8 The Mean-Value Theorem

Se även

- Derivata
- Ekvationslösning med derivata
- Extremvärden
- Kontinuitet
- Andraderivata och konvexitet

Grafitning och asymptoter

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys

Kurs: M0065M **Förkunskaper:** Derivata, Extremvärden, Oegentliga gränsvärden

Grafitning samlar allt vi vet om en funktion till en bild: var den är definierad, var den växer och avtar, hur den böjer och vad som händer långt ut och nära punkter där den inte är definierad.

Idén

Vi behöver inte räkna ut hundra punkter. Några få **karaktéristiska** punkter (nollställan, extremvärden, inflexionspunkter) och **asymptoterna**, de linjer grafen närmar sig, bestämmer formen. Resten är att dra en mjuk kurva som respekterar teckentabellerna.

1. Metod för kurvskissning

1. Bestäm D_f , noll- och skärningspunkter.
2. Undersök symmetri (jämn/udda) och periodicitet.
3. Beräkna f' , gör teckentabell, hitta extrema.
4. Beräkna f'' för konvexitet och inflexionspunkter.
5. Undersök **gränsvärden** mot $\pm\infty$ och singulariteter för asymptoter.
6. Skissa.

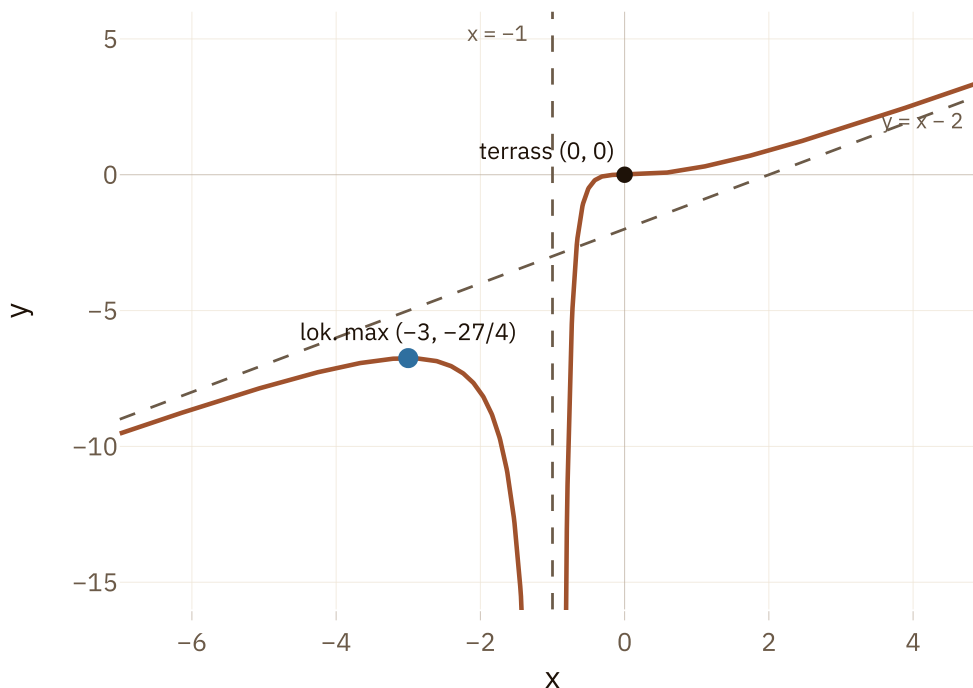
Symmetri sparar arbete: är f udda eller jämn räcker det att undersöka $x \geq 0$. Ibland är det $f(x) - L$ som är udda, till exempel $f(x) = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}$, där grafen är symmetrisk kring punkten $(0, 1)$.

2. Asymptoter

- **Vertikal** $x = a$: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.
- **Horisontell** $y = L$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$.
- **Sned** $y = kx + m$ om $k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x$ är ändlig och $m = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$ är ändlig.

Det räcker att gränsvärdet är oändligt från *ena* sidan för en vertikal asymptot. Horisontella och sneda asymptoter undersöks var för sig åt höger ($x \rightarrow \infty$) och åt vänster ($x \rightarrow -\infty$). Gäller samma linje åt båda hållen kallas asymptoten **dubbelsidig**, annars **enkelsidig**.

$x^3/(x+1)^2$ har den lodräta asymptoten $x = -1$ och den sneda $y = x - 2$.



Linjen $y = kx + m$ med $k \neq 0$ är en sned asymptot åt höger när $f(x) - (kx + m) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$. Konstanterna bestäms då av

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad m = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

och på samma sätt åt vänster med $x \rightarrow -\infty$. Ger formeln $k = 0$ är det en horisontell asymptot.

Härledning

Antag att $f(x) - (kx + m) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$. Dividerar vi med x får vi

$$\frac{f(x)}{x} - k - \frac{m}{x} \rightarrow 0,$$

och eftersom $m/x \rightarrow 0$ måste $f(x)/x \rightarrow k$. När k är känd säger antagandet direkt att $f(x) - kx \rightarrow m$. Omvänt: finns båda gränsvärdena ändligt är $f(x) - (kx + m) = (f(x) - kx) - m \rightarrow 0$.

≡ Exempel – $x + \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$ har sned asymptot $y = x$ samt vertikal $x = 0$.

Rationella funktioner. Låt $f(x) = P_m(x)/Q_n(x)$ med polynom av grad m och n utan gemensamma faktorer. Då gäller:

Villkor	Asymptot
$Q_n(a) = 0$	vertikal $x = a$
$m < n$	dubbelsidig horisontell $y = 0$
$m = n$	dubbelsidig horisontell $y = L$, L = kvoten mellan de högsta koefficienterna
$m = n + 1$	dubbelsidig sned $y = ax + b$, där $ax + b$ är kvoten i polynomdivisionen $\frac{P_m}{Q_n} = ax + b + \frac{R}{Q_n}$
$m > n + 1$	varken horisontell eller sned

≡ Exempel – Asymptoter till $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}$

Vi bestämmer alla asymptoter till $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$.

Lösning

Vertikala. Nämnaren är noll i $x = \pm 1$, men inte täljaren:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty.$$

Alltså är $x = 1$ och $x = -1$ vertikala asymptoter.

Horisontella. $f(x) = \frac{x - 4/x}{1 - 1/x^2} \rightarrow \pm\infty$ då $x \rightarrow \pm\infty$, så de saknas.

Sneda.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = 1, \quad m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x}{x^2 - 1} = 0.$$

Grafen har den dubbelsidiga sneda asymptoten

$$\boxed{y = x}, \quad \boxed{x = \pm 1}$$

Polynomdivisionen $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} = x - \frac{3x}{x^2 - 1}$ ger samma resultat direkt.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget (föreläsning 25).

3. Tillväxt hos $\ln$, potenser och $\exp$

Asymptoter kring e^x och $\ln x$ bygger på vem som växer snabbast. För $a, b > 0$ gäller

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b e^x = 0.$$

En potens dominerar alltid en logaritm, och en exponentialfunktion dominerar alltid en potens. Samma gränsvärden står i [Oegentliga gränsvärden](#).

4. Vanliga fel

Vanliga fel

- **Nämnaren noll räcker inte.** $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ för $x \neq 1$ har inget oändligt gränsvärde i $x = 1$, bara ett hål. En vertikal asymptot kräver $f(x) \rightarrow \pm\infty$.
- **Bara ena riktningen.** $x^2 e^x \rightarrow 0$ då $x \rightarrow -\infty$ men $\rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$. Undersök $+\infty$ och $-\infty$ var för sig.
- **Glömma m .** $k = \lim f(x)/x$ ger bara lutningen. För $x^3/(x+1)^2$ är $k = 1$ men asymptoten är $y = x - 2$, inte $y = x$.
- **Ett gränsvärde, inte ett värde.** En graf får skära sin horisontella eller sneda asymptot; det är beteendet långt ut som räknas.

5. Lösta övningar

☰ Föreläsning 25, sidan 8 – Asymptoter till $\frac{xe^x}{1+e^x}$

Vi bestämmer asymptoterna till $f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}$.

Lösning

Vertikala. Nämnaren är alltid positiv och f är kontinuerlig, så de saknas.

Åt vänster. $xe^x \rightarrow 0$ och $1+e^x \rightarrow 1$ då $x \rightarrow -\infty$, så $f(x) \rightarrow 0$: enkelsidig horisontell asymptot $y = 0$.

Åt höger. $f(x) = \frac{x}{e^{-x}+1} \rightarrow \infty$, så ingen horisontell. Sned asymptot:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x}+1} = 1, \quad m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{xe^x}{1+e^x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{1+e^x} = 0.$$

Svar.

$$y = 0 \text{ åt vänster,} \quad y = x \text{ åt höger}$$

Grafen ligger under $y = x$ för $x > 0$, eftersom $\frac{xe^x}{1+e^x} < \frac{x(1+e^x)}{1+e^x} = x$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

☰ Föreläsning 25, exempel 1 – Grafen till x^2e^x

Vi ritar grafen till $f(x) = x^2e^x$.

Lösning

Symmetri och skärning. $f(-x) = x^2e^{-x}$, varken jämn eller udda. $f(0) = 0$ och $f(x) \geq 0$ överallt.

Asymptoter. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ ger en enkelsidig horisontell asymptot $y = 0$ åt vänster. Åt höger går $f \rightarrow \infty$ och $f(x)/x = x e^x \rightarrow \infty$, så sned asymptot saknas. Vertikala saknas.

Derivata. $f'(x) = (2x + x^2)e^x = x(x + 2)e^x$.

x		-2		0	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	lok. max	↘	lok. min	↗

$$f(-2) = \frac{4}{e^2} \text{ (lok. max),}$$

$$f(0) = 0 \text{ (lok. min, även globalt)}$$

Andraderivata. $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x = 0$ ger $x = -2 \pm \sqrt{2}$.

x		$-2 - \sqrt{2}$		$-2 + \sqrt{2}$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	konvex	infl.	konkav	infl.	konvex

$$\text{Inflexionspunkter i } x = -2 \pm \sqrt{2}$$

Skiss. Från $y = 0$ långt till vänster stiger grafen konvext, blir konkav vid $x \approx -3,41$, når toppen $4/e^2 \approx 0,54$ i $x = -2$, byter till konvex vid $x \approx -0,59$, nuddar 0 i origo och växer sedan snabbt.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

☰ Föreläsning 25, exempel 3 – Grafen till $\frac{x^3}{(x+1)^2}$

Vi ritar grafen till $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$.

Lösning

Symmetri och skärning. $f(-x) = \frac{-x^3}{(1-x)^2}$, varken jämn eller udda. $f(0) = 0$.

Asymptoter. $f(x) = \frac{x}{(1 + 1/x)^2} \rightarrow \pm\infty$ då $x \rightarrow \pm\infty$, så horisontella saknas. I $x = -1$ är täljaren ≈ -1 och nämnaren > 0 från båda håll, så

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = -\infty.$$

Sned asymptot:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1, \quad m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x(x+1)^2}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{(x+1)^2} = -2.$$

$x = -1$ (vertikal), $y = x - 2$ (dubbelsidig sned)

Derivata.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+1) - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$$

x		-3		-1	
$f'(x)$	+	0	-	ej def.	+
$f(x)$	↗	lok. max	↘	asymptot	↗

$f(-3) = -\frac{27}{4}$ (lok. max),

 terrasspunkt i $(0, 0)$

Andraderivata. $f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$ är negativ för $x < 0$ ($x \neq -1$) och positiv för $x > 0$: konkav på $(-\infty, -1)$ och $(-1, 0)$, konvex på $(0, \infty)$. Origo är alltså både terrasspunkt och inflexionspunkt.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Läsning

- [4.6 Sketching the Graph of a Function](#)

Se även

- Extremvärden
- Andraderivata och konvexitet
- Oegentliga gränsvärden
- Gränsvärden

- Derivata
-

Ekvationslösning med derivata

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #derivata

Kurs: M0065M **Förkunskaper:** Derivata, Extremvärden

De flesta ekvationer, som $\cos x = x^2$, går inte att lösa exakt. Derivatan hjälper oss ändå på två sätt: den avgör **hur många** lösningar som finns och **var** de ligger, och den ger en metod för att **räkna fram** dem med godtycklig noggrannhet.

Idén

Kontinuitet ger existens: byter f tecken måste grafen korsa x -axeln. Monotoni ger entydighet: en strängt växande funktion kan bara korsa en gång. Tangenten ger approximation: nära roten liknar grafen sin tangent, och tangentens nollställe är lätt att räkna ut.

1. Antal rötter via monoton

Om $f'(x) > 0$ på ett intervall är f strängt växande där och ekvationen $f(x) = c$ har som mest en lösning där.

Kombinera med **satsen om mellanliggande värden** för att visa att exakt en rot finns.

Satsen om mellanliggande värden

Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och s ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$, så finns ett $c \in [a, b]$ med $f(c) = s$. Se **Kontinuitet**.

Halverar vi intervallet och undersöker tecknet i mittpunkten får vi ett hälften så långt intervall som fortfarande innehåller roten. Det är **intervallhalveringsmetoden**.

Exempel – Ett nollställe till $x^3 + x - 1$

Vi visar att $f(x) = x^3 + x - 1$ har ett nollställe mellan $x = 0$ och $x = 1$.

Lösning

Existens. $f(0) = -1 < 0$ och $f(1) = 1 > 0$. f är kontinuerlig, så satsen om mellanliggande värden ger ett $x_0 \in [0, 1]$ med $f(x_0) = 0$.

Intervallhalvering. $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{8} < 0$, så nollstället ligger i $[\frac{1}{2}, 1]$.

Entydighet. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ för alla x , så f är strängt växande och nollstället är det enda på hela $\mathbb{R}$. Numeriskt är $x_0 \approx 0,682$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget (föreläsning 26); entydigheten har vi lagt till.

2. Antal lösningar med teckentabell

När f inte är monoton delar vi upp tallinjen i intervall där den är det.

Metod

1. Gör en teckentabell för f' och dela upp D_f i intervall där f är strängt monoton.
2. Beräkna f i de lokala extrempunkterna och gränsvärdena i ändarna.
3. På varje monotont intervall finns **en** lösning till $f(x) = c$ om c ligger strikt mellan värdena i ändarna, annars **ingen**.

Metoden svarar även på frågan hur antalet lösningar till $f(x) = C$ beror på konstanten C : det ändras precis när C passerar ett lokalt extremvärde.

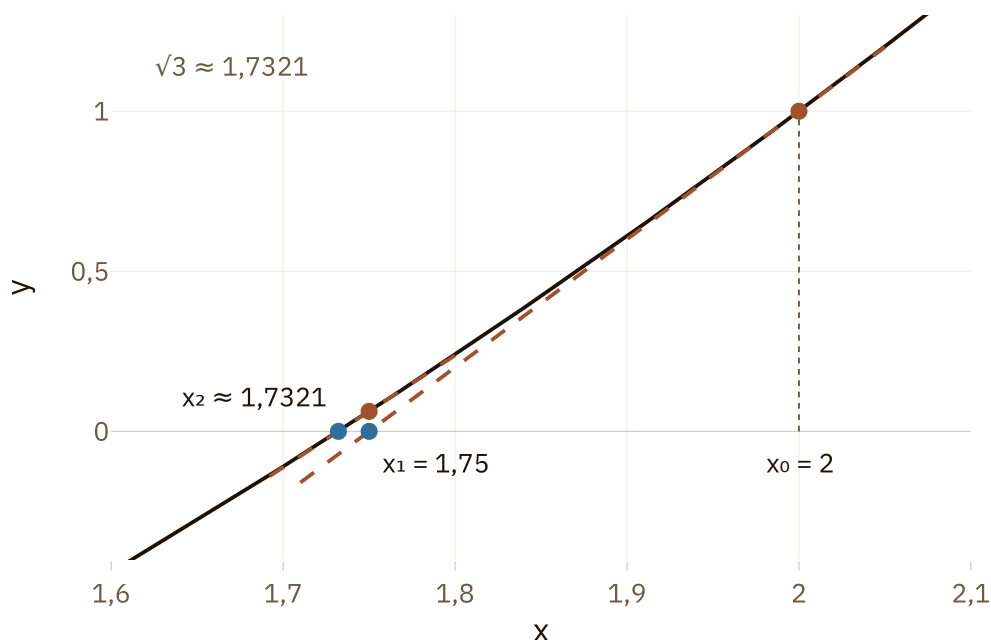
3. Newtons metod

För att approximera en rot till $f(x) = 0$ iterera:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Geometriskt: rita tangenten i x_n och ta dess skärning med x -axeln.

Två steg med Newtons metod för $x^2 - 3 = 0$ från $x_0 = 2$: varje tangent skär x -axeln närmare $\sqrt{3}$.



Härledning

Tangenten till $y = f(x)$ i $x = x_n$ är

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Nästa approximation x_{n+1} är där tangenten skär x -axeln, dvs punkten $(x_{n+1}, 0)$ ligger på tangenten:

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \iff x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Exempel – $\sqrt{2}$

För $f(x) = x^2 - 2$ med $x_0 = 1,5$: $x_1 = 1,5 - \frac{0,25}{3} \approx 1,4167$ (approximerar $\sqrt{2}$).

⚠ Metoden kan misslyckas

Newtons metod konvergerar oftast mycket snabbt om startvärdet ligger nära roten. Ligger det långt bort, eller är $f'(x_n)$ nära noll, kan tangenten skicka iterationen åt fel håll och följden divergera eller hoppa mellan värden. Välj därför startvärdet med hjälp av en teckentabell eller intervallhalvering.

4. Vanliga fel

⚠ Vanliga fel

- **Existens utan entydighet.** Teckenbyte visar att *minst* en rot finns. För “exakt en” behövs också monoton.
- **Glömma kontinuiteten.** $f(x) = 1/x$ byter tecken mellan -1 och 1 men har inget nollställe; satsen kräver kontinuitet på hela intervallet.
- **Fel tecken i Newtons formel.** Det är $x_n - f/f'$, inte $x_n + f/f'$. Kontrollera att x_1 hamnar närmare roten.
- **Radianer.** För trigonometriska ekvationer ska räknaren stå i radianer.

5. Lösta övningar

☰ Föreläsning 26, sidan 2 – Antal nollställen till ett tredjegradspolynom

Låt $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$.

- Bestäm värdemängden för p .
- Hur många nollställen har p ?
- Lokalisera nollställena till intervall $(n, n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Hur många lösningar har $p(x) = C$ för olika $C \in \mathbb{R}$?

 Lösning

a) p är kontinuerlig och $p(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) \rightarrow \pm\infty$ då $x \rightarrow \pm\infty$. Värdeområdet är

$$\boxed{V_p = \mathbb{R}}$$

b) $p'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$.

x		-1		3	
$p'(x)$	+	0	-	0	+
$p(x)$	↗	lok. max 8	↘	lok. min -24	↗

p växer från $-\infty$ till $8 > 0$, avtar till $-24 < 0$ och växer mot ∞ . Det ger ett teckenbyte på vart och ett av de tre monotona intervallen:

3 nollställen

c) Tabell: $p(-3) = -24$, $p(-2) = 1$, $p(0) = 3$, $p(1) = -8$, $p(4) = -17$, $p(5) = 8$. Nollställena ligger i

$$\boxed{(-3, -2), \quad (0, 1), \quad (4, 5)}$$

d) Antalet ändras när C passerar extremvärdena 8 och -24:

1 lösning	$C > 8$ eller $C < -24$
2 lösningar	$C = 8$ eller $C = -24$
3 lösningar	$-24 < C < 8$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 26, sidan 6 – Rationell approximation av $\sqrt{3}$

Vi använder Newtons metod på $x^2 - 3 = 0$ med startvärdet $x_0 = 2$ för att hitta en rationell approximation av $\sqrt{3}$.

 Lösning

Iterationsformel. $f(x) = x^2 - 3$ och $f'(x) = 2x$ ger

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right).$$

Iterationer.

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{7}{4} = 1,75, \quad x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{4} + \frac{12}{7} \right) = \frac{97}{56} \approx 1,7321$$

$$\sqrt{3} \approx \frac{97}{56}$$

Jämfört med $\sqrt{3} = 1,73205 \dots$ är felet redan efter två steg ungefär $9 \cdot 10^{-5}$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Övning – Newtons metod för $\cos x = x^2$

Ekvationen $\cos x = x^2$ har en positiv rot. Vi bestämmer den med tre decimaler med Newtons metod och startvärdet $x_0 = 1$.

 Lösning

Omskrivning. $f(x) = x^2 - \cos x$ och $f'(x) = 2x + \sin x$. Eftersom $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$ och $f'(x) > 0$ för $x > 0$ finns exakt en positiv rot, och den ligger i $(0, 1)$.

Iterationer (radianer).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - \cos x_n}{2x_n + \sin x_n}$$

n	x_n
0	1
1	0,83822
2	0,82424
3	0,82413

De två sista värdena stämmer på tre decimaler:

$$x \approx 0,824$$

Kontroll: $\cos(0,824) \approx 0,6792$ och $0,824^2 \approx 0,6790$.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- [4.2 Finding Roots of Equations](#)

Se även

- Derivata
- Medelvårdessatsen
- Kontinuitet
- Extremvärden
- Grafitning och asymptoter

Resurser

- [3Blue1Brown: Newton's fractal](#) 

Andraderivata och konvexitet

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #derivata

Kurs: M0065M Förkunskaper: Derivata

Förstaderivatan säger åt vilket håll grafen går. Andraderivatan säger hur den **böjer**: uppåt som en skål eller nedåt som ett tak. Det behöver vi för att rita grafer, klassificera extremvärden och avgöra om en approximation med tangenten ger för stort eller för litet värde.

Idén

f'' är hur snabbt lutningen ändras. Är $f'' > 0$ blir tangenten brantare och brantare när vi går åt höger, och grafen kröker sig uppåt. För en rörelse $x(t)$ är x' hastigheten och x'' accelerationen.

1. Andraderivatan

Andraderivatan $f''(x)$ är derivatan av $f'(x)$ och mäter hur derivatan själv förändras.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x)$$

På samma sätt får vi tredje, fjärde, ..., n :te derivatan genom att derivera om och om igen:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = D^2f(x), \quad y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = D^nf(x).$$

≡ Exempel – Fjärdederivatan av $\tan x$

Vi bestämmer $y^{(4)}$ för $y = \tan x$.

 Lösning

Varje derivering ger en faktor $(1 + \tan^2 x)$ från kedjeregeln:

$$y' = 1 + \tan^2 x$$

$$y'' = 2 \tan x (1 + \tan^2 x) = 2 \tan x + 2 \tan^3 x$$

$$y''' = (2 + 6 \tan^2 x)(1 + \tan^2 x) = 2 + 8 \tan^2 x + 6 \tan^4 x$$

$$y^{(4)} = (16 \tan x + 24 \tan^3 x)(1 + \tan^2 x)$$

$$y^{(4)} = 16 \tan x + 40 \tan^3 x + 24 \tan^5 x$$

På vägen ser vi att $y'' = 2y(1 + y^2)$, dvs $\tan x$ löser differentialekvationen $y'' = 2y(1 + y^2)$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget (föreläsning 27).

Små förändringar. Ändras x från a till $a + \Delta x$ är $\Delta f \approx f'(a) \Delta x$. Andraderivatan styr felet i den approximationen, vilket är utgångspunkten för **Taylors formel**.

2. Konvex och konkav

f är **konvex** på ett öppet intervall I om f är deriverbar där och f' är växande på I , och **konkav** om f' är avtagande.

- $f''(x) > 0$ på ett intervall $\Rightarrow f$ är **konvex** (böjer uppåt) där.
- $f''(x) < 0$ på ett intervall $\Rightarrow f$ är **konkav** (böjer nedåt) där.

 Tip

Konvex = "håller vatten", konkav = "spiller vatten".

En konvex graf ligger **över** alla sina tangenter, en konkav **under**:

$$f'' > 0 \text{ på } I \Rightarrow f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{för alla } a, x \in I$$

 Härledning

$f'' > 0$ betyder att f' har positiv derivata, så f' är strängt växande (se **Medelvärdessatsen**). Tag $a, x \in I$ med $x \neq a$. Medelvärdessatsen ger ett c mellan a och x med

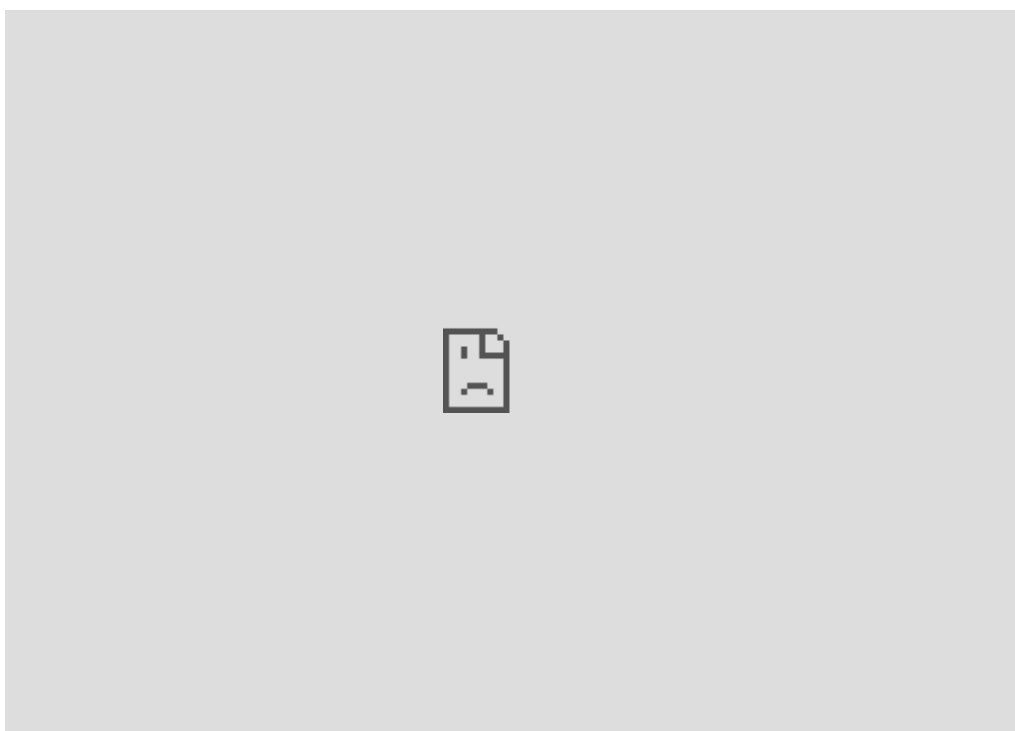
$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a).$$

- Om $x > a$ är $c > a$, så $f'(c) > f'(a)$, och multiplikation med $x - a > 0$ ger $f(x) - f(a) > f'(a)(x - a)$.
- Om $x < a$ är $c < a$, så $f'(c) < f'(a)$, och multiplikation med $x - a < 0$ vänder olikheten: $f(x) - f(a) > f'(a)(x - a)$.

I båda fallen ligger grafen över tangenten i a . Det konkava fallet går likadant.

Därför ger tangentapproximationen ett för litet värde där f är konvex och ett för stort där f är konkav.

$f(x) = 10x^3 - 3x^5$ har $f''(x) = 60x(1 - x^2)$: konvex i de skuggade intervallen, konkav i övrigt, med inflexionspunkter i $x = -1, 0, 1$.



3. Inflexionspunkt

En inflexionspunkt är en punkt där konvexiteten byter tecken. Där gäller typiskt $f''(x) = 0$, men $f'' = 0$ räcker inte i sig.

I en inflexionspunkt går tangenten genom grafen. Om $f''(x_0)$ existerar i en inflexionspunkt x_0 är $f''(x_0) = 0$, men implikationen går bara åt det hållet: $f(x) = x^4$ har $f''(0) = 0$ men är konvex på hela $\mathbb{R}$. Kandidaterna är alltså punkter där $f'' = 0$ eller där f'' saknas, och vi måste kontrollera teckenbytet i en teckentabell.

Exempel

För $f(x) = x^3$ är $f''(x) = 6x$ som byter tecken vid $x = 0$, så grafen har en inflexionspunkt där.

Andraderivatetestet. Andraderivatans tecken i en stationär punkt avgör också om det är maximum eller minimum. Testet och dess härledning står i [Extremvärden](#).

4. Krökning och inversens andraderivata

Krökning. Hur skarpt kurvan $y = f(x)$ böjer mäts av krökningen κ och krökningsradien R :

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}, \quad R = \frac{1}{|\kappa|}.$$

R är radien i den cirkel som bäst ansluter till kurvan i punkten.

Inversens andraderivata. Om $\phi = f^{-1}$, $y = \phi(x)$ och $f'(y) \neq 0$ gäller

$$\phi''(x) = -\frac{f''(y)}{(f'(y))^3}.$$

Härledning

$y = \phi(x)$ betyder $x = f(y)$. Vi deriverar två gånger implicit med avseende på x :

$$\begin{aligned} 1 = f'(y)y' &\Rightarrow y' = \frac{1}{f'(y)}, \\ 0 = f''(y)(y')^2 + f'(y)y'' &\Rightarrow y'' = -\frac{f''(y)(y')^2}{f'(y)} = -\frac{f''(y)}{(f'(y))^3}. \end{aligned}$$

Förstaderivatan är samma formel som i [Inversa funktioners derivata](#).

5. Vanliga fel

Vanliga fel

- $f'' = 0$ ger inte inflexionspunkt. x^4 har $f''(0) = 0$ men ingen inflexionspunkt. Kontrollera att f'' byter tecken.

- **Glömma punkter där f'' saknas.** Konvexiteten kan byta tecken där f'' inte existerar. Å andra sidan är en vertikal asymptot ingen inflexionspunkt, eftersom punkten inte ligger i D_f .
- **Konvex och konkav omkastade.** Konvex betyder $f'' > 0$ och att grafen böjer uppåt, som x^2 . Engelskans *concave up* betyder alltså konvex, vilket är lätt att blanda ihop.
- **Blanda ihop tecknet på f' och f'' .** En funktion kan vara avtagande och konvex samtidigt, som e^{-x} .

6. Lösta övningar

≡ Föreläsning 27, sidan 6 – Konvexitet för $10x^3 - 3x^5$

Vi bestämmer intervallen där $f(x) = 10x^3 - 3x^5$ är konvex respektive konkav, lokaliserar inflexionspunkterna och bestämmer de lokala extremvärdena.

Lösning

Derivator.

$$f'(x) = 30x^2 - 15x^4 = 15x^2(2 - x^2), \quad f''(x) = 60x - 60x^3 = 60x(1 - x)(1 + x)$$

Extremvärden. Kritiska punkter $x = 0$ och $x = \pm\sqrt{2}$.

x	$-\sqrt{2}$		0	
$f'(x)$	–	0	+	+
$f(x)$	↘	lok. min	↗	terrass

f är udda, och $f(\sqrt{2}) = 10 \cdot 2\sqrt{2} - 3 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$, så $f(-\sqrt{2}) = -8\sqrt{2}$.

Konvexitet.

x	–1		0	
$f''(x)$	+	0	–	+
$f(x)$	konvex	infl.	konkav	infl.

konvex på $(-\infty, -1)$ och $(0, 1)$,

konkav på $(-1, 0)$ och $(1, \infty)$

Inflexionspunkter i $x = -1, 0, 1$

Skiss. Nollställena i 0 och $\pm\sqrt{10/3}$, $f \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow \infty$ och $f \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow -\infty$.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 27, sidan 8 – Krökningsradie för e^x

Vi bestämmer krökningsradien för $y = e^x$ i punkten $x = 0$.

Lösning

$f'(x) = f''(x) = e^x$, så

$$\kappa(x) = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{3/2}}, \quad \kappa(0) = \frac{1}{2^{3/2}}.$$

$$R = \frac{1}{\kappa(0)} = 2^{3/2} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Föreläsning 27, sidan 9 – Inversens andraderivata (tentamen 2021-08-18)

Låt $f(x) = x^3 + 3x - 1$. Vi bestämmer $(f^{-1})''(3)$.

Lösning

Inversens värde. $y = f^{-1}(3)$ betyder $f(y) = 3$, dvs $y^3 + 3y - 1 = 3$. $y = 1$ passar, och eftersom $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ är f injektiv, så $f^{-1}(3) = 1$.

Formeln. $f'(x) = 3(x^2 + 1)$ och $f''(x) = 6x$ ger

$$(f^{-1})''(3) = -\frac{f''(1)}{(f'(1))^3} = -\frac{6}{6^3} = \boxed{-\frac{1}{36}}$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

Läsning

- [4.5 Concavity and Inflections](#)
.....

Se även

- Extremvärden
- Grafitning och asymptoter
- Medelvårdessatsen
- Taylors formel
- Inversa funktioners derivata

Resurser

- [3Blue1Brown: Derivatives through geometry](#) 
-

Talföljder och summor

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #talföljd

Kurs: M0065M

En talföljd är en lista av tal där varje tal har ett nummer, och en summa lägger ihop ett avsnitt av listan. Summatecknet Σ gör långa summor hanterbara, och för två typer av talföljder, de aritmetiska och de geometriska, finns slutna formler. De formellerna används senare för serier och för Riemannsummor.

Idén

Tänk på talföljden som en funktion som bara är definierad i heltalen: $a_n = f(n)$. Då kan vi fråga samma saker som för funktioner, till exempel vad som händer när $n \rightarrow \infty$.

1. Talföljd

En talföljd är en funktion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, skriven $a_1, a_2, a_3, \dots$ eller kort $(a_n)_1^\infty$.

Talföljden kan ges på två sätt:

- **Explicit**, med en formel för a_n : $a_n = (-1)^n 2^n$ ger $-2, 4, -8, 16, \dots$
- **Rekursivt**, där varje tal räknas ut från de föregående: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ med $a_1 = a_2 = 1$ ger Fibonaccis talföljd $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

Gränsvärde. Talföljden har gränsvärdet a om det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal N_ε sådant att

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Vi skriver $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Finns gränsvärdet är talföljden **konvergent**, annars **divergent**. Till exempel är $((-1)^n/n)$ konvergent med gränsvärdet 0 , medan $(2n + 1)$ är divergent.

2. Summanotation

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Allmänt är $\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$ för $m \leq n$. Summan har $n - m + 1$ termer, och summationsindex k är en "dummy": vilken bokstav vi använder spelar ingen roll.

Räkneregler. Summor kan delas upp och konstanter brytas ut:

$$\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k, \quad \sum_{k=m}^n c a_k = c \sum_{k=m}^n a_k.$$

Indexbyte. Sätter vi $j = k + 1$ flyttas både termen och gränserna:

$$\sum_{k=0}^5 3 \cdot 2^k = \sum_{j=1}^6 3 \cdot 2^{j-1}.$$

Båda gränserna ska räknas om, och termen ska uttryckas i det nya indexet.

3. Standardsummor

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Den första är ett specialfall av den **aritmetiska summan**. I en aritmetisk talföljd är differensen mellan två på varandra följande tal konstant, och summan av n termer är antalet termer gånger medelvärde av första och sista termen:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Härledning – Gauss trick för $\sum k$

Skriv summan framlänges och baklänges och addera:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 2 + \cdots + n \\ s_n &= n + (n-1) + \cdots + 1 \\ 2s_n &= (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1) \end{aligned}$$

Alltså är $s_n = n(n+1)/2$. Samma resonemang fungerar för varje aritmetisk summa, eftersom första plus sista, andra plus näst sista och så vidare alltid ger samma tal $a_1 + a_n$.

Formeln för $\sum k^2$ visas lättast med **Matematisk induktion**.

4. Geometrisk talföljd och summa

En talföljd är **geometrisk** om kvoten mellan ett tal och det närmast föregående är konstant, $a_{k+1}/a_k = r$. Då är $a_k = a_1 r^{k-1}$.

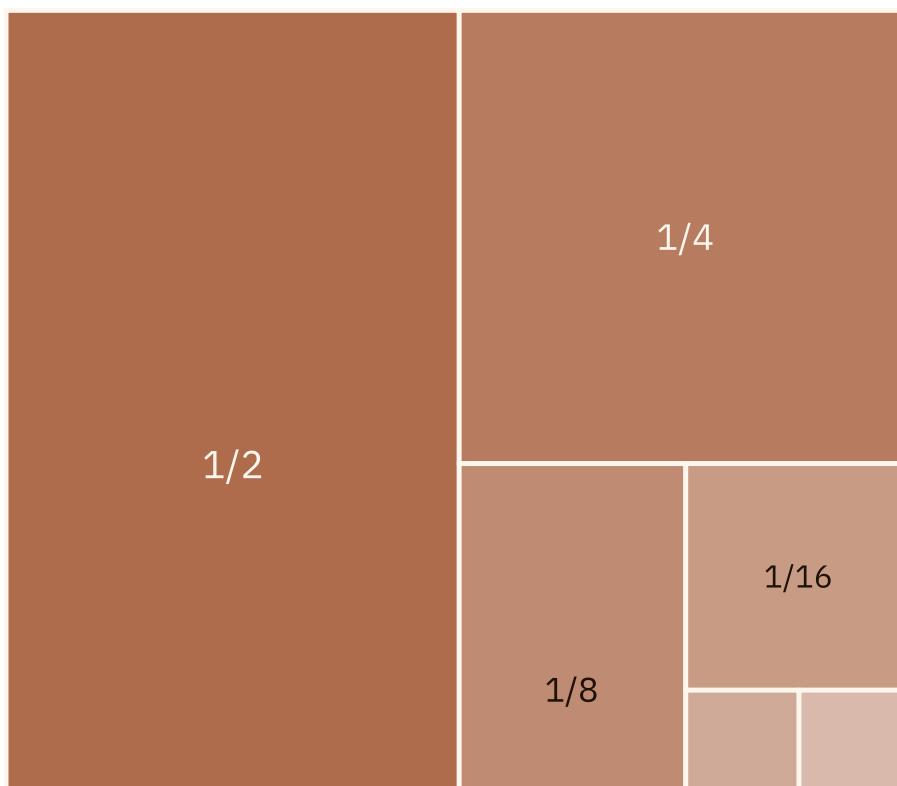
$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad r \neq 1$$

Multiplicerar vi med a_1 och byter index får vi summan av de n första termerna i en geometrisk talföljd:

$$\sum_{k=1}^n a_1 r^{k-1} = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Lättast att komma ihåg i ord: *första termen gånger $(1 - r^{\text{antal termer}})/(1 - r)$* .

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$: varje term fyller hälften av det som återstår av enhetskvadraten.



 Härledning – multiplicera med r och subtrahera

Sätt $s = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$. Då är

$$rs = r + r^2 + \dots + r^n + r^{n+1}.$$

Alla termer utom två tar ut varandra i differensen:

$$s - rs = 1 - r^{n+1} \implies s = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad r \neq 1.$$

För $r = 1$ är alla termer 1 och summan blir helt enkelt $n + 1$.

För $|r| < 1$ går $r^{n+1} \rightarrow 0$ när $n \rightarrow \infty$, och vi får

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1 - r}.$$

Till exempel är $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = 1$.

 Exempel – Summa med negativ kvot (föreläsning 29)

Vi beräknar

$$\sum_{k=0}^{10} (-2)^{-k}.$$

 Lösning

Kvoten. $(-2)^{-k} = (-\frac{1}{2})^k$, så summan är geometrisk med $r = -\frac{1}{2}$ och 11 termer ($k = 0, \dots, 10$).

Formeln.

$$\sum_{k=0}^{10} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 + 2^{-11}}{3/2} = \frac{2 + 2^{-10}}{3} = \frac{2049}{3 \cdot 1024} = \boxed{\frac{683}{1024}} \approx 0,667$$

Rimlighetskontroll. Den oändliga summan är $1/(1 + \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$, och vi har tagit med många termer.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

 Vanliga fel

- **Fel antal termer.** $\sum_{k=0}^n$ har $n + 1$ termer, inte n . Det är exponenten i $r^{\text{antal termer}}$ som blir fel.
- **Indexbyte bara i gränserna.** Byter vi k mot $j - 1$ måste termen också skrivas om, annars förskjuts hela summan.
- **Formeln för $r = 1$.** Då blir nämnaren noll; summan är i stället antalet termer gånger a_1 .
- **Oändlig summa utan $|r| < 1$.** Formeln $1/(1 - r)$ gäller bara för $|r| < 1$. För $r = 2$ ger den -1 , men summan är divergent.

5. Lösta övningar

 Testuppgift 2.4 – Vilket nummer har talet?

Talföljden 2, 6, 18, ... är geometrisk. Vi vill veta vilken ordning talet 486 har i talföljden.

 Lösning

Kvot. $r = 6/2 = 3$, så $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

Ekvation. $2 \cdot 3^{n-1} = 486 \iff 3^{n-1} = 243 = 3^5 \iff n - 1 = 5$.

$$n = 6$$

Facit: Nummer 6 [$2 \cdot 3^{n-1} = 486$].

 Testuppgift 2.7 – Fyra geometriska summor

Vi beräknar

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{k=1}^4 3 \cdot 2^k & \text{b) } \sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^k & \text{c) } \sum_{k=0}^4 3 \cdot 2^k & \text{d) } \sum_{k=0}^n 3 \cdot 2^k \end{array}$$

 Lösning

Alla fyra har kvoten $r = 2$. Vi använder *första termen gånger* $(r^{\text{antal termer}} - 1)/(r - 1)$.

a) Första termen 6, fyra termer: $6 \cdot \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = \boxed{90}$.

b) Första termen 6, n termer: $6 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = \boxed{6(2^n - 1)}$.

c) Första termen 3, fem termer: $3 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = \boxed{93}$.

d) Första termen 3, $n + 1$ termer: $\boxed{3(2^{n+1} - 1)} = 6 \cdot 2^n - 3$.

Rimlighetskontroll. c) är a) plus termen för $k = 0$: $90 + 3 = 93$.

Facit: a) 90 b) $6(2^n - 1)$ c) 93 d) $3(2^{n+1} - 1) = 6 \cdot 2^n - 3$.

≡ Övningsuppgift 2.6 – Summa med negativ kvot

Talföljden $3, -2, \frac{4}{3}, \dots$ är geometrisk. Vi beräknar summan av a) de fem första termerna, b) de n första termerna.

Lösning

Kvot. $r = -2/3$ och $a_1 = 3$. Nämnaren blir $1 - r = 5/3$.

b) (först, eftersom a) är ett specialfall)

$$s_n = 3 \cdot \frac{1 - (-\frac{2}{3})^n}{5/3} = \boxed{\frac{9}{5} (1 - (-\frac{2}{3})^n)}$$

a) Med $n = 5$:

$$s_5 = \frac{9}{5} (1 + \frac{32}{243}) = \frac{9}{5} \cdot \frac{275}{243} = \boxed{\frac{55}{27}}$$

Facit: a) $\frac{55}{27}$ b) $\frac{9}{5} (1 - (-\frac{2}{3})^n)$.

Övningsuppgift 2.8 – Bestäm en term ur summan

En geometrisk talföljd har kvoten $-\frac{1}{2}$. Summan av de fem första termerna är $\frac{33}{8}$. Vi bestämmer det andra talet i talföljden.

Lösning

Summaformeln.

$$s_5 = a_1 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^5}{1 + \frac{1}{2}} = a_1 \cdot \frac{33/32}{3/2} = \frac{11}{16} a_1.$$

Första termen. $\frac{11}{16} a_1 = \frac{33}{8} \iff a_1 = 6.$

Andra termen. $a_2 = a_1 r = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{-3}.$

Facit: -3 [$a_1 = 6$].

Läsning

- 5.1 Sums and Sigma Notation
- 9.1 Sequences and Convergence

Se även

- Matematisk induktion
- Bestämd integral och Riemannsummor

Matematisk induktion

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #logik #bevis

Kurs: M0065M **Förkunskaper:** Logik och bevisföring

Matematisk induktion är ett sätt att bevisa att en utsaga gäller för *oändligt många* heltal genom att bara göra två ändliga kontroller. Den används framför allt för summaformler, olikheter och delbarhet, och för rekursivt definierade **talföljder**.

Idén – dominobrickor

Ställ upp dominobrickor i en oändlig rad. Om den första brickan faller, och varje bricka som faller faller nästa, så faller alla. Basfallet är den första brickan, induktionssteget är att varje bricka faller nästa.

1. Induktionsprincipen

För att bevisa att en utsaga $P(n)$ gäller för alla heltal $n \geq n_0$:

1. **Basfall:** visa $P(n_0)$.
2. **Induktionssteg:** antag $P(k)$ och visa $P(k + 1)$.

Då gäller $P(n)$ för alla $n \geq n_0$.

Antagandet att $P(k)$ är sann kallas **induktionsantagandet**. Vi antar det bara för ett godtyckligt $k \geq n_0$; det är implikationen $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ som bevisas, inte $P(k)$ självt.

 **Summan** $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$

Basfall ($n = 1$): $1 = 1 \cdot 2/2$. ✓ *Induktionssteg:* antag likheten för $n = k$. Då

$$1 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

2. Så skriver vi ett induktionsbevis för en summa

1. **Formulera** $P(p+1)$ genom att sätta $n = p+1$ i påståendet. Då vet vi exakt vilket uttryck vi ska nå fram till.
2. **Dela upp summan** i de p första termerna och den sista:

$$\sum_{k=1}^{p+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^p a_k \right) + a_{p+1}.$$

3. **Använd induktionsantagandet** på parentesen, och markera var det sker.
4. **Förenkla** tills vi får högerledet i $P(p+1)$. Ofta är det enklast att visa att $VL(p+1) - HL(p+1) = 0$.

För olikheter fungerar samma schema, men i steg 4 behöver vi i regel en extra olikhet som håller för $p \geq n_0$. Det är där basfallet n_0 kommer in.

≡ Föreläsning 30, exempel 5 – Olikheten $2^n > n^2$

Vi visar att $2^n > n^2$ för $n = 5, 6, 7, \dots$

Lösning

Basfall ($n = 5$): $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. ✓

Induktionsantagande. Antag att $2^p > p^2$ för något $p \geq 5$.

Induktionssteg. Vi vill visa $2^{p+1} > (p+1)^2$. Med induktionsantagandet är

$$2^{p+1} = 2 \cdot 2^p > 2p^2,$$

så det räcker att visa $2p^2 \geq (p+1)^2$. Det är ekvivalent med

$$2p^2 > p^2 + 2p + 1 \iff p^2 - 2p - 1 > 0 \iff (p-1)^2 > 2,$$

som är sant eftersom $p-1 \geq 4$.

Slutsats. Enligt induktionsaxiomet gäller $2^n > n^2$ för alla $n \geq 5$. Olikheten är falsk för $n = 3$ och $n = 4$ ($8 < 9$, $16 = 16$), så basfallet kan inte flyttas ner.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

⚠ Vanliga fel

- **Hoppa över basfallet.** Induktionssteget ensamt bevisar ingenting: utsagan $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2 + 5$ klarar induktionssteget men är falsk för varje n (se Övningsuppgift 2.10 nedan).
- **Anta det som ska visas.** Vi får anta $P(p)$, inte $P(p + 1)$. Att utgå från likheten för $p + 1$ och härleda något sant, till exempel $0 = 0$, bevisar ingenting om inte varje steg är en ekvivalens. Räkna i stället på $VL(p + 1)$ tills det blir $HL(p + 1)$.
- **Fel basfall för olikheter.** Basfallet ska vara det minsta n påståendet gäller för, och extraolikheten i steget måste hålla för alla p från just det n_0 .
- **Otydligt var antagandet används.** Markera steget där induktionsantagandet sätts in; utan det syns inte att beviset är ett induktionsbevis.

3. Lösta övningar

≡ Testuppgift 2.8 b – En teleskoperande summa

Vi visar med induktion att, för alla positiva heltal n ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

✎ Lösning

Basfall ($n = 1$): $VL = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ och $HL = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. ✓

Induktionsantagande. $\sum_{k=1}^p \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{p+1}$.

Induktionssteg. Vi ska nå $1 - \frac{1}{p+2}$.

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} \stackrel{\text{ind. ant.}}{=} 1 - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = 1 - \frac{(p+2) - 1}{(p+1)(p+2)} = 1 - \frac{1}{p+2}.$$

Slutsats. Formeln gäller för alla $n \geq 1$.

Resonemangsuppgift – det finns inget facit att jämföra med.

≡ Övningsuppgift 2.9 e – Summa med $k \cdot 2^{-k}$

Vi visar med induktion att, för alla heltal $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 2^{-k} = 2 - (n+2) \cdot 2^{-n}.$$

Lösning

Basfall ($n = 1$): VL = $\frac{1}{2}$ och HL = $2 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. ✓

Induktionsantagande. $\sum_{k=1}^p k \cdot 2^{-k} = 2 - (p+2) 2^{-p}$.

Induktionssteg. Vi ska nå $2 - (p+3) 2^{-(p+1)}$. Skriv $2^{-p} = 2 \cdot 2^{-(p+1)}$:

$$\sum_{k=1}^{p+1} k \cdot 2^{-k} \stackrel{\text{ind. ant.}}{=} 2 - (p+2) 2^{-p} + (p+1) 2^{-(p+1)} = 2 - 2^{-(p+1)}(2p+4 - p-1) = 2 - (p+3) 2^{-(p+1)}.$$

Slutsats. Formeln gäller för alla $n \geq 1$.

Resonemangsuppgift – det finns inget facit att jämföra med.

≡ Övningsuppgift 2.10 – Varför basfallet behövs

a) Vi visar att om utsagan $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 + c$ gäller för $n = p$, så gäller den också för $n = p+1$.

Är utsagan därmed sann för alla $n \geq 1$?

b) Vi bestämmer talet c så att utsagan gäller för alla $n \geq 1$.

Lösning

a) Antag $\sum_{k=1}^p (2k-1) = p^2 + c$. Då är

$$\sum_{k=1}^{p+1} (2k-1) = p^2 + c + (2(p+1)-1) = p^2 + 2p + 1 + c = (p+1)^2 + c.$$

Induktionssteget håller alltså för varje c . Men utsagan är **inte** bevisad: basfallet saknas, och **Nej** – utan det kan steget “fälla” brickor som aldrig började falla.

b) Basfallet $n = 1$ kräver $1 = 1 + c$, alltså $c = 0$. Med basfallet och steget i a) gäller då $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ för alla $n \geq 1$.

Facit: a) Nej! Utsagan måste också visas vara sann för $n = 1$. b) $c = 0$.

≡ Övningsuppgift 2.12 – En olikhet för $\sum 1/k^2$

Vi visar med induktion att

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad \text{för alla heltal } n \geq 2.$$

Lösning

Basfall ($n = 2$): VL = $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ och HL = $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Eftersom $\frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ stämmer det. ✓

Induktionsantagande. $\sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{p}$ för något $p \geq 2$.

Induktionssteg. Vi ska visa $\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{p+1}$. Med antagandet är

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{p} + \frac{1}{(p+1)^2},$$

så det räcker att högerledet är högst $2 - \frac{1}{p+1}$. Differensen är

$$\left(2 - \frac{1}{p} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) - \left(2 - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{-(p+1)^2 + p + p(p+1)}{p(p+1)^2} = -\frac{1}{p(p+1)^2} < 0.$$

Slutsats. Olikheten gäller för alla $n \geq 2$. Som bonus följer att $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 \leq 2$.

Resonemangsuppgift – det finns inget facit att jämföra med.

Se även

- Talföljder och summor
- Logik och bevisföring

Resurser

- [3Blue1Brown: Induction \(proof by induction\)](#) 
-

Taylors formel

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #taylor

Kurs: M0065M **Förkunskaper:** Derivata, Högre ordningens derivator

Taylors formel ersätter en krånglig funktion med ett polynom som är nästan lika nära $x = a$, och säger dessutom hur stort felet är. Polynom är lätta att räkna med, så formeln används för närmevärden, för gränsvärden och för att undersöka hur en funktion beter sig nära en punkt.

Idén – från tangent till polynom

Tangenten $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ har samma värde och samma derivata som f i a . Vill vi ha en bättre approximation tar vi ett polynom av grad n som har samma värde och samma n första derivator som f i a . Ju fler derivator som stämmer, desto längre håller polynomet sig nära grafen.

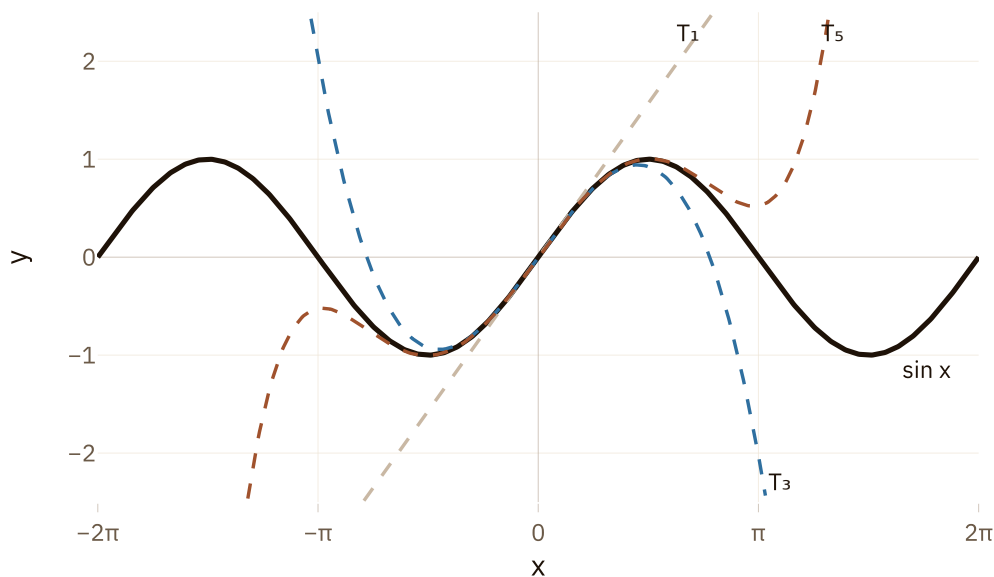
1. Taylorpolynomet

Taylorpolynomet av grad n kring a :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Utskrivet är $T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$. För $n = 1$ är det tangenten, alltså linjäriseringen.

Maclaurinpolynomen till $\sin x$ följer kurvan längre ut ju högre gradtalet är.



Härledning – varför $k!$ i nämnaren?

Gör ansatsen $P_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n$ och derivera:

$$P'_n(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \dots$$

$$P''_n(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x - a) + \dots$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(k)}(x) = k! c_k + (\text{termer med } x - a)$$

I $x = a$ försvinner alla termer med $x - a$, så $P_n^{(k)}(a) = k! c_k$. Kravet $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ ger $c_k = f^{(k)}(a)/k!$.

Ordning och grad

Blomqvist och föreläsningarna säger ofta "Taylorutveckling av **ordning** n ": termer till och med $(x - a)^n$ plus en restterm. Polynomets **grad** kan vara lägre, eftersom koefficienter kan vara noll. För $\sin x$ kring 0 är $T_4 = T_3 = x - x^3/6$.

2. Resttermen

Med restterm (Lagrange):

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

där ξ ligger mellan a och x . Resttermen ser ut som "nästa term" i polynomet, men med derivatan tagen i en okänd punkt ξ i stället för i a . Blomqvist skriver ofta $\xi = a + \theta(x-a)$ med $0 < \theta < 1$, och kallar resttermen $R_{n+1}(x)$.

För $n = 0$ säger formeln $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)$, vilket är **Medelvärdessatsen**. Taylors formel är alltså en generalisering av den.

Härledning i korthet – via integralformen

Steg 1. Integralkalkylens fundamentalsats ger $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$.

Steg 2. Partialintegrera med primitiven $-(x-t)$ till 1:

$$\int_a^x f'(t) dt = \left[-(x-t)f'(t) \right]_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t) dt = f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t) dt.$$

Upprepar vi n gånger får vi

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt.$$

Steg 3. Vikten $(x-t)^n$ byter inte tecken mellan a och x , så integralkalkylens medelvärdessats ger ett ξ mellan a och x med

$$\frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Ett alternativt bevis använder hjälpfunktionen $g(t) = f(t) - T_n(t) - K(t-a)^{n+1}$, väljer K så att $g(x) = 0$, och tillämpar Rolles sats $n+1$ gånger.

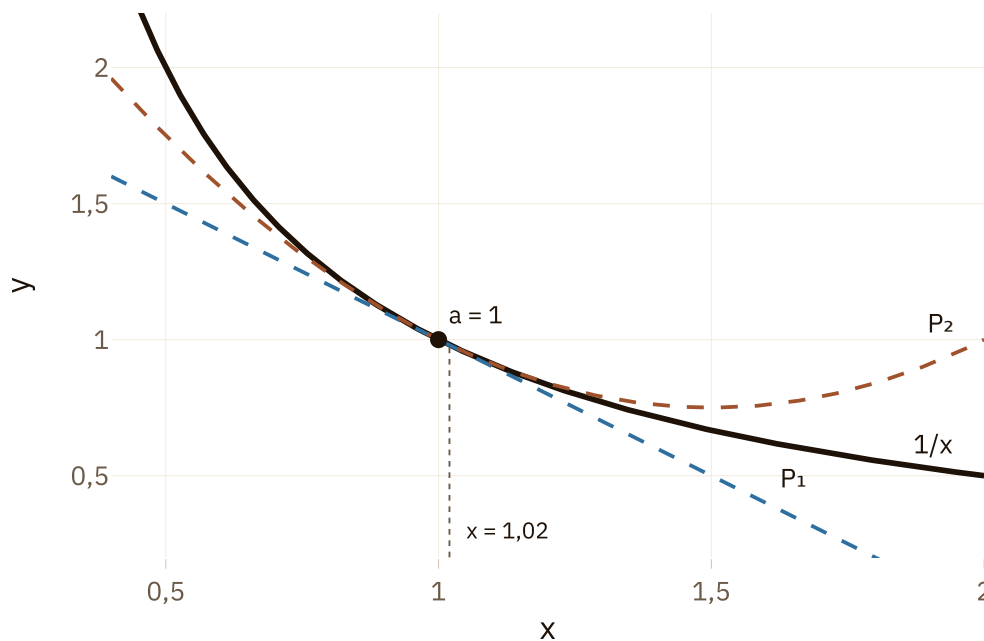
3. Feluppskattning

Vi känner inte ξ , men vi kan uppskatta resttermen. Om $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ för alla t mellan a och x är

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}.$$

Tecknet på $f^{(n+1)}$ mellan a och x avslöjar dessutom om $T_n(x)$ är ett över- eller underskattat närmevärde.

Nära $a = 1$ ligger P_2 närmare $1/x$ än tangenten P_1 ; vid $x = 1,02$ syns ingen skillnad alls i den här skalan.



≡ Föreläsning 31 – Närmevärde till $1/1,02$ med felgräns

Vi bestämmer Taylorpolynomet av ordning 2 för $f(x) = 1/x$ kring $a = 1$, och använder det för ett närmevärde till $1/1,02$ med feluppskattning.

Lösning

Derivator. $f(x) = x^{-1}$, $f'(x) = -x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$, $f'''(x) = -6x^{-4}$. I $a = 1$: $f(1) = 1$, $f'(1) = -1$, $f''(1) = 2$.

Polynomet.

$$T_2(x) = 1 - (x - 1) + \frac{2}{2!}(x - 1)^2 = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2.$$

Närmevärde. $T_2(1,02) = 1 - 0,02 + 0,0004 = 0,9804$.

Restterm. För något ξ med $1 < \xi < 1,02$ är

$$R_2(1,02) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(0,02)^3 = -\frac{(0,02)^3}{\xi^4}.$$

$|f'''(\xi)| = 6/\xi^4$ är avtagande och störst i vänstra ändpunkten $\xi = 1$, så $|R_2| < (0,02)^3 = 8 \cdot 10^{-6}$. Resttermen är negativ, alltså är närmevärdet för stort:

$$0,9804 - 8 \cdot 10^{-6} < \frac{1}{1,02} < 0,9804$$

Rimlighetskontroll. $1/1,02 = 0,980392 \dots$, vilket ligger i intervallet.

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

4. Maclaurinserier ($a = 0$)

Kring $a = 0$ kallas polynomet Maclaurinpolynom. De tre viktigaste utvecklingarna:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Fler standardutvecklingar, och hur de kombineras, finns i [Taylorutveckling](#).

⚠ Vanliga fel

- **ξ är inte en konstant.** Punkten ξ beror på x (och på n). Vi kan bara säga att den ligger mellan a och x .
- **Uppskatta $f^{(n+1)}$ i fel punkt.** M ska vara det största värdet av $|f^{(n+1)}|$ på *hela* intervallet mellan a och x , inte värdet i a .
- **Glömma $k!$.** Koefficienten är $f^{(k)}(a)/k!$, inte $f^{(k)}(a)$. Resttermen har $(n+1)!$.
- **Blanda ihop ordning och grad.** "Ordning 3" för $\cos x$ ger $1 - x^2/2$ plus restterm av ordning 4; polynomet har grad 2.

5. Lösta övningar

☰ Testuppgift 9.1 – Utveckling av $1/x$ kring $x = \frac{1}{2}$

Vi bestämmer andra ordningens Taylorutveckling av $f(x) = \frac{1}{x}$ kring $x = \frac{1}{2}$.

 Lösning

Derivator. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$. I $a = \frac{1}{2}$: $f = 2$, $f' = -4$, $f'' = 16$.

Polynomet.

$$T_2(x) = 2 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{16}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 6 - 12x + 8x^2.$$

Restterm. $R_2(x) = \frac{-6/\xi^4}{3!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^3$, alltså

$$\boxed{\frac{1}{x} = 6 - 12x + 8x^2 - \frac{1}{\xi^4} \left(x - \frac{1}{2}\right)^3}$$

där ξ ligger mellan $\frac{1}{2}$ och x .

Facit: $6 - 12x + 8x^2 - \frac{1}{\xi^4} \left(x - \frac{1}{2}\right)^3$ där $\xi \in (\frac{1}{2}, x)$ eller $(x, \frac{1}{2})$.

☰ Testuppgift 9.3 b – Maclaurinpolynom för $\sqrt[3]{1+x}$

Vi bestämmer Maclaurinpolynomet av grad 4 för $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$ genom att derivera fyra gånger.

 Lösning

Derivator.

$$f' = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}, \quad f'' = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}, \quad f''' = \frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}, \quad f^{(4)} = -\frac{80}{81}(1+x)^{-11/3}.$$

I $x = 0$ och delat med $k!$: $1, \frac{1}{3}, -\frac{2/9}{2} = -\frac{1}{9}, \frac{10/27}{6} = \frac{5}{81}, -\frac{80/81}{24} = -\frac{10}{243}.$

$$\boxed{T_4(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4}$$

Facit: $1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4.$

Övningsuppgift 9.1 – Utveckling av $\sqrt{x}$ kring $x = 4$

Vi bestämmer andra ordningens Taylorutveckling av $f(x) = \sqrt{x}$ kring $x = 4$.

Lösning

Derivator. $f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f'' = -\frac{1}{4x^{3/2}}, f''' = \frac{3}{8x^{5/2}}$. I $a = 4$: $f = 2, f' = \frac{1}{4}, f'' = -\frac{1}{32}$.

Restterm. $\frac{f'''(\xi)}{3!} = \frac{3}{8 \cdot 6 \xi^{5/2}} = \frac{1}{16\xi^2\sqrt{\xi}}$.

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{16\xi^2\sqrt{\xi}}$$

där ξ ligger mellan 4 och x .

Facit: $2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{16\xi^2\sqrt{\xi}}$.

Övningsuppgift 9.7 – Lös $\sin x = x/2$ approximativt

Vi löser ekvationen $\sin x = \frac{x}{2}$ approximativt genom att ersätta $\sin x$ med dess Maclaurinpolynom av grad a) 3, b) 5.

Lösning

a) $x - \frac{x^3}{6} = \frac{x}{2} \iff x\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{6}\right) = 0$, alltså

$$x = 0, \quad x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,73$$

b) $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = \frac{x}{2}$. Efter division med $x/120$ blir det $x^4 - 20x^2 + 60 = 0$, så $x^2 = 10 \pm 2\sqrt{10}$.

Roten $x^2 = 10 + 2\sqrt{10}$ ger $|x| \approx 4,04$, där polynomet inte längre liknar $\sin x$ ($\sin 4,04 < 0$ men $4,04/2 > 0$). Den förkastas.

$$x = 0, \quad x = \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{10}} \approx \pm 1,92$$

Rimlighetskontroll. Den verkliga lösningen är $x \approx \pm 1,895$. Grad 5 kommer närmare än grad 3, som förväntat.

Facit: a) $x = 0, x \approx \pm \sqrt{3} \approx \pm 1,73$ b) $x = 0, x \approx \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{10}} \approx \pm 1,92$.

Läsning

- [4.10 Taylor Polynomials](#)
- [9.6 Taylor and Maclaurin Series](#)

Se även

- [Taylorutveckling](#)
- [Gränsvärdesberäkning med Taylor](#)
- [Funktionsapproximationer](#)
- [Medelvärdessatsen](#)

Resurser

- [3Blue1Brown: Taylor series](#) 

Gränsvärdesberäkning med Taylor

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #analys #envariabelanalys #gränsvärde #taylor

Kurs: M0065M Förkunskaper: Gränsvärden, Taylors formel

Istället för att jaga standardgränsvärden kan man ersätta funktioner med sin **Taylorutveckling** kring 0 och sedan förkorta.

Idén – lägsta potensen vinner

Ett gränsvärde av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$ när $x \rightarrow 0$ handlar om *hur snabbt* täljare och nämnare går mot noll. Efter Maclaurinutveckling är båda polynom plus små resttermer, och nära 0 dominerar den lägsta potensen av x . Förkorta med den, så syns gränsvärdet direkt.

1. Vanliga utvecklingar kring $x = 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

Behövs fler termer tas de ur **Taylors formel** eller ur formelbladet.

2. Stora ordo

Vi skriver $f(x) = O(x^n)$ när $x \rightarrow 0$ om $f(x) = H(x)x^n$ med H begränsad nära 0. Det betyder att f går mot noll *minst lika snabbt* som x^n . Resttermen i en Maclaurinutveckling av ordning n är just $O(x^{n+1})$.

Räkneregler (Blomqvist, Sats 9.5.1), för $m \geq n$:

$$O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^n), \quad k O(x^n) = O(x^n), \quad x^m O(x^n) = O(x^{m+n}), \quad \frac{O(x^m)}{x^n} = O(x^{m-n}).$$

Den lägre potensen “vinner” vid addition, och vid division sjunker exponenten.

Tumregel

Ta med termer till och med **samma potens som i nämnaren**. Har nämnaren x^3 ska täljaren utvecklas till och med x^3 -termen, och resten skrivs som $O(x^4)$ eller $O(x^5)$.

Exempel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3/6 + O(x^5)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{6} + O(x^2)\right) = -\frac{1}{6}$$

Tip

Utveckla bara så högt du behöver. Använd $O(\cdot)$ -notation för att hålla ordning.

3. Kombinera kända utvecklingar

Att derivera fram en utveckling blir snabbt jobbigt. Oftast är det enklare att sätta in, multiplicera och addera utvecklingar vi redan kan, till exempel

$$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{(-2x)^2}{2} + O(x^3) = 1 - 2x + 2x^2 + O(x^3).$$

Det är tillåtet tack vare **entydighetssatsen** (Blomqvist, Sats 9.6.1): om

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + O(x^{n+1}) \quad \text{när } x \rightarrow 0,$$

så är $c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ Maclaurinpolynomet av ordning n för f . Hur vi än kommer fram till en sådan form, blir koefficienterna desamma.

Härledning – entydighetssatsen

Maclaurins formel ger också $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(x^{n+1})$. Sätt de två uttrycken lika.

Låt $x \rightarrow 0$: då blir $c_0 = f(0)$. Dra bort c_0 från båda led, dela med $x \neq 0$ och låt $x \rightarrow 0$ igen: då blir $c_1 = f'(0)$. Upprepar vi proceduren får vi $c_k = f^{(k)}(0)/k!$ för $k = 0, 1, \dots, n$.

Udda och jämna funktioner. Är f udda, $f(-x) = -f(x)$, innehåller utvecklingen bara udda potenser; är f jämn bara jämna. Det följer av entydighetssatsen, eftersom utvecklingen av $f(-x)$ fås genom att byta x mot $-x$. Därför är $\tan x = x + bx^3 + O(x^5)$ utan att vi behöver räkna ut x^2 - och x^4 -termerna.

Andra obestämda former. Metoden är gjord för $[\frac{0}{0}]$, men andra former kan ofta skrivas om till den:

- $[\infty - \infty]$, till exempel $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$: sätt på gemensamt bråkstreck.
- $[1^\infty]$ och $[0^0]$: skriv $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ och beräkna gränsvärdet av exponenten. Se [Exponentialfunktioner och logaritmer](#).

☰ Föreläsning 32 – Gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$

Vi beräknar

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2},$$

som är av typen $[1^\infty]$.

Lösning

Skriv om. Nära 0 är $\cos x > 0$, så

$$(\cos x)^{1/x^2} = e^{\ln(\cos x)/x^2}.$$

Eftersom e^t är kontinuerlig räcker det att beräkna gränsvärdet av exponenten.

Utveckla $\ln(\cos x)$. Med $g(x) = \ln(\cos x)$ är $g(0) = 0$, $g'(x) = -\tan x$ så $g'(0) = 0$, och $g''(x) = -1/\cos^2 x$ så $g''(0) = -1$. Alltså

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Exponenten.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + O(x)\right) = -\frac{1}{2}.$$

Svar.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}} \approx 0,607$$

Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

⚠ Vanliga fel

- **För kort utveckling.** Stannar vi innan termerna slutat ta ut varandra står vi kvar med $O(x^n)/x^n$, som inte säger något. Utveckla till nämnarens potens.
- **Tro att $O(x^n) - O(x^n) = 0$.** Två resttermer av samma ordning tar inte ut varandra; differensen är fortfarande $O(x^n)$.
- **Glömma gemensamt bråkstreck** vid $[\infty - \infty]$. Utvecklar vi varje term för sig står vi kvar med $\infty - \infty$.
- **Blanda ihop $\sin^2 x$ och $\sin x^2$.** $\sin^2 x = (\sin x)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \dots$, medan $\sin(x^2) = x^2 - \frac{1}{6}x^6 + \dots$

4. Lösta övningar

☰ Testuppgift 9.5 d – Ett $\left[\frac{0}{0}\right]$ -gränsvärde

Vi beräknar med hjälp av Maclaurinutveckling

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - \cos x + 2 \sin x}{\sin^2 x}.$$

✎ Lösning

Nämnaren. $\sin^2 x = (x + O(x^3))^2 = x^2 + O(x^4)$, så vi utvecklar täljaren till och med x^2 .

Täljaren.

$$(1 - 2x + 2x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + 2x + O(x^3) = \frac{5}{2}x^2 + O(x^3).$$

Gränsvärdet.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{2}x^2 + O(x^3)}{x^2 + O(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{2} + O(x)}{1 + O(x^2)} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

Facit: $\frac{5}{2}$.

☰ Testuppgift 9.7 – Maclaurinutveckla $\tan x$

Vi Maclaurinutvecklar $\tan x$ med x -termer till och med ordning 3, genom att sätta

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = ax + bx^3 + O(x^5)$$

($\tan x$ är udda).

Lösning

Multiplitera upp. $\sin x = \cos x \cdot \tan x$ ger

$$x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)(ax + bx^3 + O(x^5)) = ax + \left(b - \frac{a}{2}\right)x^3 + O(x^5).$$

Jämför koefficienter (entydighetssatsen): $a = 1$ och $b - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$, alltså $b = \frac{1}{3}$.

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$$

Facit: $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$.

☰ Testuppgift 9.8 – Välj konstanter så att gränsvärdet finns

Vi bestämmer konstanterna A och B så att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{1 - \cos x} - \frac{A}{x} - \frac{B}{x^2} \right)$$

existerar, och beräknar gränsvärdet.

Lösning

Gemensamt bråkstreck.

$$\frac{x^2 e^x - Ax(1 - \cos x) - B(1 - \cos x)}{x^2(1 - \cos x)}.$$

Nämnaren. $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + O(x^6)$, så nämnaren är $\frac{x^4}{2} + O(x^6)$. Täljaren ska utvecklas till och med x^4 .

Täljaren.

$$x^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - Ax \cdot \frac{x^2}{2} - B \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + O(x^5) = \left(1 - \frac{B}{2}\right)x^2 + \left(1 - \frac{A}{2}\right)x^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{B}{24}\right)x^4 + O(x^5)$$

Villkor. För att gränsvärdet ska finnas måste x^2 - och x^3 -termerna försvinna, annars går uttrycket mot $\pm\infty$. Det ger $A = 2, B = 2$.

Gränsvärdet. Med $B = 2$ blir x^4 -koefficienten $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{12}x^4 + O(x^5)}{\frac{1}{2}x^4 + O(x^6)} = \boxed{\frac{7}{6}}$$

Facit: Gränsvärdet blir $\frac{7}{6}$ för $A = 2$ och $B = 2$.

Läsning

- 4.10 Taylor Polynomials

Se även

- Taylors formel
- Gränsvärden
- Oegentliga gränsvärden
- Exponentialfunktioner och logaritmer