F0005T

Fysik 2

Kurskompendium från Pelles Moln · 108 noter · 2026-10-19
pellesmoln.org/kurser/F0005T

Innehåll

Föreläsning 1 – Dimensionsanalys och π-grupper

Dimensionsanalys 6
Dimensionshomogenitet 8
Pi-grupper 11
Buckinghams pi-teorem 13
Strykmetoden 15

Föreläsning 2 – Laboration och muntlig presentation

Experimentell metodik 18

Föreläsning 1 – Grundläggande vågrörelse

Vågrörelse 21
Svängning 23
Harmonisk våg 26
Våglängd och vågtal 29
Vinkelfrekvens och periodtid 31
Fas och faskonstant 34
Fashastighet och partikelhastighet 36

Föreläsning 2 – Vågor på en sträng

Våghastighet på en sträng 39
Längddensitet 42
Energi och effekt i en harmonisk våg 44
Superposition av vågor 48
Reflektion av vågor 51

Föreläsning 3 – Stående vågor och toner

Stående våg 54
Svängningsmoder 58

Föreläsning 4 – Ljudvågor

Ljudvåg 62
Ljudets hastighet 66
Ljudintensitet och ljudnivå 69
Stående vågor i pipor 74

Föreläsning 5 – Ljudfenomen

Vågor på komplex form 79
Interferens 82
Fasordiagram 93

Svävning 98
Dopplereffekt 102

Föreläsning 6 – Elektromagnetiska vågor

Elektromagnetiska vågor 105
Brytningsindex 108
Snells lag 111
Totalreflektion 114
Dispersion 117
Huygens princip 119

Föreläsning 7 – Polarisation

Polarisation 121
Malus lag 124
Fresnels formler 127
Brewsters vinkel 131

Föreläsning 8 – Diffraktion och interferens

Diffraktion 134
Dubbelspaltexperimentet 137
Fraunhoferdiffraktion 141

Föreläsning 9 – Multipelspalten och tunna skikt

Multipelspalt 144
Interferens i tunna skikt 148
Visibilitet 151

Föreläsning 1 – Ljusets partikelnatur

Fotoelektriska effekten 154
Fotonen 160
Röntgenstrålning 165
Bromsstrålning 170
Comptonspridning 175

Föreläsning 2 – Dualism, osäkerhet och atomspektra

Parproduktion 181
Komplementaritetsprincipen 187
Heisenbergs osäkerhetsprincip 191
Linjespektrum 198
Bohrs atommodell 204

Föreläsning 3 – Väteatomen och materievågor

Bohrs modell för väteatomen 209

Rydbergs formel 217
Väteliknande system 223
Reducerad massa 229
De Broglie-våglängd 235
Elektrondiffraktion 241

Föreläsning 4 – Elektronmikroskopi och laser

Elektronmikroskop 247
Stimulerad emission 254
Populationsinversion 259
Laser 265

Föreläsning 5 – Svartkroppsstrålning och Schrödingerekvationen

Svartkroppsstrålning 271
Stefan-Boltzmanns lag 277
Wiens förskjutningslag 282
Plancks strålningslag 287
Schrödingerekvationen 293
Vågfunktion 299
Partikel i låda 304

Föreläsning 6 – Bundna tillstånd i 2D och i potentialbrunn

Partikel i tvådimensionell låda 311
Partikel i potentialbrunn 319

Föreläsning 7 – Tunnling, oscillatorn och väteatomen

Kvantmekanisk tunnling 327
Sveptunnelmikroskopet 333
Kvantmekanisk harmonisk oscillator 338
Schrödingerekvationen för väteatomen 346
Kvanttal 352
Atomorbitaler 356

Föreläsning 8 – Spin, Pauliprincipen och röntgenspektra

Elektronspin 361
Paulis uteslutningsprincip 366
Elektronkonfiguration 370
Zeemaneffekten 376
Urvalsregler 382
Spin-bankoppling 386
Moseleys lag 392
Kvantintrassling 397

Föreläsning 9 – Kemisk och fysisk bindning

Kovalent bindning 401
Metallisk bindning 409
Jonbindning 414
Van der Waals-bindning 420
Vätebindning 427
Dipolmoment 434

Föreläsning 10 – Molekylspektra och kristallstruktur

Kristallstrukturer 440
Molekylrotation 451
Molekylvibration 459
Molekylspektra 465
Kristallgitter 471
Packningstäthet 477
Kristalldefekter 484

Föreläsning 11 – Fasta material och halvledare

Energiband 488
Bandgap 493
Ferminivån 499
Tillståndstäthet 505
Fermi-Dirac-fördelningen 510
Halvledare 516
Dopning 520

Dimensionsanalys

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#fysik #experimentell-metodik #metod

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Experimentell metodik

Varje fysikalisk storhet kan uttryckas i ett fåtal grunddimensioner. Dimensionsanalys utnyttjar det för att kontrollera samband, för att härleda hur storheter måste bero på varandra, och för att minska antalet variabler i ett experiment.

---

1. De sju grunddimensionerna

Vi har grundläggande fysikaliska dimensioner:

1. Massa (M)
2. Längd (L)
3. Tid (T)
4. Elektrisk ström (I)
5. Temperatur (Θ)
6. Ljusstyrka (J)
7. Materiemängd (N)

Dimensionen hos en storhet x skrivs $[x]$ och är alltid en produkt av potenser av dessa. I mekaniken räcker de tre första.

---

2. Vad analysen kan och inte kan

Dimensionsanalysen ger *formen* på ett samband, men aldrig de dimensionslösa faktorerna — en konstant framför uttrycket eller ett beroende av en vinkel syns inte i dimensionerna.

Tre verktyg bygger vidare på detta: dimensionshomogenitet för att kontrollera ett uttryck, π-grupper för att reducera variabelantalet, och Buckinghams pi-teorem för att veta hur många grupper man ska leta efter.

Se även

- Dimensionshomogenitet
- Pi-grupper
- Buckinghams pi-teorem
- Strykmetoden
- Experimentell metodik

Resurser

- Wikipedia: Dimensional analysis

Dimensionshomogenitet

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #experimentell-metodik #princip

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Dimensionsanalys

Alla termer som adderas i ett fysikaliskt samband måste ha samma dimension. Principen kallas dimensionshomogenitet och ger ett snabbt sätt att kontrollera ett uttryck: bär två adderade termer olika dimension är något fel.

1. Dimensionen hos en storhet

Dimensionen läses av direkt ur definitionen. Hastighet är längd per tid och acceleration hastighet per tid:

$$[v] = LT^{-1}$$

$$[a] = LT^{-2}$$

Sammansatta storheter ärver dimensionen från sitt samband. Ur

$$F = ma$$

följer

$$[F] = M \cdot LT^{-2} = MLT^{-2}$$

och på samma sätt ger arbetet $W = Fs$, med $[F] = MLT^{-2}$ och $[s] = L$, dimensionen

$$[W] = ML^2T^{-2}$$

2. Homogenitetsprincipen

Betrakta läget vid konstant acceleration:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Varje term i högerledet måste ha samma dimension som vänsterledet, alltså längd:

$$[s] = L \qquad [s_0] = L$$

$$[v_0 t] = LT^{-1}T = L$$

$$[at^2] = LT^{-2}T^2 = L$$

Uttrycket är homogent. Faktorn $\frac{1}{2}$ är dimensionslös och påverkar ingenting — det är just sådana faktorer dimensionsanalysen inte kan hitta.

---

3. Att gissa ett samband ur dimensionerna

Antag att pendelns svängningstid beror på längd, massa, tyngdacceleration och utslagsvinkel. Vi gör en potensansats:

$$t = k \cdot l^{\alpha} m^{\beta} g^{\epsilon} \theta^{\gamma}$$

Dimensionerna hos de ingående storheterna är

$$[t] = T \qquad [l] = L \qquad [m] = M$$

$$[g] = LT^{-2} \qquad [\theta] = 1$$

Vinkeln är dimensionslös och kan därför inte bidra. Kravet på homogenitet ger en ekvation per grunddimension. Tiden finns bara i faktorn

$$(LT^{-2})^{\epsilon}$$

så exponentmatchning i T ger

$$1 = -2\epsilon \implies \epsilon = -\frac{1}{2}$$

Längden får inte finnas kvar netto, vilket ger

$$0 = \alpha + \epsilon \implies \alpha = \frac{1}{2}$$

och eftersom ingen massa förekommer i vänsterledet är

$$0 = \beta$$

Ansatsen blir därmed

$$t = k\sqrt{\frac{l}{g}}\theta^{\gamma}$$

---

4. Vad analysen kunde berätta

Kärnan i resultatet är faktorn

$$\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Massan föll bort helt — pendelns svängningstid beror inte på vikten. Kvar står två okända: konstanten k och vinkelberoendet θ^{γ}. Dem måste vi mäta oss till, för de är dimensionslösa.

Det användbara som ändå går att läsa av är proportionaliteten

$$t \propto \sqrt{l}$$

Fyrdubblad längd ger alltså dubblad svängningstid, eftersom

$$\sqrt{4} = 2$$

Se även

- Dimensionsanalys
- Pi-grupper
- Buckinghams pi-teorem
- Strykmetoden
- Svängning

Resurser

- Wikipedia: Dimensional analysis

Pi-grupper

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #experimentell-metodik #metod

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Dimensionsanalys, Buckinghams pi-teorem

---

En π-grupp är en dimensionslös kombination av de storheter som ingår i ett problem. Genom att skriva om ett samband i π-grupper istället för i de ursprungliga variablerna minskar antalet storheter som måste varieras i mätserien, och det som återstår att bestämma experimentellt är en funktion av färre argument.

---

1. Arbetsgång

1. Gör en variabellista
2. Gör en snabb dimensionsanalys
3. Skapa $\pi-$grupper
4. Gör en ansats
    1. $\pi_1 = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$
5. Bestäm funktionssamband
    1. Plotta mätdata
    2. Bestäm eventuella konstanter

Steg 3 görs med strykmetoden, och antalet grupper är känt i förväg ur π-teoremet.

Excel

- Håll dig till en tabell, där rader är genomförande och kolumner är: $\pi-$grupper, variabler osv.

---

2. Genomräknat fall – hjulets omloppstid

En vikt fästs i ena änden av ett snöre, vars andra ände hakas på en skruv, som är fastsatt på periferin, på ett (approximativt) homogent hjul. Snöret lindas upp på hjulets periferi. Vikten släpps därefter, och efter det att den rört sig en bestämd sträcka nedåt, mäts hjulets omloppstid. Bestäm en formel som bestämmer hjulets omloppstid τ.

Först variabellistan med dimensioner:

Storhet	Symbol	Dimension
Omloppstid	τ	T
Hjulets radie	r	L
Hjulets tjocklek	h	L
Hjulets densitet	ρ	ML^{-3}
Viktens massa	m	M
Fallsträcka	s	L
Tyngdacceleration	g	LT^{-2}

Sedan stryks en grunddimension i taget:

&\begin{vmatrix} &M&L&T& \\ \tau &0&0&1 \\ r &0&1&0\\ h &0&1&0\\ \rho &1&-3&0\\ m &1&0&0\\ s &0&1&0\\ g &0&1&-2 \end{vmatrix}\implies \begin{vmatrix} &M&L&T& \\ \tau &0&0&1 \\ r &0&1&0\\ h &0&1&0\\ \rho/m &0&-3&0\\ s &0&1&0\\ g &0&1&-2 \end{vmatrix} \implies \begin{vmatrix} &M&L&T& \\ \tau &0&0&1 \\ h/r &0&0&0\\ s/r &0&0&0\\ \rho r^{3}/m &0&0&0\\ g/r &0&0&-2 \end{vmatrix}\implies \begin{vmatrix} &M&L&T& \\ \tau\sqrt{g/r} &0&0&0\\ h/r &0&0&0\\ s/r &0&0&0\\ \rho r^{3}/m &0&0&0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$ Varje pil är en radoperation, dvs. en multiplikation/division av storheterna: 1. **Bort med M.** Bara ρ och m bär massa. m blir pivot, $\rho \to \rho/m$, och m lämnar tabellen. 2. **Bort med L.** r blir pivot: $h\to h/r$, $s\to s/r$, $\rho/m \to \rho r^{3}/m$, $g\to g/r$. τ har ingen längd och står still. r lämnar tabellen. Tre nollrader klara. 3. **Bort med T.** g/r blir pivot (T^{-2}). τ har T^{1}, alltså halva pivoten: $\tau \to \tau\sqrt{g/r}$. Alla exponenter noll, och antalet stämmer med Buckingham: $n-k=7-3=4$.

\pi_1=\tau\sqrt{\dfrac{g}{r}},\qquad \pi_2=\dfrac{h}{r},\qquad \pi_3=\dfrac{s}{r},\qquad \pi_4=\dfrac{\rho r^{3}}{m}

\pi_1=f(\pi_2,\pi_3,\pi_4) \implies \boxed{;\tau=\sqrt{\dfrac{r}{g}};f!\left(\dfrac{h}{r},,\dfrac{s}{r},,\dfrac{\rho r^{3}}{m}\right);}

Se även - [[Strykmetoden]] - [[Buckinghams pi-teorem]] - [[Dimensionsanalys]] - [[Dimensionshomogenitet]] - [[Experimentell metodik]] ## Resurser - [Wikipedia: Buckingham π theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Buckingham_%CF%80_theorem) --- ← [[Dimensionshomogenitet]] · [[F0005T]] · [[Buckinghams pi-teorem]] →

Buckinghams pi-teorem

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#fysik #experimentell-metodik #sats

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Dimensionsanalys, Pi-grupper

---

Buckinghams π-teorem säger att ett samband mellan n fysikaliska variabler som bygger på k oberoende grunddimensioner kan skrivas om som ett samband mellan $n - k$ dimensionslösa π-grupper. Teoremet talar alltså om på förhand hur många π-grupper vi ska leta efter.

---

1. Satsen

Ett samband mellan n variabler blir efter omskrivning ett samband mellan

$$\boxed{n - k}$$

dimensionslösa grupper, där k är antalet oberoende grunddimensioner som variablerna tillsammans innehåller.

---

2. Varför satsen är användbar

Antalet $n - k$ är en **räknekontroll**: har strykmetoden gett fler eller färre grupper än så har något gått fel. Det är också en besparing i labbet — varje eliminerad variabel är en variabel mindre att variera i mätserien.

Ett samband mellan sju storheter som bygger på M, L och T reduceras till fyra grupper, eftersom $7 - 3 = 4$.

Se även

- Pi-grupper
- Strykmetoden
- Dimensionsanalys
- Dimensionshomogenitet

Resurser

- Wikipedia: Buckingham π theorem

Strykmetoden

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #experimentell-metodik #metod

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Dimensionsanalys, Pi-grupper

---

Strykmetoden är ett systematiskt sätt att konstruera dimensionslösa π-grupper. Vi ställer upp variablernas dimensionsexponenter i en tabell och eliminerar en grunddimension i taget genom att välja en pivotvariabel och dividera de övriga med lämplig potens av den. När alla exponenter är noll återstår π-grupperna, och pivotvariablerna har strukits ur tabellen.

---

1. Vad är en π-grupp?

En π-grupp är en kombination av storheter som är dimensionslös:

$$[\pi] = 1$$

Det enklaste fallet är en kvot mellan två längder,

$$\pi = \frac{L_1}{L_2}.$$

där dimensionerna tar ut varandra:

$$[\pi] = \frac{L}{L} = 1$$

---

2. Varför vi använder π-grupper

Betrakta kraften på en kropp som beror på sex storheter:

$$F = f(A, h, x, \rho_O, \rho_V, g)$$

Ska vi kartlägga det experimentellt måste varje variabel varieras för sig. Skriver vi istället om det i dimensionslösa grupper,

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho_O g x^3}$$

$$\pi_2 = \frac{A}{x^2}$$

$$\pi_3 = \frac{h}{x}$$

$$\pi_4 = \frac{\rho_V}{\rho_O}$$

blir sambandet

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \pi_4)$$

Sex variabler har blivit fyra grupper, i enlighet med π-teoremet.

---

3. Strykmetoden steg för steg

Vi ställer upp en tabell med en rad per storhet och en kolumn per grunddimension, och fyller i exponenterna. Viskositeten har till exempel dimensionen

$$ML^{-1}T^{-1}$$

Sedan elimineras en dimension i taget. Välj en pivotvariabel som bär dimensionen, dividera de övriga raderna med lämplig potens av pivoten så att deras exponent blir noll, och stryk pivotraden. Efter massan tar vi längden:

Steg 3 – eliminera längd

$$\frac{F}{\rho v^2 s^2}$$

$$\frac{\mu}{\rho v s}$$

När tabellen är helt nollad står grupperna kvar:

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho v^2 s^2}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho v s}$$

---

4. Vad vi gör med π-grupperna

Med bara två grupper är sambandet en funktion av en variabel:

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2)$$

alltså

$$\frac{F}{\rho v^2 s^2} = \Phi\left(\frac{\mu}{\rho v s}\right)$$

Funktionen Φ ger dimensionsanalysen inte — den mäts upp genom att plotta π_1 mot π_2. Men mätserien är nu endimensionell istället för femdimensionell.

Se även

- Pi-grupper
- Buckinghams pi-teorem
- Dimensionsanalys
- Dimensionshomogenitet
- Experimentell metodik

Resurser

- Wikipedia: Nondimensionalization

Experimentell metodik

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #mätteknik #laboration

> **Kurser:** F0005T, F0051T, F0004T

---

1. Definition

Systematiskt arbetssätt för att planera, utföra och analysera fysikaliska experiment så att resultatet blir reproducerbart och mätosäkerheten kan kvantifieras.

---

2. Dimensionsanalys

Fysikaliska samband måste vara dimensionellt konsistenta. Från en antagen potensansats

$$t = C\, l^{b}\, g^{c}\, m^{d}$$

kan exponenterna bestämmas genom att kräva att båda leden har samma dimension (och C blir dimensionslös).

Metoden utvecklas i dimensionsanalysen, och det systematiska sättet att reducera variabelantalet är π-grupper via strykmetoden.

---

3. Linjärisering via logaritm

Vid potenssamband $y = ax^{b}$ ger logaritmering

$$\ln y = \ln a + b \ln x$$

dvs en rät linje i log–log-plot med lutning b och interceptet $\ln a$. Det är därför exponenten bestäms grafiskt: lutningen i en logaritmerad plot *är* exponenten.

---

4. Föreläsningsanteckningar

> Från föreläsning: 2025-11-05, F0004T

4.1 2025-11-05 – EM2

Repetition från EM1 (dimensionsanalys). Läs EM1 Almas anteckningar för fullständiga noteringar om dimensionsanalys.

Metod för Labb

1. Planera

- Definiera problem
- Utrustning
- Variabellista
- Planera mätningar

2. Experiment

- ≥ 4 olika värden ⇒ datatabell + konstanta data (t.ex. $m = 32$ g)

3. Data

- Rita graf
- Ansats: potensfunktion $t = a \cdot l^b$
- Logaritmera: $\ln t = \ln a + b \ln l$
- Rita graf av logaritmerade värden (Excel)
- Bestäm lutning, dvs exponent $b \approx 0{,}6$ och avrunda $b \approx 0{,}5$
- Om ej rät linje: prova annan funktion (kompendium s 5–6)

4. Repetera

- Repetera steg 2–3 för varje variabel som kan varieras

5. Ansats

- Potensfunktion med alla variabler: $t = C \cdot l^b \cdot g^c \cdot m^d$
- Kontrollera att C är dimensionslös

Se även

- Dimensionsanalys
- Dimensionshomogenitet
- Pi-grupper
- Strykmetoden
- Funktionsapproximationer

Vågrörelse

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #vågrörelselära #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Svängning

En våg är en störning som sprider sig från den plats där den uppstod. Det som transporteras är rörelse och energi, inte materia — mediets punkter svänger kring sina jämviktslägen medan störningen förflyttar sig genom mediet.

---

1. Vad som rör sig och vad som inte gör det

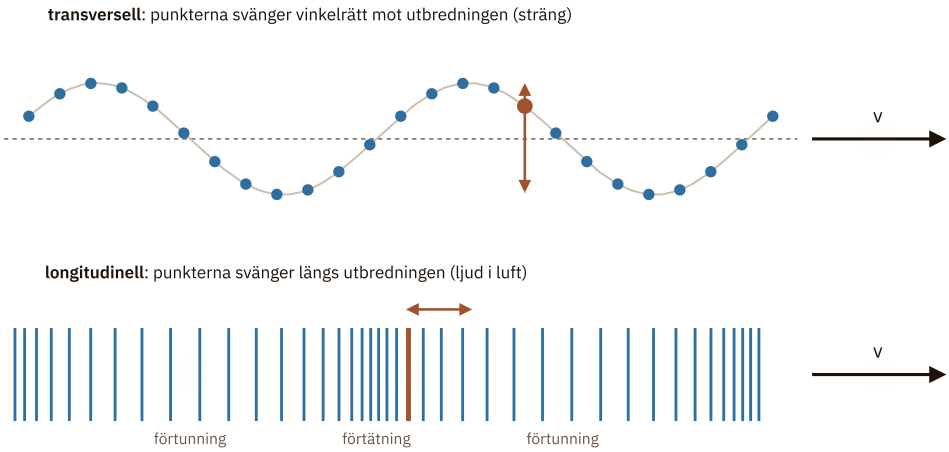
Skilj på två rörelser som sker samtidigt. Störningen vandrar genom mediet med fashastigheten, medan varje enskild punkt i mediet bara svänger kring sitt jämviktsläge och stannar där den är. En kork på vattenytan far upp och ner när vågen passerar, men följer inte med vågen in mot land.

---

2. Transversella och longitudinella vågor

Vågor delas in efter hur mediets punkter svänger i förhållande till utbredningsriktningen:

- **Transversell** — punkterna svänger vinkelrätt mot utbredningsriktningen. Vågen på en sträng är transversell.
- **Longitudinell** — punkterna svänger längs utbredningsriktningen. En ljudvåg i luft är longitudinell.



Samma våg åt höger med farten v, två sätt att svänga. Överst rör sig varje punkt upp och ner, vinkelrätt mot utbredningen; nederst rör sig varje skikt fram och tillbaka längs utbredningen, så att förtätningar och förtunningar bildas. I båda fallen stannar mediet kvar — det är störningen som vandrar.

---

3. Puls eller periodisk våg

En engångsstörning ger en **puls** som passerar och lämnar mediet i vila. Håller vi istället källan i gång får vi en periodisk våg, och om källan utför en harmonisk svängning blir resultatet en harmonisk våg — det fall som går att räkna på analytiskt och som resten av vågläran bygger på.

Läsning

- 15.1 Types of Mechanical Waves
- 15.2 Periodic Waves

Se även

- Harmonisk våg
- Superposition av vågor
- Våghastighet på en sträng
- Svängning

Resurser

- Wikipedia: Wave

Svängning

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #mekanik #svängning

> **Kurser:** F0004T, F0005T, F0006T **Förkunskaper:** Newtons lagar, Differentialekvationer

1. Harmonisk oscillator

Återställande kraft proportionell mot utslaget: $F = -kx$. Newton ger

$$m\ddot{x} + kx = 0 \implies \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

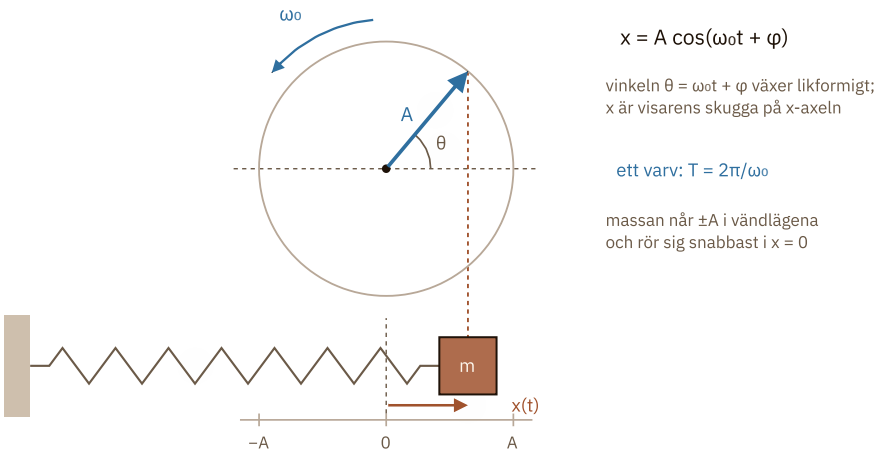
Fysika: Fb11a

Lösning:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

Fysika: Fb11a

Period $T = 2\pi/\omega_0$, frekvens $f = 1/T$.



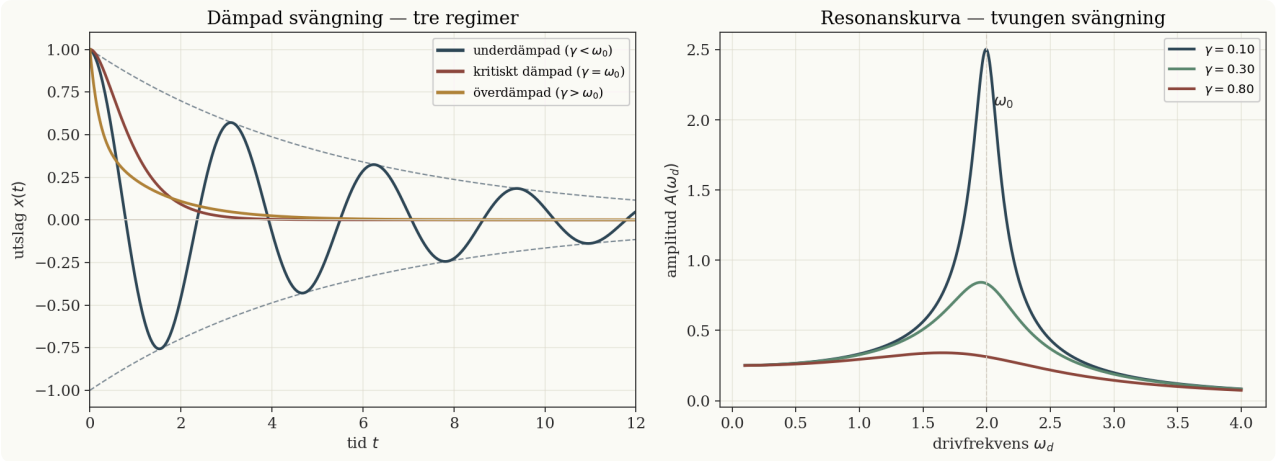
Visaren med längden A roterar med vinkelfrekvensen ω_0, och massan befinner sig hela tiden rakt under dess spets. Skuggan på x-axeln är $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, och ett varv tar $T = 2\pi/\omega_0$.

2. Dämpad svängning

När en kraft dämpar svängningen:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \underbrace{2\gamma}_{\text{dämpning}}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \gamma = \frac{b}{2m}$$ *Fysika: Fb11d*



Tre fall beroende på rötterna till den karakteristiska ekvationen:

2.1 Underdämpad ($\gamma < \omega_0$)

$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_e t + \phi)$ *Fysika: Fb11d*

$K_d = Ke^{2\gamma t}$ *Fysika: Fb11d (i formen* $K_d = Ke^{-2\gamma t}$*)*

2.2 Kritiskt dämpad ($\gamma = \omega_0$)

$x = e^{-\gamma t}(A_1 + A_2 t)$ *Fysika: Fb11d*

2.3 Överdämpad ($\gamma > \omega_0$)

$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{\omega_e t} + A_2 e^{-\omega_e t})$ *Fysika: Fb11d*

2.4 Energi vid dämpad svängning

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m}{2}(2v\dot{v}) + \frac{k}{2}(2x\dot{x}) = mva + kxv = v(ma + kx) = v(-b\dot{x}) = -bv^2$$

- b är dämpningskonstanten; $\frac{dE}{dt} \leq 0$ — energin avtar alltid.

3. Tvungen svängning

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega_d t)$$

Fysika: Fb11e (i formen $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = (F_{\max}/m)\cos\omega_d t$)

Ger resonans när $\omega_d \approx \omega_0$. Amplituden:

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_d^2)^2 + (2\gamma\,\omega_d)^2}}$$ *Fysika: Fb11e (i formen* $A = \frac{F_{\max}/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_d^2)^2 + (2\gamma\omega_d)^2}}$*)*

Maximal amplitud vid resonansfrekvensen $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$.

---

4. Partikel- och fysikpendel

Läsning

- 14.2 Simple Harmonic Motion
- 14.7 Damped Oscillations
- 14.8 Forced Oscillations and Resonance
- 14.5 The Simple Pendulum
- 14.6 The Physical Pendulum

Se även

- Differentialekvationer
- Homogena linjära differentialekvationer
- Cirkelrörelse

Resurser

- 3Blue1Brown: Resonance

Harmonisk våg

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #vågrörelselära #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Svängning, Vågrörelse, Trigonometri

---

En harmonisk våg har formen av en sinus- eller cosinusfunktion och förflyttar sig utan att ändra form. Den beskrivs av $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \alpha)$, där tecknet framför ωt avgör utbredningsriktningen: minus ger en våg åt höger, plus en våg åt vänster.

---

1. Att beskriva en våg matematiskt

Ser vi bara på en enda punkt i mediet är utslaget en funktion av tiden,

$$y = f(t)$$

men det räcker inte — en våg är utsträckt i rummet också. Vi behöver en funktion av både läge och tid. Nyckelidén är att en våg som rör sig med oförändrad form beror på x och t bara genom kombinationen

$$y = f(x - vt)$$

Fysika: Fc1 (i formen $s = f(x - vt) + g(x + vt)$)

---

2. Vågor som rör sig åt höger och vänster

Argumentet $x - vt$ är konstant längs en punkt som förflyttar sig med hastigheten v åt höger. Formen

$$y = f(x - vt)$$

beskriver därför en högergående våg. Byter vi tecken,

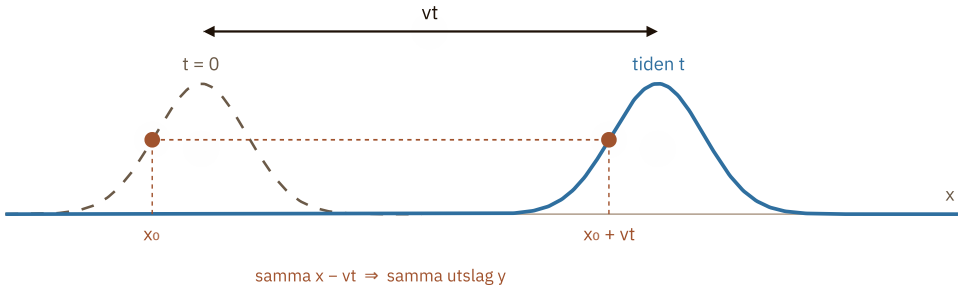
$$y = f(x + vt)$$

krävs istället att x minskar när t växer. Alltså:

$$f(x - vt) \;\rightarrow\; \text{våg åt höger}$$

$$f(x + vt) \;\rightarrow\; \text{våg åt vänster}$$

Funktionen f är själva vågformen och kan i princip vara vad som helst; det är argumentet som bestämmer riktningen.



Samma vågform vid $t = 0$ och vid tiden t, flyttad sträckan vt åt höger. Punkten $x_0 + vt$ har nu det utslag som x_0 hade, eftersom båda ger samma värde på $x - vt$.

---

3. Harmonisk våg

Väljer vi f som en sinus får vi den harmoniska vågen:

$$\boxed{y = A\sin(kx - \omega t + \alpha)}$$

Fysika: Fc1 (i formen $s = a\cos(\omega t \pm kx + \delta)$)

Här är A amplituden, k vågtalet, ω vinkelfrekvensen och α faskonstanten. Detta är standardformen och den vi utgår från i allt som följer.

---

4. Vågens egenskaper

Fyra storheter läses av direkt ur uttrycket. I rummet upprepar vågen sig efter en våglängd

$$(\lambda)$$

och i tiden efter en periodtid T, med frekvensen

$$f = \frac{1}{T}$$

Fysika: Fc1 (i formen $T = 1/f$)

Amplituden A sätter utslagets storlek och faskonstanten α förskjuter vågen i sidled. Sambandet mellan rums- och tidsstorheterna ger fashastigheten $v = \omega/k = \lambda f$.

Läsning

- 15.3 Mathematical Description of a Wave
- 15.2 Periodic Waves

Se även

- Vågrörelse
- Våglängd och vågtal
- Vinkelfrekvens och periodtid
- Fas och faskonstant
- Fashastighet och partikelhastighet

Resurser

- Wikipedia: Sinusoidal plane wave

Våglängd och vågtal

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #vågrörelselära #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Harmonisk våg

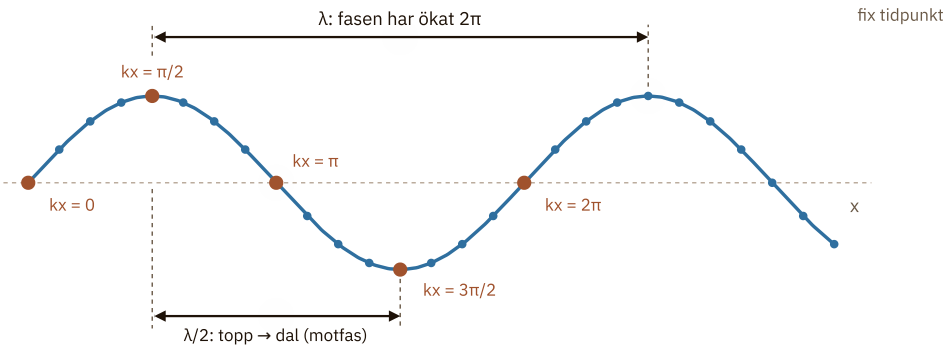
Våglängden λ är det avstånd i rummet efter vilket vågen upprepar sig vid en fix tidpunkt. Vågtalet $k = 2\pi/\lambda$ mäter samma sak i radianer per längdenhet och anger alltså hur mycket fasen ändras när vi förflyttar oss längs vågen.

1. Våglängden

Fryser vi tiden och går längs vågen upprepar mönstret sig med perioden λ. Efter en halv våglängd

$$x = 0.5\lambda$$

är vi i motfas mot startpunkten — en topp har blivit en dal.



Strängen fotograferad vid en fix tidpunkt. Fasen kx växer med $\pi/2$ per kvarts våglängd och med 2π på en hel våglängd; en halv våglängd bort har en topp blivit en dal.

2. Fasen ändras 2π per våglängd

Vågen beskrivs av

$$y = A\sin(kx - \omega t + \alpha)$$

där hela argumentet

$$kx - \omega t + \alpha$$

är fasen. Att vågen upprepar sig efter en våglängd betyder att fasen då hunnit öka med precis ett varv:

$$(k(x+\lambda) - \omega t + \alpha) - (kx - \omega t + \alpha) = 2\pi$$

---

3. Vågtalet

Vänsterledet förenklas till $k\lambda$, så villkoret blir

$$k\lambda = 2\pi$$

vilket ger

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

Fysika: Fc1

Vågtalet är alltså fasändringen per längdenhet. Tidens motsvarighet är vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi/T$.

Läsning

- 15.2 Periodic Waves
- 15.3 Mathematical Description of a Wave

Se även

- Harmonisk våg
- Vinkelfrekvens och periodtid
- Fas och faskonstant
- Fashastighet och partikelhastighet

Resurser

- Wikipedia: Wavenumber

Vinkelfrekvens och periodtid

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #vågrörelselära #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Harmonisk våg

Periodtiden T är den tid det tar för en punkt på vågen att genomföra en hel svängning. Vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi/T$ anger hur mycket fasen ändras per tidsenhet och är tidens motsvarighet till vågtalet.

---

1. Periodtiden

Står vi still i en punkt och följer utslaget över tiden upprepar rörelsen sig med perioden T. Efter en halv period

$$t = 0.5T$$

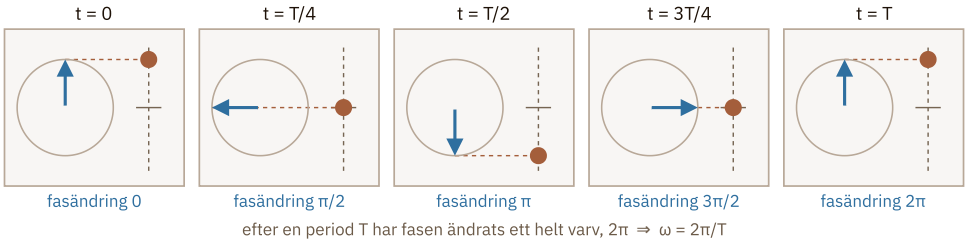
är punkten i motfas mot där den började, efter en hel period

$$t = T$$

är den tillbaka, och efter

$$t = 2T$$

har den svängt två hela varv.



En och samma punkt i mediet filmad under en period. Visaren vrids vinkeln ωt, och punktens utslag är visarspetsens höjd: topp, jämviktsläge, dal, jämviktsläge och topp igen när fasen har ändrats 2π.

---

2. Fasen ändras 2π per period

Vågen beskrivs av

$$y = A\sin(kx - \omega t + \alpha)$$

och det är fasen

$$kx - \omega t + \alpha$$

som styr var i svängningen punkten befinner sig. Att rörelsen upprepar sig efter tiden T betyder att fasen då ändrats med precis ett varv:

$$(kx - \omega(t + T) + \alpha) - (kx - \omega t + \alpha) = 2\pi$$

Tecknet spelar ingen roll för storleken på ändringen; vad vi kräver är att den motsvarar ett helt varv.

---

3. Vinkelfrekvensen

Vänsterledet ger ωT, alltså

$$\omega T = 2\pi$$

och därmed

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Fysika: Fc1 (i formen $\omega = 2\pi f$, $T = 1/f$)

Vinkelfrekvensen är fasändringen per tidsenhet, mätt i radianer per sekund. Rummets motsvarighet är vågtalet $k = 2\pi/\lambda$, och tillsammans ger de fashastigheten $v = \omega/k$.

Läsning

- 15.2 Periodic Waves
- 14.1 Describing Oscillation

Se även

- Harmonisk våg
- Våglängd och vågtal
- Fas och faskonstant
- Fashastighet och partikelhastighet
- Svängning

Resurser

- Wikipedia: Angular frequency

Fas och faskonstant

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #vågrörelselära #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Harmonisk våg

Fasen är hela argumentet $kx - \omega t + \alpha$ i vågfunktionen och bestämmer var i svängningen en punkt befinner sig. Faskonstanten α förskjuter vågen i sidled utan att ändra amplitud, våglängd eller frekvens.

---

1. Hur faskonstanten påverkar vågen

Jämför två vågor som är identiska så nära som faskonstanten:

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = A\sin(kx - \omega t + \alpha)$$

Fysika: Fc1 (i formen $s = a\cos(\omega t \pm kx + \delta)$)

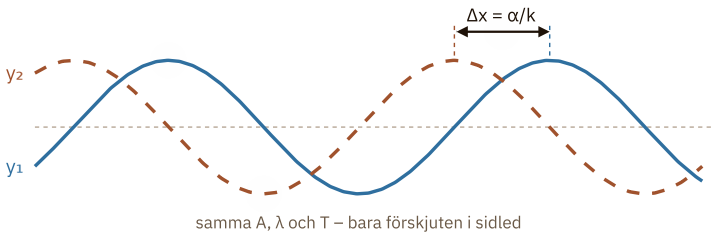
De har samma amplitud, samma våglängd och samma periodtid. Skillnaden är att y_2 är förskjuten i sidled. Vid

$$\alpha = \pi$$

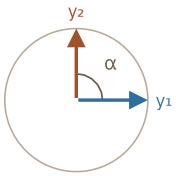
är vågorna i motfas — där den ena har topp har den andra dal. Vid

$$\alpha = 2\pi$$

är förskjutningen ett helt varv och vågorna sammanfaller igen.



samma A, λ och T – bara förskjuten i sidled



faserna skiljer α

y_2 är y_1 förskjuten sträckan α/k i sidled, här med $\alpha = \pi/2$. I visarbilden till höger ligger de två vågorna vinkeln α isär; $\alpha = \pi$ ger motfas och $\alpha = 2\pi$ gör att de sammanfaller igen.

---

2. Fasen

I uttrycket

$$y = A\sin(kx - \omega t + \alpha)$$

kallas hela argumentet

$$kx - \omega t + \alpha$$

för fasen. Den beror på både läge och tid: rumsberoendet via kx och tidsberoendet via $-\omega t$. Faskonstanten α är det enda konstanta bidraget och sätter alltså vågens utgångsläge vid $x = 0, t = 0$.

Att två punkter är i fas betyder att deras faser skiljer sig med en multipel av 2π; att de är i motfas betyder att skillnaden är en udda multipel av π. Det är den observationen som gör superposition räknebar.

Läsning

- 15.3 Mathematical Description of a Wave

Se även

- Harmonisk våg
- Våglängd och vågtal
- Vinkelfrekvens och periodtid
- Superposition av vågor
- Fashastighet och partikelhastighet

Resurser

- Wikipedia: Phase (waves)

Fashastighet och partikelhastighet

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #vågrörelselära #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Harmonisk våg, Derivata

Fashastigheten $v = \omega/k = \lambda f$ är den hastighet med vilken vågformen — till exempel en vågtopp — förflyttar sig genom mediet. Partikelhastigheten $\partial y/\partial t$ är hastigheten hos en enskild punkt i mediet, för en transversell våg riktad vinkelrätt mot utbredningsriktningen. De två är skilda storheter och sammanfaller inte.

---

1. Fashastigheten

Följ en bestämd punkt på vågformen, säg en vågtopp. Att stanna på samma punkt i vågformen betyder att fasen hålls konstant:

$$y = A\sin(kx - \omega t + \alpha)$$

$$kx - \omega t + \alpha = \text{konstant}$$

Löser vi ut läget ur villkoret får vi hur toppen måste förflytta sig:

$$x = \frac{\omega}{k}t + \frac{\alpha + \text{konstant}}{k}$$

Det är en rätlinjig rörelse med konstant hastighet, och derivering ger

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}}$$

Fysika: Fc1

---

2. En intuitiv tolkning

Uttrycket

$$v = \frac{\omega}{k}$$

blir mer läsbart om vi sätter in definitionerna

$$\omega = 2\pi f \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

vilket ger

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f$$

Alltså

$$\boxed{v = \lambda f}$$

Fysika: Fc1

Under en period hinner vågen precis en våglängd framåt. Sker det f perioder per sekund tillryggaläggs λf per sekund.

---

3. Partikelhastigheten

Fashastigheten säger ingenting om hur fort mediet självt rör sig. För att få det håller vi istället läget fixt och deriverar utslaget med avseende på tiden. Ur

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \alpha)$$

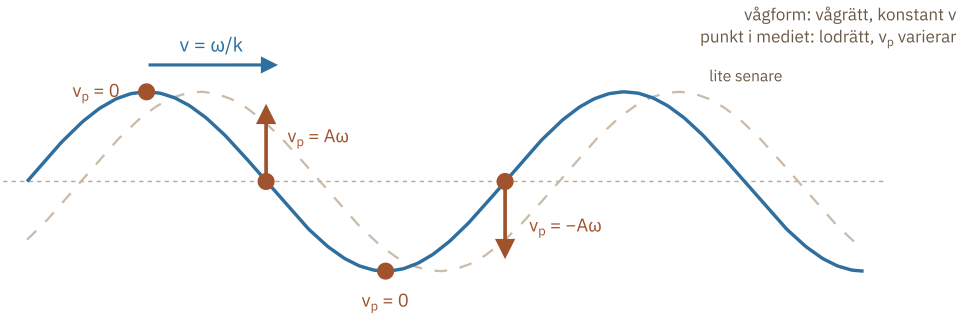
fås

$$v_p = \frac{\partial y}{\partial t}$$

Fysika: Fc1 (i formen $v_p = ds/dt$)

$$v_p(x, t) = -A\omega \cos(kx - \omega t + \alpha)$$

Partikelhastigheten varierar alltså i tid och rum, är noll i vändlägena och som störst i jämviktslägena, med maximalvärdet $A\omega$. Fashastigheten ω/k är däremot konstant och bestäms av mediet — för en sträng av spännkraft och längddensitet.



Vågformen flyttas vågrätt med $v = \omega/k$ (streckad: lite senare), medan varje punkt i strängen bara rör sig lodrätt. I topp och dal står punkten stilla ett ögonblick; i jämviktsläget är farten störst, $A\omega$, uppåt eller nedåt beroende på åt vilket håll strängen lutar.

Läsning

- 15.3 Mathematical Description of a Wave
- 15.4 Speed of a Transverse Wave

Se även

- Harmonisk våg
- Våglängd och vågtal
- Vinkelfrekvens och periodtid
- Våghastighet på en sträng
- Energi och effekt i en harmonisk våg

Resurser

- Wikipedia: Phase velocity

Våghastighet på en sträng

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #vågrörelselära #samband

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Längddensitet, Vågrörelse

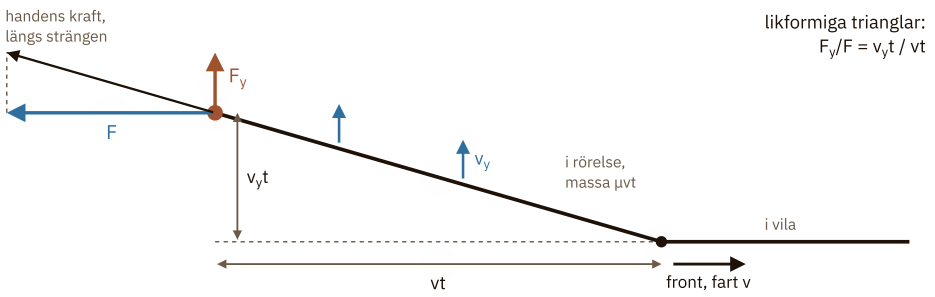
Hastigheten hos en våg på en sträng bestäms av strängens egenskaper, inte av vågen själv: $v = \sqrt{F/\mu}$, där F är spännkraften och μ längddensiteten. Hårdare spänd sträng ger snabbare våg, tyngre sträng långsammare.

1. Vad påverkar våghastigheten?

Bara två storheter kan rimligen spela roll: hur hårt strängen är spänd och hur tung den är per längdenhet. Den senare är längddensiteten

$$\mu = \frac{m}{L}$$

Vi härleder sambandet genom att titta på en puls som just satts i rörelse, där en kraft F_y dragit strängens ände uppåt med hastigheten v_y under tiden t.



Pulsen efter tiden t: handen har lyft änden sträckan $v_y t$ medan fronten hunnit vt. Allt till vänster om fronten rör sig uppåt med v_y, och handens kraft längs strängen har komposanterna F och F_y i samma proportion som triangelns sidor.

Steg 1 – Hur mycket sträng sätts i rörelse?

Under tiden t har störningen hunnit sträckan vt längs strängen. Massan som satts i rörelse är därför

$$m = \mu v t$$

Steg 2 – Kraften förändrar strängens rörelse

Impulsen från den tvärgående kraften är lika med rörelsemängdsändringen:

$$F_y t = m v_y$$

Sätt in massan ovan,

$$m = \mu v t$$

vilket ger

$$F_y t = \mu v t v_y$$

och efter förkortning med t

$$F_y = \mu v v_y$$

Steg 3 – Använd geometrin

Strängen bildar en triangel: den lyfta änden har flyttats $v_y t$ i y-riktningen medan störningen gått vt i x-riktningen. Kraftkomposanterna följer samma proportioner som sidorna:

$$\frac{F_y}{F} = \frac{v_y t}{v t}$$

$$\frac{F_y}{F} = \frac{v_y}{v}$$

$$F_y = F \frac{v_y}{v}$$

Sätt de två uttrycken för F_y lika:

$$\mu v v_y = F \frac{v_y}{v}$$

Nu förkortas v_y bort — hastigheten beror alltså inte på hur hårt vi ryckte:

$$\mu v^2 = F$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

Fysika: Fc2a (i formen $v = \sqrt{F/\rho_l}$)

2. Vad sambandet säger

Våghastigheten är en egenskap hos **mediet**, inte hos vågen. Amplitud och frekvens saknas i uttrycket, så en kraftig och en svag puls går lika fort på samma sträng.

Spänner vi strängen hårdare växer F och vågen går snabbare; byter vi till en grövre sträng växer μ och vågen går långsammare. Det är den mekanismen som stämmer en gitarr, och som ger modernas frekvenser.

Läsning

- 15.4 Speed of a Transverse Wave

Se även

- Längddensitet
- Fashastighet och partikelhastighet
- Energi och effekt i en harmonisk våg
- Stående våg
- Svängningsmoder

Resurser

- Wikipedia: Vibrating string

Längddensitet

19 okt. 2026, 1 min läsning

UTKAST

#fysik #vågrörelselära #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Vågrörelse

Längddensiteten μ är massa per längdenhet. Det är den materialegenskap hos en sträng som, tillsammans med spännkraften, avgör hur snabbt en våg breder ut sig i den.

---

1. Definition

För en homogen sträng med massa M och längd L gäller

$$\boxed{\mu = \frac{M}{L}}$$

Enheten är kg/m och dimensionen ML^{-1}.

---

2. Kopplingen till våghastigheten

Längddensiteten är den ena av de två storheter som bestämmer våghastigheten:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

Fysika: Fc2a (i formen $v = \sqrt{F/\rho_l}$*)*

Vid given spännkraft F ger en tyngre sträng alltså en långsammare våg.

Läsning

- 15.4 Speed of a Transverse Wave

Se även

- Våghastighet på en sträng
- Stående våg
- Svängningsmoder

Resurser

- Wikipedia: Linear density

Energi och effekt i en harmonisk våg

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #vågrörelselära #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Harmonisk våg

En våg transporterar energi längs mediet samtidigt som mediets delar svänger kring sina jämviktslägen. Effekten mäter hur snabbt energin transporteras och växer kvadratiskt med både amplitud och frekvens.

1. Kraften på en punkt på strängen

Den delen av strängen som ligger till vänster om en punkt drar i den delen som ligger till höger. Eftersom strängen är lutande får spännkraften en tvärgående komposant, och lutningen är just $\partial y/\partial x$:

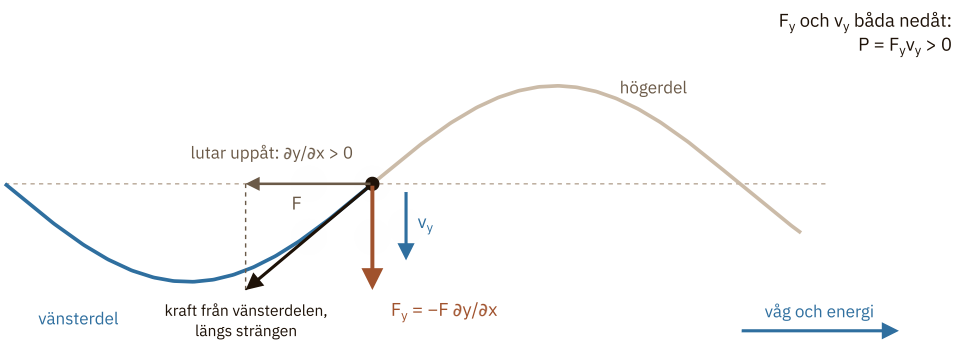
$$\frac{F_y}{F} = -\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

$$F_y = -F\,\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}.$$

Minustecknet gör riktningen rätt: när strängen lutar uppåt,

$$\frac{\partial y}{\partial x} > 0$$

drar vänsterdelen nedåt.



Vänsterdelen drar i punkten x längs strängens tangent. Där strängen lutar uppåt pekar den tvärgående komposanten $F_y = -F\,\partial y/\partial x$ nedåt, och i en högergående våg rör sig punkten också nedåt — produkten $P = F_y v_y$ blir positiv och energin flödar åt höger.

---

2. Från arbete till effekt

Kraften uträttar arbete när angreppspunkten rör sig:

$$W = F_y \Delta y$$

Dividerar vi med tiden får vi medeleffekten över intervallet,

$$P_{av} = \frac{F_y \Delta y}{\Delta t} = F_y v_{av}$$

och i gränsen den momentana effekten

$$P(x,t) = F_y(x,t) v_y(x,t)$$

Här är hastigheten hos punkten partikelhastigheten

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

och kraften

$$F_y = -F \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

Tillsammans:

$$P(x,t) = -F \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

Effekten är alltså en produkt av lutning och tvärhastighet.

---

3. Effekt för en harmonisk våg

Sätt in vågfunktionen

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \alpha)$$

och derivera i var sin variabel:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = kA \cos(kx - \omega t + \alpha)$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t + \alpha)$$

Produkten av två negativa faktorer ger ett positivt resultat, så effekten är aldrig negativ:

$$P(x,t) = F\,k\omega A^2\cos^2(kx - \omega t + \alpha)$$

---

4. Energiflödet genom ett litet strängsegment

Effekten varierar längs strängen, så in- och utflödet genom ett kort segment behöver inte vara lika. Är

$$P_{\text{in}} > P_{\text{ut}}$$

lagras energi i segmentet, och är

$$P_{\text{in}} < P_{\text{ut}}$$

töms det på energi. Över en hel period tar de två fallen ut varandra — segmentet vidarebefordrar i genomsnitt all energi det tar emot.

---

5. Medeleffekt

Skriv om uttrycket med hjälp av

$$v = \frac{\omega}{k}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

vilket ger

$$P(x,t) = \sqrt{F\mu}\,\omega^2 A^2\cos^2(kx - \omega t + \alpha)$$

Medelvärdet av $\cos^2$ över en period är $\frac{1}{2}$, alltså

$$\boxed{P_{av} = \frac{1}{2}\sqrt{F\mu}\,\omega^2 A^2}$$

---

6. Vad sambandet säger

Två proportionaliteter är värda att minnas:

$$P_{\text{av}} \propto A^2$$

$$P_{\text{av}} \propto \omega^2$$

Fördubblad amplitud ger fyra gånger effekten, och detsamma gäller fördubblad frekvens. Beroendet på mediet ligger i faktorn $\sqrt{F\mu}$: en hårt spänd och tung sträng bär mer effekt vid samma utslag.

Läsning

- 15.5 Energy in Wave Motion

Se även

- Harmonisk våg
- Fashastighet och partikelhastighet
- Våghastighet på en sträng
- Längddensitet
- Ljudintensitet och ljudnivå

Resurser

- Wikipedia: Wave power

Superposition av vågor

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #vågrörelselära #princip

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Vågrörelse

När två vågor befinner sig i samma medium samtidigt ersätter de inte varandra — utslagen adderas punkt för punkt. Superpositionsprincipen är grunden för interferens, stående vågor och svävning.

---

1. Superpositionsprincipen

Det sammanlagda utslaget i varje punkt och varje tidpunkt är summan av de enskilda vågornas utslag:

$$\boxed{y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)}$$

Fysika: Fc1a

Additionen sker med tecken, vilket är hela poängen. Möts en topp på $2\ \text{cm}$

$$y_1 = 2\text{cm}$$

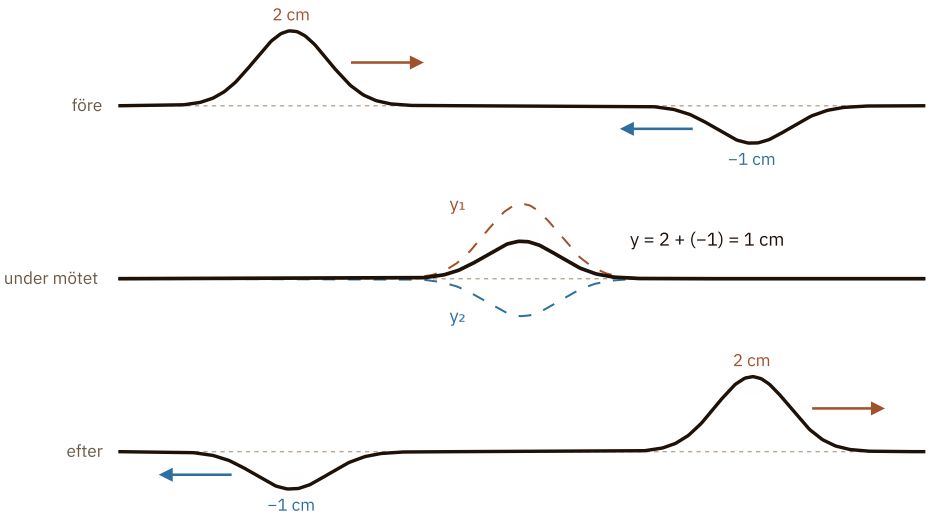
och en dal på $1\ \text{cm}$

$$y_2 = -1\text{cm}$$

blir resultatet

$$y = 1\text{cm}$$

Vågorna passerar sedan genom varandra och fortsätter oförändrade — superpositionen är tillfällig och ingen av vågorna tar skada av mötet.



En topp på $2\ \text{cm}$ *och en dal på* $1\ \text{cm}$ *före, under och efter mötet. Under mötet är utslaget summan* $2 + (-1) = 1\ \text{cm}$ *(heldragen); efteråt fortsätter båda pulserna som om ingenting hänt.*

---

2. Varför principen gäller, och vad den ger

Superposition gäller så länge mediet svarar linjärt på störningen, alltså för tillräckligt små utslag. Det är den förutsättning som all vidare vågfysik vilar på.

Tre fall följer direkt: interferens när vågorna har samma frekvens och en fast fasskillnad, stående vågor när två identiska vågor går mot varandra, och svävning när frekvenserna skiljer sig något. Även reflektion hanteras med superposition, genom att lägga ihop den infallande vågen med den reflekterade.

Läsning

- 15.6 Wave Interference, Boundary Conditions, and Superposition

Se även

- Vågrörelse
- Reflektion av vågor
- Stående våg
- Interferens
- Svävning

Resurser

- Wikipedia: Superposition principle

Reflektion av vågor

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #vågrörelselära #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Vågrörelse, Superposition av vågor

---

När en våg når mediets slut kan den inte fortsätta, utan reflekteras. Vid en fast ände vänds utslaget, vilket motsvarar ett fasskifte på π; vid en fri ände reflekteras vågen med bibehållet tecken.

---

1. Fast ände

Är strängens ände fastspänd kan den inte röra sig, så randvillkoret är att utslaget där alltid är noll:

$$y = 0$$

Enligt superpositionsprincipen är utslaget i änden summan av den infallande och den reflekterade vågen, vilket kräver

$$y_{\text{in}} + y_{\text{ref}} = 0$$

Den reflekterade vågen måste alltså vara den infallande med omvänt tecken. En puls som kommer uppåt returneras nedåt — det är fasskiftet π.

---

2. Fri ände

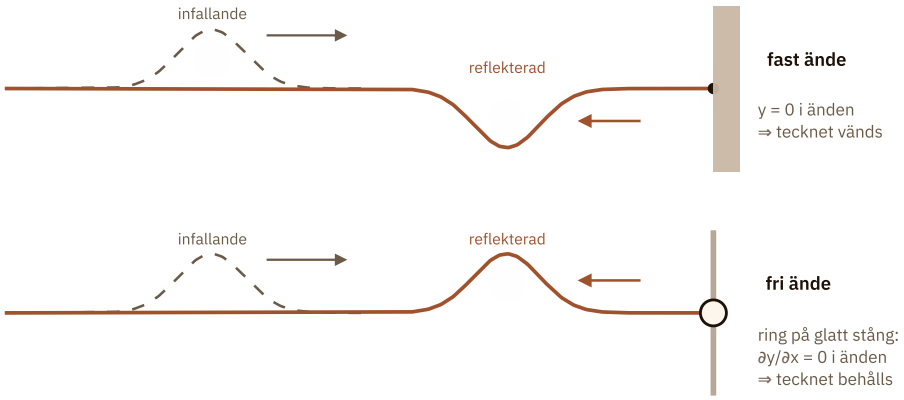
Är änden fri att röra sig i tvärriktningen gäller inte längre

$$y = 0$$

Istället kan änden inte bära någon tvärgående kraft, och eftersom kraften är proportionell mot lutningen blir randvillkoret

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Vågen reflekteras då med bibehållet tecken: en puls uppåt kommer tillbaka uppåt, och änden slår ut till dubbel amplitud när de två vågorna möts där.



Överst en fastspänd ände: utslaget där måste vara noll, så pulsen kommer tillbaka upp och ner. Nederst en ring som glider fritt på en stång: änden kan inte bära någon tvärkraft, och pulsen kommer tillbaka med samma tecken.

---

3. Varför vågen måste reflekteras

Bakom båda fallen ligger energin. Vid änden finns ingenting som kan ta emot den energi vågen bär, och den kan inte försvinna. Effekten som kommer in måste därför lämna igen, fast i motsatt riktning:

$$P_{\text{in}}(t) = -P_{\text{ref}}(t)$$

Reflektionen är alltså inte ett val — den är den enda utgången som är förenlig med energibevarande. Att den reflekterade vågen sedan överlagras på den infallande är precis det som ger ståendе vågor.

Läsning

- 15.6 Wave Interference, Boundary Conditions, and Superposition

Se även

- Superposition av vågor
- Stående våg
- Svängningsmoder
- Vågrörelse
- Energi och effekt i en harmonisk våg

Resurser

- Wikipedia: Reflection of waves

Stående våg

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #vågrörelselära #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Superposition av vågor, Reflektion av vågor

---

En stående våg uppstår när två identiska vågor rör sig mot varandra i samma medium. Mönstret förflyttar sig inte i rummet — istället svänger hela mediet i takt, med punkter som står helt still och punkter som svänger maximalt.

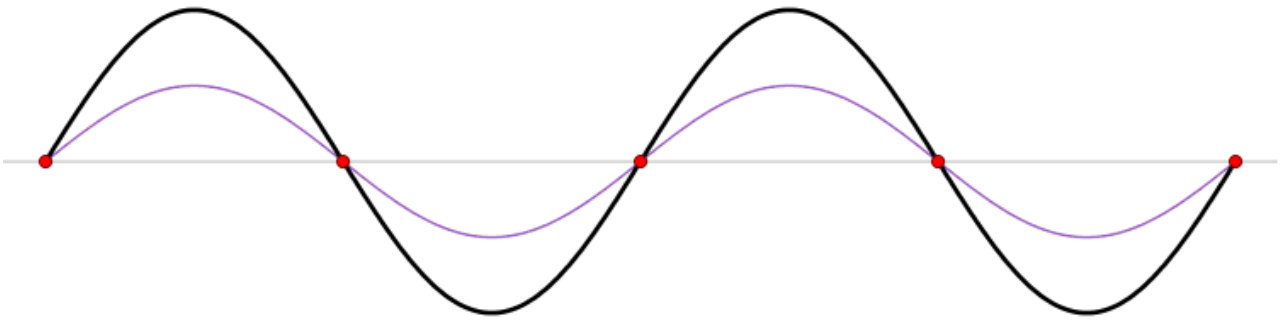
---

1. Vad kännetecknar en stående våg?

Alla punkter når jämviktsläge samtidigt, alla punkter når sin vändpunkt samtidigt. Vågens komponenter är:

- **Nodpunkter** — punkter som inte lämnar jämviktsläget (markerade med rött i gif nedan)
- **Buk** — punkterna som når maximalt utslag i vågen. Mitt emellan nodpunkterna

En stående våg bildas genom att kombinera 2 vågor som propagerar i motgående riktningar med samma egenskaper.



---

2. Härledning ur superposition

De två motgående vågorna är

$y_1 = A\sin(kx - \omega t)$

$y_2 = A\sin(kx + \omega t)$

Vi adderar dem på komplex form. Med Eulers identiteter

$\sin\beta = \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i}$

$\cos\beta = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2}$

blir summan

$y_1 + y_2 = A\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\,[e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}]$

Den första faktorn är $\sin(kx)$ och den andra $2\cos(\omega t)$, alltså

$$\boxed{y = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)}$$ *Fysika: Fc1a (i formen $s = f(x)\cdot g(t)$)*

Läget och tiden har separerat. Rumsberoendet $\sin(kx)$ sätter mönstret en gång för alla; tidsberoendet $\cos(\omega t)$ ändrar bara den gemensamma amplituden. Ingenting vandrar.

---

3. Noder och bukar

Ur rumsfaktorn läses de två specialfallen av direkt:

nod: $\sin(kx) = 0$ buk: $\sin(kx) = \pm 1$

Var mönstret hamnar beror på randvillkoret. Har vi en nod i origo får vi sinusformen, har vi en buk där får vi cosinusformen:

nod i $x = 0$: $x = 0 \implies y(x,t) = f(\omega t)\cdot\sin(kx)$ buk i $x = 0$: $x = 0 \implies y(x,t) = f(\omega t)\cdot\cos(kx)$

Nod sker på grund av destruktiv interferens och buk på grund av konstruktiv.

---

4. Var noderna och bukarna ligger

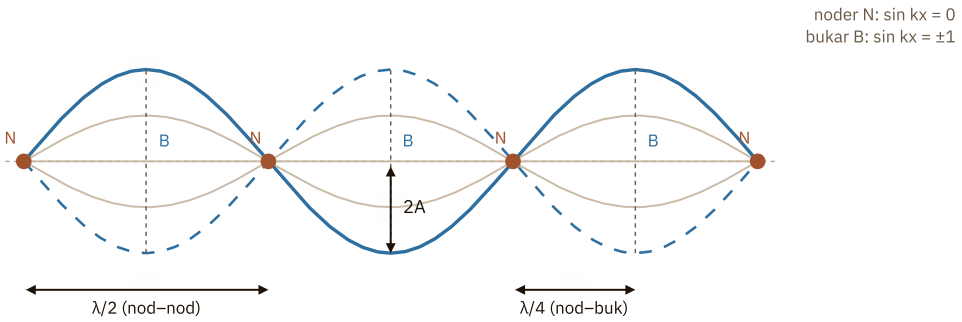
Utgå från

$y = f(\omega t)\sin(kx)$

Nollställena i $\sin(kx)$ ger noderna och maximipunkterna ger bukarna. Med $k = 2\pi/\lambda$ blir avstånden

nod: $kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}$ buk: $kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}$

Noderna ligger alltså en halv våglängd från varandra, och bukarna mitt emellan dem.

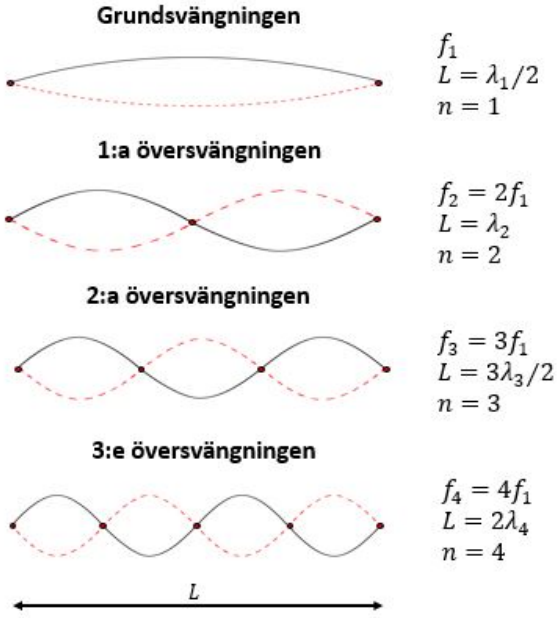


Ögonblicksbilder av $y = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$. Noderna N står still och ligger $\lambda/2$ isär; bukarna B ligger mitt emellan, $\lambda/4$ från närmaste nod, och svänger mellan $+2A$ och $-2A$.

---

5. Sträng fäst i båda ändar

Om vi har en sträng med längd l fäst i bägge ändpunkter måste det vara nod i båda ändarna. Bara ett diskret antal våglängder passar då in. Vi kallar dessa "grundsvängningar" för "mod": mod $n = 1$ är grundsvängningen och de högre moderna kallas översvängningar.



Frekvensen för mod n följer av att våghastigheten är $v = \lambda f$ och att $v = \sqrt{F/\mu}$ på en sträng:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Villkoret och modernas frekvenser behandlas i detalj i svängningsmoder.

Läsning

- 15.7 Standing Waves on a String

- 15.8 Normal Modes of a String

Se även

- Svängningsmoder
- Superposition av vågor
- Reflektion av vågor
- Interferens
- Våghastighet på en sträng

Resurser

- Wikipedia: Standing wave

Svängningsmoder

19 okt. 2026, 2 min läsning

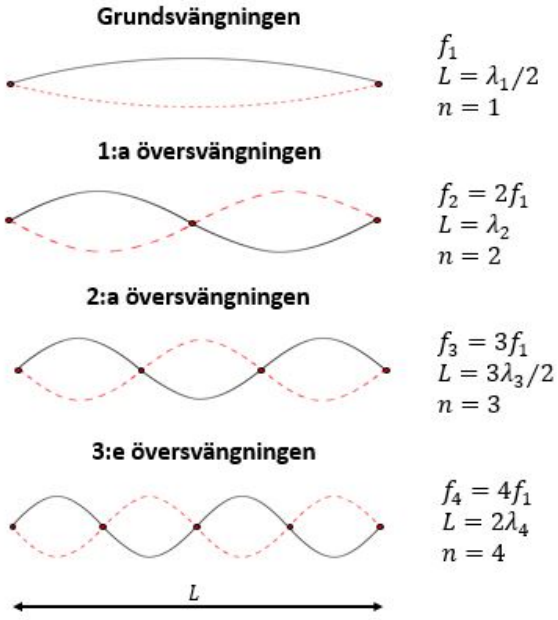
UTKAST

#fysik #vågrörelselära #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Stående våg

En sträng som är fäst i båda ändarna kan bara bära stående vågor med noder i ändpunkterna. Villkoret $L = n\lambda_n/2$ gör att bara ett diskret antal svängningsmoder är möjliga, och deras frekvenser är heltalsmultipler av grundtonen.

1. Vilka våglängder passar in?



Figuren visar de fyra lägsta moderna. Ändpunkterna är fastspända och måste vara noder, så strängens längd måste rymma ett helt antal halva våglängder. Grundsvängningen har en enda buk:

$$L = \frac{\lambda_1}{2}$$

Första översvängningen rymmer två halvor, andra tre:

$$L = 2\frac{\lambda_2}{2}$$

$$L = 3\frac{\lambda_3}{2}$$

Mönstret är alltså

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}$$

och löser vi ut våglängden får vi

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$$

för

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Varje ökning av n lägger till en buk och en nod.

---

2. Vilka frekvenser är möjliga?

Våglängd och frekvens hänger ihop via våghastigheten:

$$v = \lambda f$$

Fysika: Fc1 (i formen $v = f \cdot \lambda$)

Sätt in de tillåtna våglängderna:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} \Rightarrow f_n = \frac{nv}{2L}$$

På en sträng är hastigheten bestämd av spännkraft och längddensitet,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Fysika: Fc2a (i formen $v = \sqrt{F/\rho_l}$, med ρ_l för längddensiteten)

vilket ger modernas frekvenser direkt ur strängens egenskaper:

$$\boxed{f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

---

3. Övertonerna är heltalsmultipler

Uttrycket

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

är linjärt i n, så alla moder är heltalsmultipler av den lägsta:

$$f_n = nf_1$$

Det är därför en sträng klingar som en ton och inte som ett brus. Örat uppfattar grundtonen f_1 som tonhöjden, medan styrkefördelningen mellan översvängningarna avgör klangfärgen.

---

4. Tillbaka till gitarren

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Uttrycket är hela gitarrens konstruktion i en rad. Tre sätt att ändra tonhöjden syns direkt:

- **Stämskruven** ändrar spännkraften F — hårdare spänt ger högre ton.
- **Greppbandet** kortar den svängande längden L — kortare sträng ger högre ton.
- **Strängvalet** ändrar längddensiteten μ — grövre sträng ger djupare ton.

Beroendet är dessutom svagare för kraften än för längden, eftersom F står under rottecken medan L inte gör det.

Läsning

- 15.8 Normal Modes of a String
- 15.7 Standing Waves on a String

Se även

- Stående våg
- Våghastighet på en sträng
- Längddensitet
- Superposition av vågor
- Stående vågor i pipor

Resurser

- Wikipedia: String vibration

Ljudvåg

19 okt. 2026, 3 min läsning

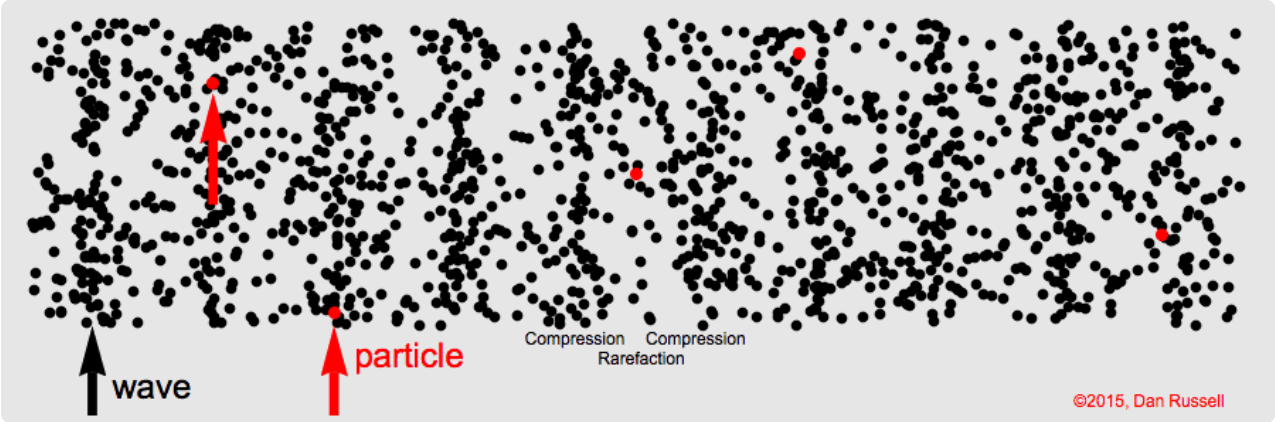
UTKAST

#fysik #akustik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Vågrörelse

Ljud är en longitudinell våg: Propagerar i samma riktning som partiklarnas rörelse

---



1. Hur sprids ljud genom luft?

Skillnaden mot en våg på en sträng ligger i svängningsriktningen. I en transversell våg svänger partiklarna vinkelrätt mot utbredningsriktningen; i en longitudinell våg svänger de längs den. Ljud i luft är longitudinellt, eftersom en gas inte kan bära någon tvärgående återställande kraft — det enda den kan göra är att pressas ihop och tunnas ut.

Storheten vi räknar på är därför partiklarnas förskjutning ur jämviktsläget längs utbredningsriktningen:

$$\Delta x(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \alpha)$$

Fysika: Fc1 (i formen $s = a\cos(\omega t \pm kx + \delta)$*)*

Det är alltså inte luftens läge som vandrar, utan mönstret av förtätningar.

---

2. Från förskjutning till tryck

Det vi hör är inte förskjutningen utan tryckvariationen. Ett område är sammanpressat där partiklarna framför ligger närmare än partiklarna bakom, alltså där förskjutningen ändrar sig med läget. Övertrycket är därför proportionellt mot förskjutningens rumsderivata:

$$p(x,t) = -B\frac{\partial \Delta x(x,t)}{\partial x}$$

Proportionalitetskonstanten är bulkmodulen B, som mäter hur trögt mediet är att pressa ihop. Minustecknet gör att positiv förskjutningsgradient — luften glesas ut — ger undertryck.

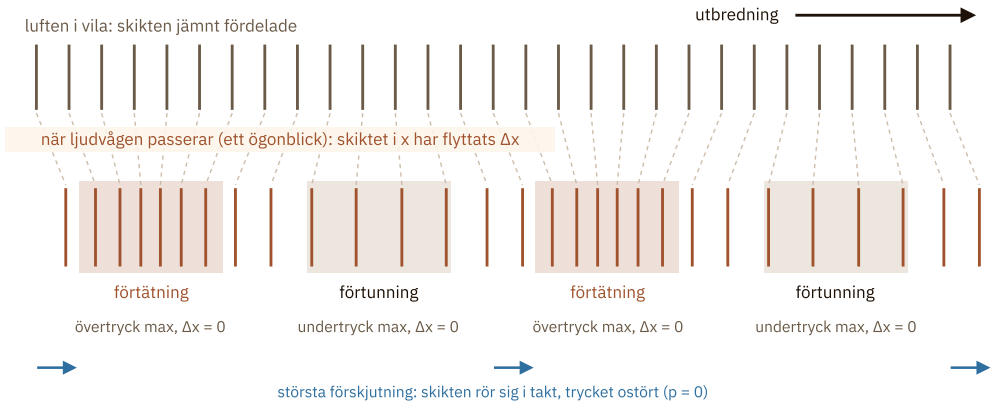
Deriverar vi uttrycket för $\Delta x(x,t)$ och sätter in får vi

$$p(x,t) = BAk\sin(kx - \omega t + \alpha)$$

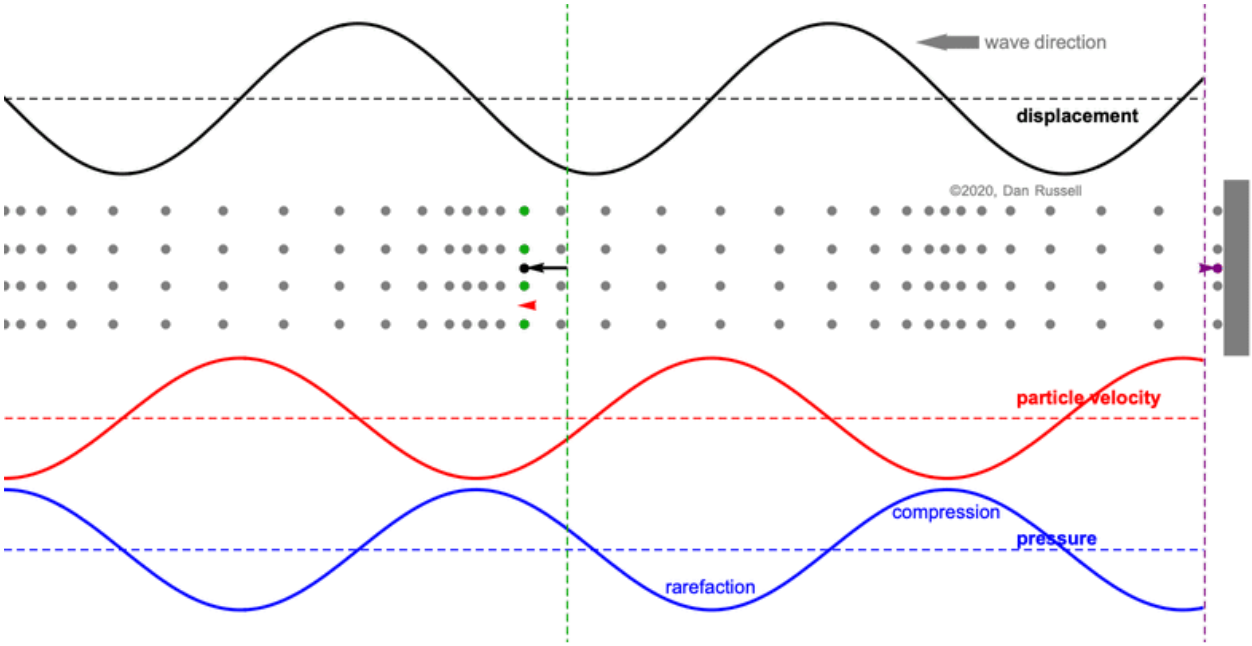
med tryckamplituden

$$p_{max} = BAk$$

Tryckamplituden växer alltså med både förskjutningsamplituden A och vågtalet k: en högfrekvent våg med samma partikelutslag ger kraftigare tryckvariation, eftersom gradienten blir brantare.



Övre raden: luftskikten i vila. Undre raden: samma skikt när vågen passerar, vart och ett flyttat Δx. Där skikten trängs är det förtätning och övertryck, där de glesnar förtunning och undertryck — och just där är $\Delta x = 0$, medan trycket är ostört där förskjutningen är störst.



3. Tryck och förskjutning är ur fas

Förskjutningen följer en cosinus och trycket en sinus med samma argument. De är därmed förskjutna

$$\frac{\pi}{2}$$

mot varandra — ett kvarts varv. Det betyder att de två mönstren har sina extremvärden på olika ställen:

- Där förskjutningen är **maximal** rör sig hela området i takt, gradienten är noll, och tryckvariationen försvinner.
- Där förskjutningen är **noll** är gradienten brantast, och tryckvariationen är maximal.

Tryckets storlek styrs alltså av

$$\left|\frac{\partial \Delta x}{\partial x}\right|$$

och inte av förskjutningen i sig. Det är därför en förskjutningsnod är en tryckbuk och omvänt — den observationen är hela grunden för randvillkoren i pipor.

Läsning

- 16.1 Sound Waves
- 15.1 Types of Mechanical Waves

Se även

- Vågrörelse
- Bulkmodulen

- Ljudets hastighet
- Ljudintensitet och ljudnivå
- Stående vågor i pipor

Resurser

- Wikipedia: Sound

Ljudets hastighet

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #akustik #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Ljudvåg, Våghastighet på en sträng

---

Ljudhastigheten bestäms av mediet, inte av ljudet, och följer samma mönster som för en sträng: en återställande storhet i täljaren och en tröghetsstorhet i nämnaren. I fasta ämnen ger det $v = \sqrt{E/\rho}$ och i vätskor och gaser $v = \sqrt{B/\rho}$.

---

1. Vad bestämmer ljudets hastighet?

Jämförelse med en våg på en sträng

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Fysika: Fc2a (i formen $v = \sqrt{F/\rho_l}$, med ρ_l för längddensiteten) Där:

- F är kraften i strängen
- μ är Längddensitet

Ljud i fasta ämnen

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Fysika: Fc2a (longitudinella vågor i fast kropp) Där:

- E är E-modulen
- ρ är densitet

Ljud i vätskor och gaser

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Fysika: Fc2a (longitudinella vågor i vätska och gas) Där:

- B är Bulkmodulen
- ρ är densitet

Ljud i en ideal gas

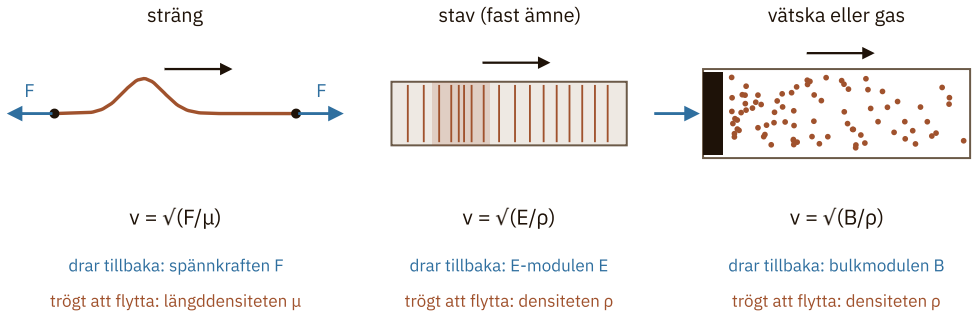
$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Fysika: Fc2a (i formen $v = \sqrt{(c_p/c_V)RT/M}$*)* Där:

- γ är $\frac{Cp}{C_v}$, läs mer i Ideala gaser
- R är gaskonstanten
- T är tempraturen
- M är molmassa

Sammanfattning

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \qquad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$



v = √(återställande storhet / tröghet) — stelare medium ger snabbare ljud, tyngre ger långsammare

Samma recept i alla tre medierna: en återställande storhet som drar tillbaka det som rubbats (F, E eller B), delad med en tröghet som gör mediet trögt att flytta (μ eller ρ), under ett rottecken.

Kontroll genom Dimensionsanalys $[\sqrt{\frac{E}{\rho}}] = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3}}$

Läsning

- 16.2 Speed of Sound Waves
- 15.4 Speed of a Transverse Wave

Ljudintensitet och ljudnivå

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #akustik #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Ljudvåg, Energi och effekt i en harmonisk våg

---

Intensiteten $I = P/A$ är den effekt som passerar genom en areaenhet. Eftersom örat uppfattar ljudstyrka logaritmiskt anges ljud i praktiken oftast som ljudnivå i decibel, mätt relativt en referensintensitet.

---

1. Vad intensitet är

Intensitet är effekt per area. Skriver vi ut effekten som arbete per tid och delar med arean faller uttrycket ut som en produkt av tryck och hastighet:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{\text{Arbete}}{\text{tid} \times \text{Area}} = \frac{F\,ds}{S\,dt} = pv_p$$

Kraften per areaenhet är övertrycket p, och sträckan per tidsenhet är partikelhastigheten v_p. Enheten blir därmed

$$\mathrm{W/m^2} \Leftrightarrow \frac{J}{s \cdot m^2}$$

Intensitet för ljud mäts alltså i Effekt/Area.

---

2. Intensiteten i en ljudvåg

För en harmonisk ljudvåg kan båda faktorerna räknas ut explicit:

$$I(x,t) = p(x,t)v_p(x,t)$$

Utgå från partiklarnas förskjutning ur jämviktsläget:

$$\Delta x(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \alpha)$$

Övertrycket är proportionellt mot hur sammanpressat mediet är, alltså mot förskjutningens rumsderivata, med bulkmodulen B som proportionalitetskonstant:

$$p(x,t) = BkA\sin(kx - \omega t + \alpha)$$

Partikelhastigheten är tidsderivatan av samma förskjutning:

$$v_p(x,t) = \frac{\partial \Delta x}{\partial t} = \omega A\sin(kx - \omega t + \alpha)$$

Båda är sinusfunktioner med samma argument — tryck och hastighet är i fas — så produkten blir ett kvadrerat sinus:

$$I(x,t) = Bk\omega A^2\sin^2(kx - \omega t + \alpha)$$

Intensiteten är därmed aldrig negativ: energin går alltid i vågens utbredningsriktning.

---

3. Medelintensitet

Medelvärdet av $\sin^2$ över en period är $\frac{1}{2}$, vilket ger

$$I_{\text{med}} = \frac{1}{2}Bk\omega A^2$$

Uttrycket blir mer användbart om vi byter ut bulkmodulen och vågtalet mot mediets hastighet. Ur

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Fysika: Fc2a

följer $B = \rho v^2$, och ur

$$v = \frac{\omega}{k}$$

Fysika: Fc1

följer $k = \omega/v$. Insättning ger

$$\boxed{I_{\text{med}} = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 A^2}$$

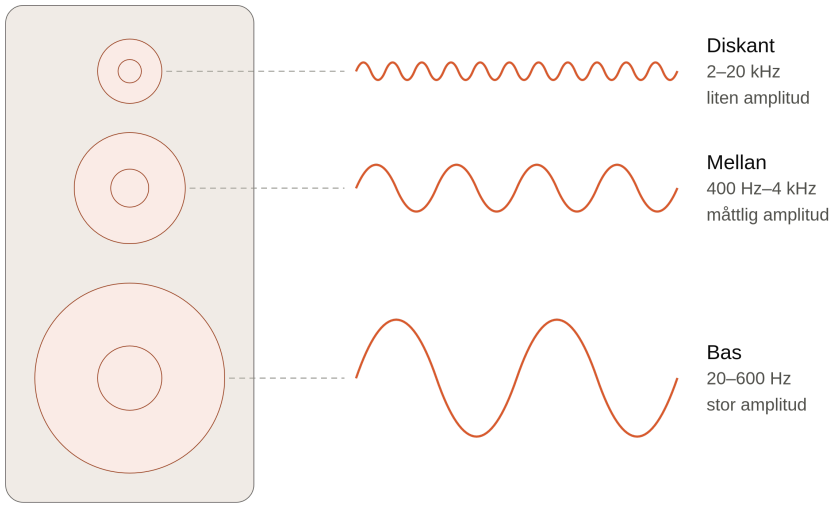
Fysika: Fc2 (i formen $I = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 a^2$)

Nu står bara mediets densitet och ljudhastighet kvar, tillsammans med vågens frekvens och amplitud.

- ρv beskriver materialegenskapen akustisk impedans $Z = \Omega = \rho v$
- $\omega^2 A^2$ beskriver vågegenskaper

Formeln för medelintensitet beskriver bland annat varför högtalare ser ut som de gör.

- Diskantelement (2 kHz - 20 kHz)
- Mellanelement (ca 400 - 4 kHz)
- Baselement (20 Hz upp till cirka 600 Hz)



Samma I_med = ½ρvω²A² ⇒ A ∝ 1/f

Om intensiteten ska bevaras även fast olika frekvenser spelas så måsta amplituden (A) förändras, följande gäller: $A \propto \frac{1}{f}$.så om vi dubblar frekvensen räcker halva amplituden.

---

4. Vad sambandet säger

Två proportionaliteter är värda att minnas:

$$I_{\text{med}} \propto A^2$$

$$I_{\text{med}} \propto \omega^2$$

Fördubblad amplitud ger fyra gånger intensiteten, och detsamma gäller fördubblad frekvens. Det är samma kvadratiska beroende som för effekten i en våg på en sträng.

---

5. Akustisk impedans

Produkten av densitet och ljudhastighet återkommer så ofta att den fått eget namn — den akustiska impedansen:

$$Z = \rho v$$

Fysika: Fc2

Impedansen avgör vad som händer när ljudet möter ett annat medium. Andelen av intensiteten som reflekteras är

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$$

Fysika: Fc2 (reflektion vid vinkelrätt infall)

och intensiteterna delas upp som

$$I_R = RI_0$$

$$I_T = (1 - R)I_0$$

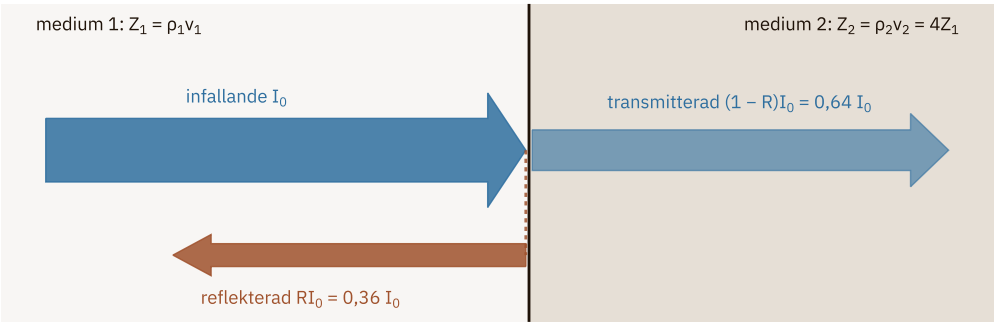
Det avgörande är alltså inte medierna i sig utan *skillnaden* mellan dem. Är impedanserna lika,

$$Z_1 = Z_2$$

blir täljaren noll och därmed

$$R = 0$$

Då passerar allt ljud över utan reflektion, även om de två medierna i övrigt är olika.



$R = ((Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2))^2 = (-3/5)^2 = 0{,}36$

luft → vatten: Z skiljer en faktor ≈ 3600, så R ≈ 0,999 — nästan allt studsar

En ljudvåg mot en gränsyta där impedansen fyrdubblas. Pilarnas bredd visar intensiteten: $R = 0{,}36$ av I_0 studsar tillbaka och resten, $0{,}64\,I_0$, går vidare. Det är skillnaden mellan Z_1 och Z_2 som avgör, inte medierna i sig.

---

6. Ljudnivå och decibelskalan

ljudnivå (ljudintencitetsnivå) innebär samma sak men så fort termen nivå introduceras så använder vi Decibelskalan

Örat uppfattar ljudstyrka logaritmiskt, och det intensitetsområde vi hör täcker tolv tiopotenser. Därför anges ljud som ljudnivå β relativt en fast referens:

$$\boxed{\beta = (10\,\text{dB})\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)}$$

Fysika: Fc2 (i formen $L_I = 10\log(I/I_0)$)

Referensintensiteten är satt vid hörtröskeln:

$$I_0 = 10^{-12}\,\text{W/m}^2$$

Fysika: Fc2

Skalan är relativ, så det är skillnader som är lätta att räkna med. Tiofaldigad intensitet ger alltid samma steg uppåt:

$$\Delta\beta = 10\log_{10}(10) = 10\,\text{dB}$$

Tio gånger starkare ljud är alltså $10\ \text{dB}$ mer, hundra gånger starkare $20\ \text{dB}$ mer.

Läsning

- 16.3 Sound Intensity
- 16.1 Sound Waves

Se även

- Ljudvåg
- Ljudets hastighet
- Energi och effekt i en harmonisk våg
- Reflektion av vågor
- Stående vågor i pipor

Resurser

- Wikipedia: Sound intensity
- Wikipedia: Decibel

Stående vågor i pipor

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #akustik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Stående våg, Ljudvåg

I en luftpelare kan stående ljudvågor bildas på samma sätt som på en sträng, men vågen är longitudinell — det är luftpartiklarnas förskjutning längs pipan som bildar mönstret. Randvillkoren skiljer sig åt: en öppen ände ger buk i förskjutningen, en sluten ände ger nod.

---

1. Förskjutning och tryck

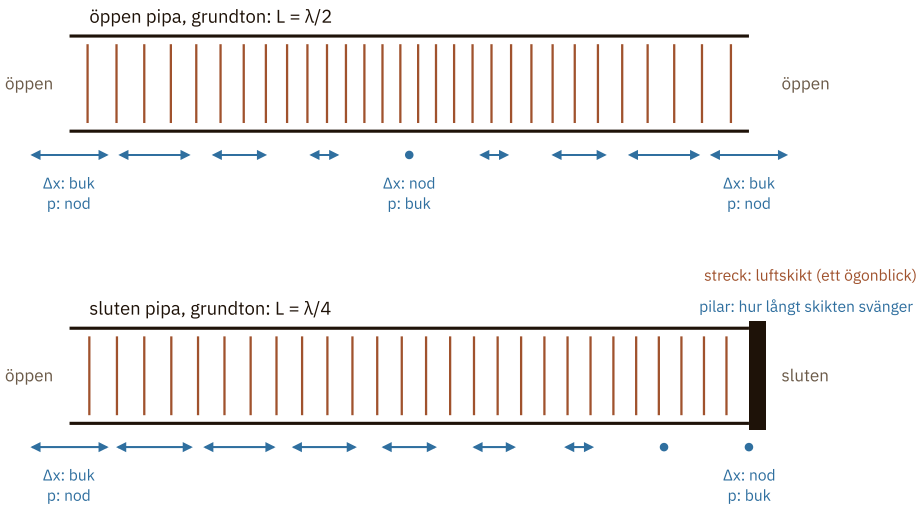
Övertrycket i en ljudvåg är proportionellt mot förskjutningens rumsderivata, med bulkmodulen B som konstant:

$$p(x,t) = -B\frac{\partial \Delta x(x,t)}{\partial x}$$

Eftersom trycket är *derivatan* av förskjutningen är de två mönstren förskjutna ett kvarts varv mot varandra: där förskjutningen har nod har trycket buk, och omvänt. Det är därför randvillkoren måste hållas isär.

- **Sluten ände.** Luften kan inte röra sig genom väggen, så förskjutningen har nod — och trycket buk.
- **Öppen ände.** Trycket måste matcha den omgivande luftens, så trycket har nod — och förskjutningen buk.

Resten av noten räknar på förskjutningen.



Luftskikten i pipan vid grundtonen, i ett ögonblick, och hur långt de svänger (pilarna). Vid en öppen ände svänger luften mest (förskjutningsbuk) medan trycket ligger fast; vid den slutna änden står luften still (förskjutningsnod) medan trycket varierar mest.

---

2. Öppen pipa

Är båda ändarna öppna ska det vara buk i var ände. Precis som för strängen rymmer pipan då ett helt antal halva våglängder:

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Alla heltal är tillåtna. Med

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

Fysika: Fc1 (i formen $v = f \cdot \lambda$)

blir frekvenserna

$$\boxed{f_n = \frac{nv}{2L}}$$

Här är v ljudhastigheten i luften, inte någon egenskap hos pipan — en varmare pipa klingar högre utan att ha ändrat form.

3. Sluten pipa

Är ena änden stängd krävs nod där och buk i den öppna änden. Kortaste avståndet mellan en nod och en buk är en kvarts våglängd, så grundtonen ger

$$L = \frac{\lambda_1}{4}$$

Nästa möjliga mönster lägger till en halv våglängd i taget:

$$L = \frac{3\lambda_3}{4}$$

$$L = \frac{5\lambda_5}{4}$$

Mönstret blir

$$\boxed{\lambda_n = \frac{4L}{n}}$$

men bara för

$$n = 1, 3, 5, \ldots$$

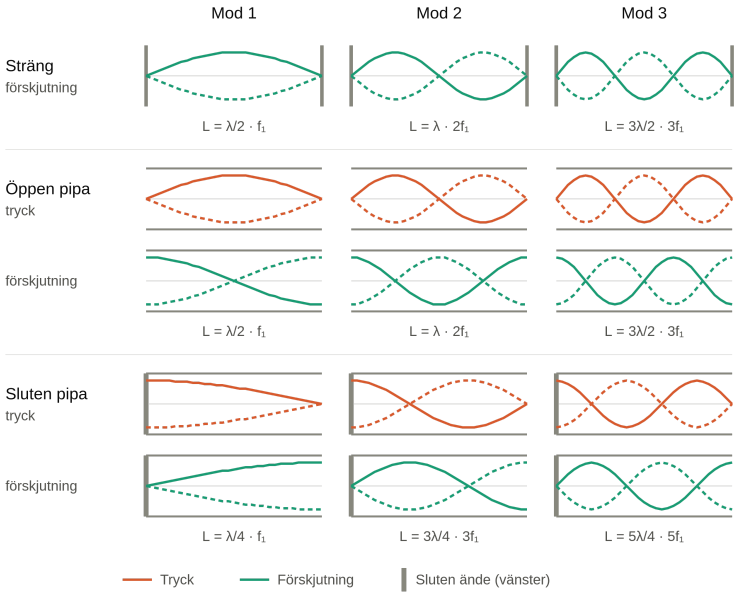
De jämna talen faller bort — de skulle kräva nod eller buk i fel ände. Frekvenserna blir därmed

$$\boxed{f_n = \frac{nv}{4L}}$$

4. Jämförelse

	Öppen pipa	Sluten pipa
Randvillkor	buk–buk	nod–buk
Våglängder	$\lambda_n = \frac{2L}{n}$	$\lambda_n = \frac{4L}{n}$
Frekvenser	$f_n = \frac{nv}{2L}$	$f_n = \frac{nv}{4L}$
Tillåtna n	$1, 2, 3, \ldots$	$1, 3, 5, \ldots$

	Öppen pipa	Sluten pipa



Två skillnader följer direkt ur tabellen. Vid samma längd är den slutna pipans grundton hälften så hög som den öppna pipans, alltså en oktav djupare — en sluten pipa kan göras hälften så lång för samma ton. Och eftersom bara udda n är tillåtna saknar den slutna pipan varannan överton, vilket ger den en tydligt annan klangfärg.

Läsning

- 16.4 Standing Sound Waves and Normal Modes
- 16.5 Resonance and Sound

Se även

- Stående våg
- Svängningsmoder
- Ljudvåg
- Ljudets hastighet
- Ljudintensitet och ljudnivå

Resurser

- Wikipedia: Acoustic resonance

Vågor på komplex form

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #vågrörelselära #metod

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Komplexa tal, Polär form för komplexa tal, Harmonisk våg

---

Vi kan skriva en harmonisk våg som realdelen av ett komplext uttryck, där amplitud och fas ryms i en enda komplex amplitud. Det ändrar ingenting fysikaliskt, men gör att addition av flera vågor blir addition av komplexa tal i stället för trigonometriska omskrivningar.

---

1. Från sinus och cosinus till komplex form

Utgångspunkten är Eulers formel, som knyter den komplexa exponentialfunktionen till de trigonometriska:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

där: $i = \sqrt{-1}$

Byter vi ut vågens sinus mot en exponential får vi

$$y(x,t) = ae^{i(kx-\omega t+\alpha)}$$

som enligt Eulers formel är

$$y(x,t) = a\cos(kx - \omega t + \alpha) + ia\sin(kx - \omega t + \alpha)$$

Den fysikaliska vågen är en av delarna - vi räknar med hela det komplexa uttrycket och plockar ut real- eller imaginärdelen först på slutet.

---

2. Den komplexa amplituden

Vinsten kommer när vi delar upp exponenten. Tidsberoendet står för sig självt:

$$y(x,t) = ae^{i(kx+\alpha)}e^{-i\omega t}$$

Faktorn

$$e^{-i\omega t}$$

är densamma för alla vågor med samma frekvens. Allt som skiljer dem åt samlas i den **komplexa amplituden**

$$A = ae^{i(kx+\alpha)}$$

så att vågen kortare skrivs

$$\boxed{y(x,t) = Ae^{-i\omega t}}$$

Fysika: Fc1 (på komplex form, $S = Ae^{i(\omega t \pm kx)}$ med $A = ae^{i\delta}$)

Den fulla fasen är fortfarande

$$kx - \omega t + \alpha$$

men den del som ligger i A är bara den tidsoberoende resten:

$$\beta = kx + \alpha$$

Amplitudens belopp är den ursprungliga amplituden:

$$|A| = a$$

---

3. Amplituden som vektor

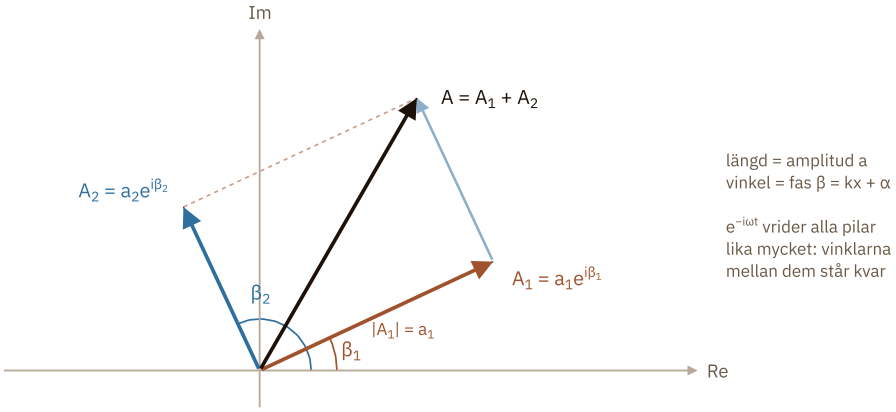
Ett komplext tal har ett belopp och en vinkel, och därmed kan A ritas som en vektor i det komplexa talplanet:

$$\text{amplitud} \longleftrightarrow \text{vektorns längd}$$

$$\text{fas} \longleftrightarrow \text{vektorns vinkel}$$

Längden är $|A| = a$ och vinkeln $\beta = kx + \alpha$. Den bilden utvecklas i fasordiagrammet.

Lägg till bild på komplexa tilplanet där deras indeviduela faser står för vinklarna



Två komplexa amplituder i talplanet: pilens längd är amplituden och vinkeln mot den reella axeln är fasen $\beta = kx + \alpha$. Summan $A = A_1 + A_2$ fås genom att lägga pilarna ände mot ände.

---

4. Varför detta är användbart

Eftersom den gemensamma tidsfaktorn kan brytas ut blir summan av två vågor en summa av deras komplexa amplituder:

$$A = A_1 + A_2$$

Det är hela poängen. Att lägga ihop vågor kräver inga trigonometriska formler — det blir addition av två vektorer, och interferensen går att läsa av geometriskt.

Läsning

- 15.3 Mathematical Description of a Wave

Se även

- Komplexa tal
- Polär form för komplexa tal
- Fasordiagram
- Interferens
- Harmonisk våg

Resurser

- Wikipedia: Phasor

Interferens

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#fysik #vågrörelselära #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Superposition av vågor, Fas och faskonstant

---

När två vågor med samma frekvens möts avgör deras fasskillnad resultatet: i fas ger konstruktiv interferens och förstärkning, i motfas ger destruktiv interferens och utsläckning. Fasskillnaden följer i sin tur ur gångvägsskillnaden enligt $\Delta\delta = k\,\Delta r$.

---

1. Två vågor vid samma punkt

Två källor skickar vågor som når samma punkt efter att ha gått olika långt, r_1 respektive r_2:

$$y_1(t) = a_1 \sin(kr_1 - \omega t + \alpha_1)$$

$$y_2(t) = a_2 \sin(kr_2 - \omega t + \alpha_2)$$

Gångvägen och faskonstanten går alltid ihop till samma sak, så vi samlar dem i en fasterm per våg:

$$\delta_1 = kr_1 + \alpha_1$$

$$\delta_2 = kr_2 + \alpha_2$$

Vågorna blir då rena funktioner av tiden:

$$y_1(t) = a_1 \sin(-\omega t + \delta_1)$$

$$y_2(t) = a_2 \sin(-\omega t + \delta_2)$$

och enligt superpositionsprincipen är resultatet

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Fysika: Fc1a (superpositionsprincipen)

---

2. Använd komplex form

Summan är besvärlig trigonometriskt men enkel på komplex form:

$$y_1 = A_1 e^{-i\omega t} \qquad y_2 = A_2 e^{-i\omega t}$$

med de komplexa amplituderna

$$A_1 = a_1 e^{i\delta_1} \qquad A_2 = a_2 e^{i\delta_2}$$

Eftersom tidsfaktorn

$$e^{-i\omega t}$$

är gemensam kan den brytas ut:

$$y = A_1 e^{-i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

$$y = (A_1 + A_2) e^{-i\omega t}$$

Kvar står en enda addition:

$$\boxed{A = A_1 + A_2}$$

---

3. Från amplitud till intensitet

Det vi mäter är inte amplituden utan intensiteten, och den går som kvadraten:

$$I \propto |A|^2$$

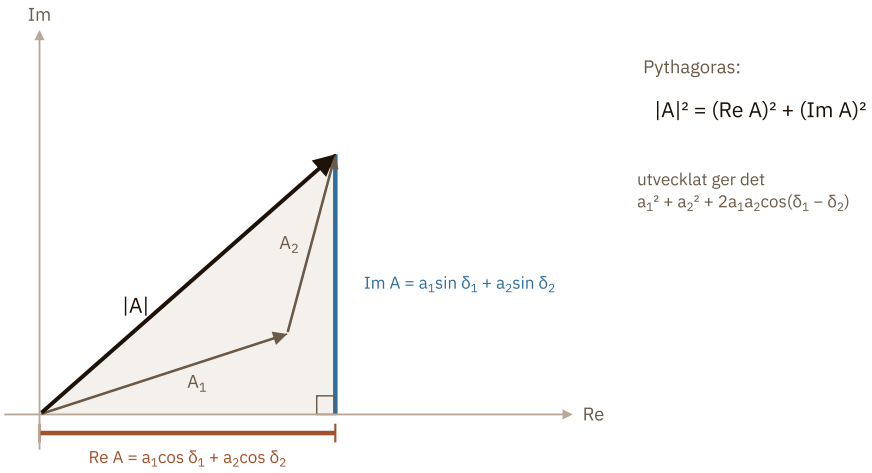
Sätt in summan

$$A = A_1 + A_2$$

vilket ger

$$|A|^2 = |A_1 + A_2|^2$$

Lägg till bild på hur man tar real²+imagenär² för att få A²



A_1 och A_2 ände mot ände ger resultanten A. Real- och imaginärdelen är kateterna i en rätvinklig triangel, så $|A|^2 = (\mathrm{Re}\,A)^2 + (\mathrm{Im}\,A)^2$.

Skriv ut de två amplituderna i polär form,

$$A_1 = a_1 e^{i\delta_1} \qquad A_2 = a_2 e^{i\delta_2}$$

och utveckla kvadraten:

$$|A|^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\delta_1 - \delta_2)$$

Fysika: Fc1a (i formen $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\Delta\varphi$)

Uttryckt i intensiteter blir det

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\delta_1 - \delta_2)}$$

Fysika: Fc4a (med $\Delta\varphi$ för fasskillnaden)

Den sista termen är **interferenstermen**, och den beror bara på fasskillnaden

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2$$

Utan den hade intensiteterna bara adderats.

---

4. Konstruktiv och destruktiv interferens

Interferenstermen styrs helt av cosinus, så ytterlägena inträffar när fasskillnaden är en hel eller en halv period. Full förstärkning fås vid

$$\Delta\delta = p \cdot 2\pi \qquad p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

eftersom då

$$\cos(\Delta\delta) = 1$$

Full utsläckning fås vid

$$\Delta\delta = (2p + 1)\pi$$

då

$$\cos(\Delta\delta) = -1$$

Effekten är dramatisk när de två vågorna är lika starka:

$$I_1 = I_2 = I_0$$

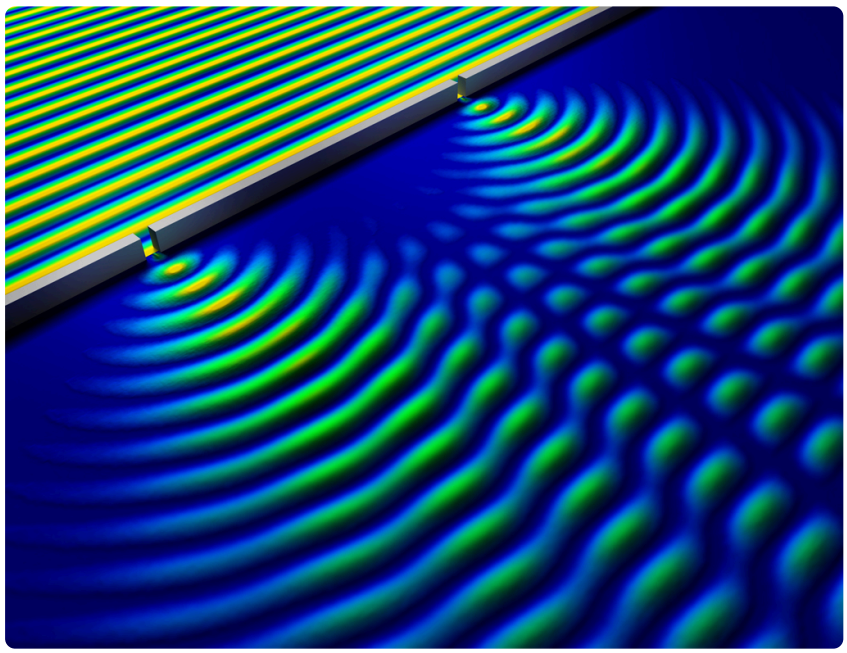
Vid konstruktiv interferens blir intensiteten fyrdubblad, inte fördubblad,

$$I = I_0 + I_0 + 2I_0 = 4I_0$$

och vid destruktiv interferens försvinner ljuset helt:

$$I = I_0 + I_0 - 2I_0 = 0$$

Energin är inte borta — den har omfördelats till de punkter där interferensen är konstruktiv.



5. Gångvägsskillnad och våglängd

Villkoren ovan är skrivna i fas, men det som går att mäta upp i ett rum är avstånd. Sänder två källor ut ljud **i fas** är faskonstanterna lika, $\alpha_1 = \alpha_2$, och de faller bort ur fasskillnaden:

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = k(r_1 - r_2)$$

Kvar står bara **gångvägsskillnaden** — skillnaden i sträcka från de två källorna fram till mätpunkten:

$$\Delta r = |r_1 - r_2|$$

Beloppet räcker eftersom cosinus är jämn och interferenstermen därför inte bryr sig om tecknet. Med vågtalet $k = 2\pi/\lambda$ blir kopplingen mellan sträcka och fas

$$\Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta r$$

En hel våglängds gångvägsskillnad motsvarar alltså ett helt varvs fasskillnad. Villkoret $\Delta\delta = p \cdot 2\pi$ för konstruktiv interferens blir därmed

$$\boxed{\Delta r = p\lambda} \qquad p = 0, 1, 2, \ldots$$

och villkoret $\Delta\delta = (2p + 1)\pi$ för destruktiv interferens blir

$$\boxed{\Delta r = (p + \frac{1}{2})\,\lambda}$$

Våglängden fås i sin tur ur ljudhastigheten och frekvensen:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Fysika: Fc1 (i formen $v = f \cdot \lambda$)

---

6. Beteckningar och enheter

Noten drar in storheter från både vågbeskrivningen och intensitetsräkningen, och de är lätta att blanda ihop. Tabellen samlar dem i den ordning de dyker upp ovan.

Beteckning	Storhet	Enhet
y, y_1, y_2	Utslag — vågens momentana förskjutning	m
a_1, a_2	Amplitud — utslagets maxvärde	m
A, A_1, A_2	Komplex amplitud — amplitud och fas i ett tal	m
t	Tid	s
ω	Vinkelfrekvens	rad/s
f	Frekvens	$\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$
λ	Våglängd	m

Beteckning	Storhet	Enhet
$k = 2\pi/\lambda$	Vågtal — fasändring per längdenhet	rad/m
v	Våghastighet (här ljudhastigheten)	m/s
$r_1,\ r_2$	Gångväg — sträcka från källa till mätpunkt	m
Δr	Gångvägsskillnad	m
$\alpha_1,\ \alpha_2$	Faskonstant — källans fas vid $t = 0$	rad
$\delta_1,\ \delta_2$	Fas i mätpunkten, $\delta = kr + \alpha$	rad
$\Delta\delta$	Fasskillnad mellan vågorna	rad
$I,\ I_1,\ I_2$	Intensitet — effekt per area	$\mathrm{W/m^2}$
I_0	Intensiteten från en ensam källa	$\mathrm{W/m^2}$
p	Ordningstal — hur många hela våglängder Δr motsvarar	dimensionslöst heltal

Utslag, amplitud och komplex amplitud delar alltid enhet: meter för en mekanisk våg, men en annan enhet för andra vågtyper. Radianen är dimensionslös, så $k\,\Delta r$ blir korrekt en ren fasvinkel.

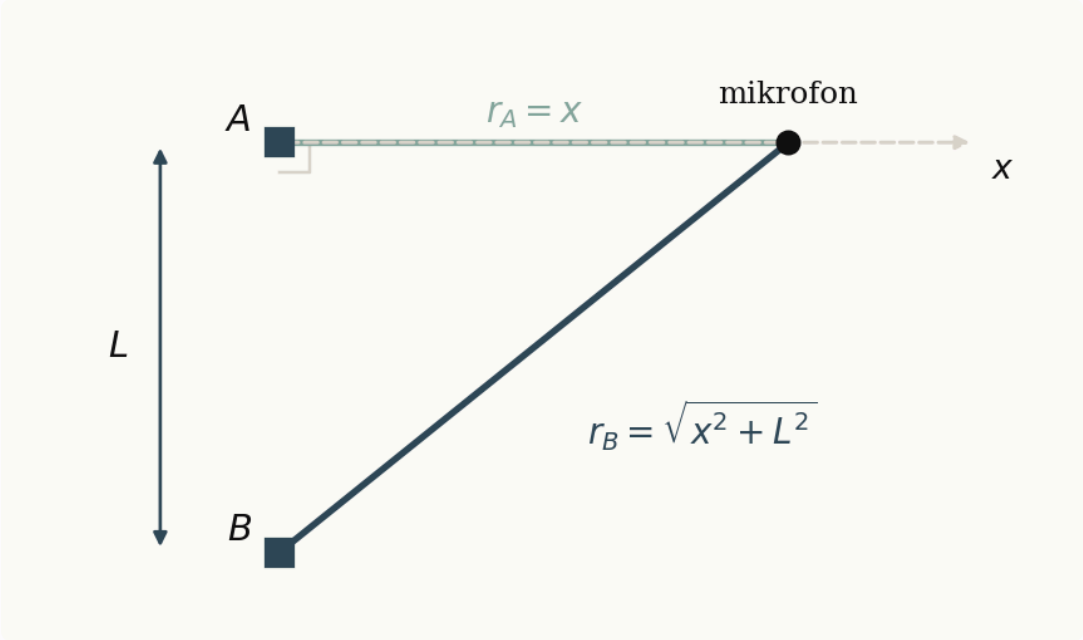
Räkneexemplen lägger till tre rent geometriska beteckningar:

Beteckning	Storhet	Enhet
L	Avstånd mellan högtalarna	m
x	Mikrofonens läge längs axeln från A	m
$r_A,\ r_B$	Avstånd från mikrofonen till respektive högtalare	m

7. Räkneexempel

Exempel 1 — Hur långt ska mikrofonen föras?

Två högtalare A och B sänder ut ljud i fas vid frekvensen $f = 938$ Hz. Avståndet mellan högtalarna är $L = 2{,}06$ m. Hur långt ska en mikrofon föras från högtalare A längs x-axeln för att registrera interferensmax **4 gånger**? Ljudets hastighet är $v = 340$ m/s, och svaret ska anges i meter.



Lösning

Steg 1: våglängden.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{938} = 0{,}3625 \text{ m}$$

Steg 2: gångvägsskillnaden som funktion av x.

Mikrofonen står i punkten x på axeln genom A, och sträckan AB är vinkelrät mot den axeln. Avståndet till A är alltså x självt, medan avståndet till B ges av Pythagoras sats:

$$r_A = x \qquad r_B = \sqrt{x^2 + L^2}$$

$$\Delta r = r_B - r_A = \sqrt{x^2 + L^2} - x$$

Steg 3: vilket ordningstal p hör till det fjärde maximet?

Vid $x = 0$, alltså intill högtalare A, är gångvägsskillnaden hela avståndet mellan högtalarna:

$$\Delta r(0) = L = 2{,}06 \text{ m} \quad \Longrightarrow \quad \frac{L}{\lambda} = \frac{2{,}06}{0{,}3625} = 5{,}68$$

När mikrofonen förs bort blir de båda avstånden mer och mer lika, så Δr avtar strängt från L mot noll. Varje heltalsmultipel $p\lambda$ som ryms under L passeras därför exakt en gång, och de kommer i fallande ordning:

$$p = 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$$

Det fjärde maximet mikrofonen registrerar svarar alltså mot $p = 2$.

Steg 4: lös ut x ur maximivillkoret.

$$\sqrt{x^2 + L^2} - x = p\lambda$$

Flytta över x och kvadrera:

$$x^2 + L^2 = x^2 + 2p\lambda x + p^2\lambda^2$$

Termerna x^2 tar ut varandra, vilket gör ekvationen linjär i x:

$$x = \frac{L^2 - p^2\lambda^2}{2p\lambda}$$

Steg 5: sätt in siffrorna med $p = 2$.

$$p\lambda = 2 \cdot 0{,}3625 = 0{,}7249 \text{ m}$$

$$x = \frac{2{,}06^2 - 0{,}7249^2}{2 \cdot 0{,}7249} = \frac{4{,}2436 - 0{,}5255}{1{,}4499} = 2{,}564$$

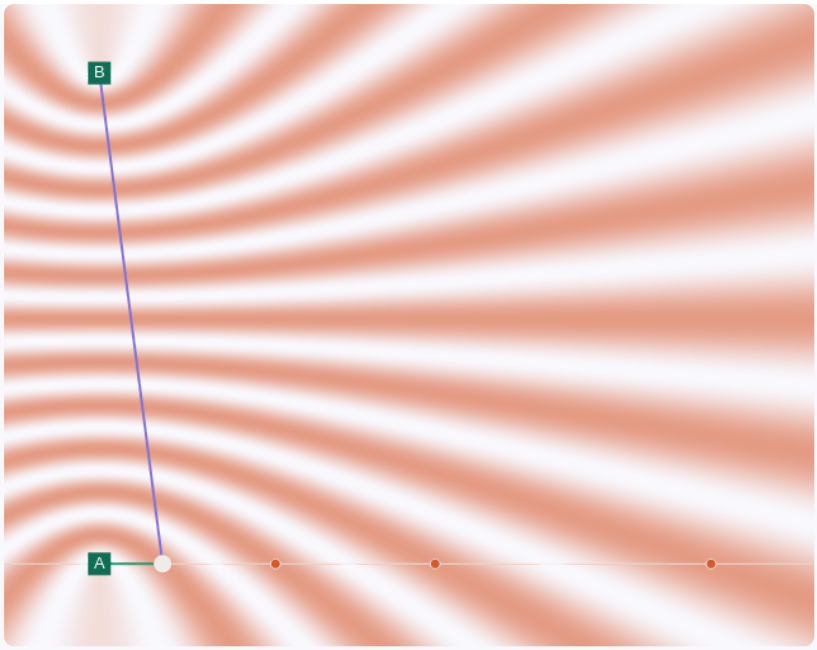
$$\boxed{x \approx 2{,}56 \text{ m}}$$

Rimlighetskoll. Sätt tillbaka svaret i gångvägsskillnaden:

$$\sqrt{2{,}564^2 + 2{,}06^2} - 2{,}564 = 3{,}289 - 2{,}564 = 0{,}725 \text{ m} = 2\lambda \qquad \checkmark$$

Läget ligger dessutom mellan det tredje maximet ($p = 3$, $x = 1{,}41$ m) och det femte ($p = 1$, $x = 5{,}67$ m), precis som ordningen i steg 3 kräver.

En bild som hjälpte mig förså:



Exempel 2 — Hur många max finns det?

Två högtalare A och B sänder ut ljud i fas vid frekvensen $f = 736$ Hz. Avståndet mellan högtalarna är $L = 3{,}51$ m. Hur många interferensmax kan en mikrofon registrera då den förs från högtalare A längs x-axeln? Ljudhastigheten är $v = 340$ m/s, och mikrofonen kan inte föras oändligt långt bort.

Lösning

Steg 1: våglängden.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{736} = 0{,}4620 \text{ m}$$

Steg 2: samma geometri som i exempel 1.

$$\Delta r = \sqrt{x^2 + L^2} - x$$

Funktionen avtar strängt från $\Delta r(0) = L$ och går mot noll när x växer. Den genomlöper alltså intervallet $0 < \Delta r \leq L$ och antar varje värde där exakt en gång.

Steg 3: räkna ordningstalen.

Ett max kräver $\Delta r = p\lambda$, och ett sådant p ger en lösning om och endast om $p\lambda$ ligger i intervallet ovan:

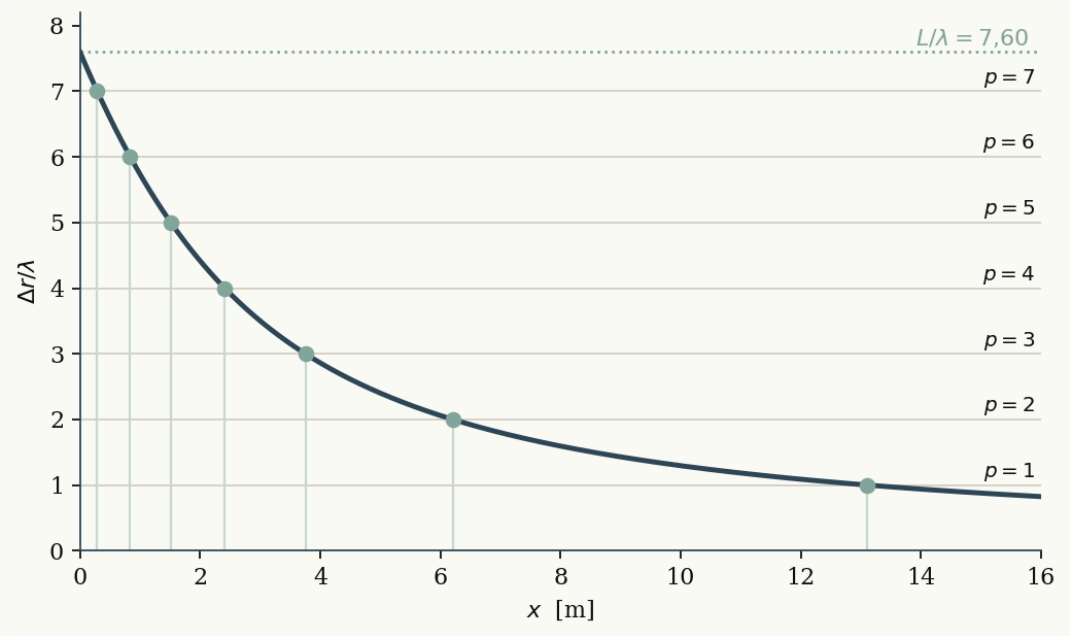
$$0 < p\lambda \le L \qquad \Longleftrightarrow \qquad p \le \frac{L}{\lambda} = \frac{3{,}51}{0{,}4620} = 7{,}60$$

Största tillåtna heltalet är $p = 7$, så ordningstalen $p = 1, 2, \ldots, 7$ ger var sitt max:

$$\boxed{7 \text{ interferensmax}}$$

Steg 4: varför $p = 0$ inte räknas.

Nollte ordningens max kräver $\Delta r = 0$, alltså $r_A = r_B$. Det inträffar först i gränsen $x \to \infty$, och eftersom mikrofonen inte kan föras oändligt långt bort registreras det aldrig.



Kurvan visar $\Delta r/\lambda$: varje gång den passerar ett heltal registrerar mikrofonen ett max. Den startar på $7{,}60$ och kryper mot noll utan att nå dit, vilket är hela argumentet i steg 3 i bildform. Lägg också märke till att maximumen ligger tätt nära högtalaren och glesnar snabbt — det sista, $p = 1$, ligger så långt ut som $13{,}1$ m.

p	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**
x [m]	0,288	0,837	1,512	2,410	3,752

Läsning

- 16.6 Interference of Waves
- 35.1 Interference and Coherent Sources

Se även

- Superposition av vågor
- Vågor på komplex form
- Fasordiagram
- Våglängd och vågtal
- Dubbelspaltexperimentet
- Visibilitet

Resurser

- Wikipedia: Wave interference

Fasordiagram

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #vågrörelselära #metod

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Vågor på komplex form, Vektorer

---

En komplex amplitud kan ritas som en vektor i det komplexa talplanet, med längden lika med amplituden och vinkeln lika med fasen. Att lägga ihop vågor blir då vanlig vektoraddition, vilket ger resulterande amplitud och fas geometriskt.

---

1. Komplexa amplituder som vektorer

Varje våg bidrar med en komplex amplitud

$$A_1 = a_1 e^{i\delta_1} \qquad A_2 = a_2 e^{i\delta_2}$$

och resultatet är summan

$$A = A_1 + A_2$$

Det är en vektoraddition, så den kan göras komposantvis:

$$A_x = a_1 \cos\delta_1 + a_2 \cos\delta_2$$

$$A_y = a_1 \sin\delta_1 + a_2 \sin\delta_2$$

Den resulterande amplituden är vektorns längd:

$$a = |A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Metoden generaliserar direkt till fler än två vågor — man lägger vektorerna ände mot ände.

---

2. Konstruktiv interferens uttryckt i gångvägsskillnad

Ligger de två vågorna i fas pekar vektorerna i samma riktning och längderna adderas rakt. Det inträffar när gångvägsskillnaden är en hel våglängd,

$$\Delta r = \lambda$$

två hela våglängder,

$$\Delta r = 2\lambda$$

och så vidare. Villkoret är alltså

$$\boxed{\Delta r = p\lambda} \qquad p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

---

3. Destruktiv interferens uttryckt i gångvägsskillnad

Är gångvägsskillnaden istället en halv våglängd pekar vektorerna åt motsatta håll:

$$\Delta r = \frac{\lambda}{2}$$

Samma sak gäller för

$$\Delta r = \frac{3\lambda}{2} \qquad \Delta r = \frac{5\lambda}{2}$$

alltså för varje udda multipel av en halv våglängd:

$$\boxed{\Delta r = (2p + 1)\frac{\lambda}{2}} \qquad p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

---

4. Från gångvägsskillnad till fasskillnad

De två villkoren ovan är samma sak som fasvillkoren, eftersom gångväg och fas hänger ihop via vågtalet:

$$\Delta\delta = k\Delta r \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Fysika: Fc1 (vågtalet $k = 2\pi/\lambda$)

En hel våglängds gångvägsskillnad ger ett helt varvs fasskillnad,

$$\Delta\delta = p \cdot 2\pi$$

och en halv våglängd ger ett halvt varv:

$$\Delta\delta = (2p + 1)\pi$$

---

5. Det generella uttrycket för fasskillnaden

Gångvägen är inte den enda källan till fasskillnad. Reflektion mot ett tätare medium lägger till π, och källorna kan ha olika faskonstant från början. Fullt utskrivet blir därför

$$\boxed{\Delta\delta = k\Delta r + m\pi + \Delta\alpha}$$

där m räknar antalet fasskiftande reflektioner och $\Delta\alpha$ är källornas inbyggda fasskillnad. Villkoren

$$\Delta\delta = p \cdot 2\pi \qquad \Delta\delta = (2p+1)\pi$$

gäller fortfarande, men de ska nu tillämpas på hela $\Delta\delta$ och inte bara på $k\Delta r$. Det är den termen $m\pi$ som gör tunna skikt kontraintuitiva.

Erik Olsson: När man kopplar sina högtalare till en förstärkare behöver man göra det i fas. Det spelar inte roll om det är rött till rött, eller svart till svart. Så länge man kopplar samma så att de inte arbetar mot varandra.

---

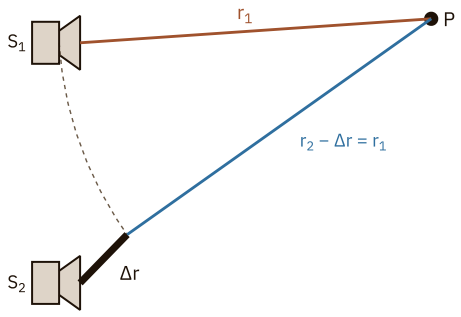
6. Hur vi ritar diagrammet

Vinkeln mellan två vektorer i diagrammet är fasskillnaden, som räknas fram ur gångvägsskillnaden:

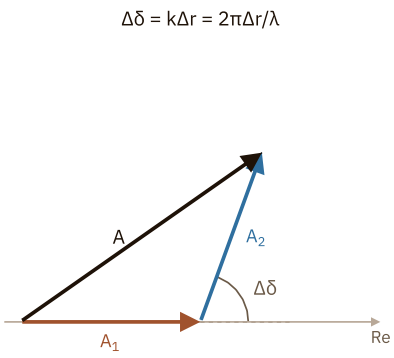
$$\Delta\delta = k\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r$$

Den första vektorn får ligga längs den reella axeln — bara *skillnaderna* i fas spelar roll för beloppet. Sedan läggs nästa vektor i rätt vinkel mot den föregående, och svaret är den resulterande vektorns längd:

$$a = |A|$$



S_2 ligger Δr längre bort:
dess våg kommer en bit senare i sin cykel



$\Delta r = \lambda$: varvet sluts, pilarna i fas
$\Delta r = \lambda/2$: pilarna motriktade

Vänster: mätpunkten P ligger Δr längre från S_2 än från S_1. Höger: därför vrids visaren från S_2 vinkeln $\Delta\delta = 2\pi\Delta r/\lambda$ mot visaren från S_1, och resultantens längd är amplituden i P.

Exempel 1 — en fjärdedels våglängd

$$\Delta r = \frac{\lambda}{4}$$

$$\Delta\delta_{12} = k\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Vektorerna står vinkelrätt mot varandra. Är de lika långa blir resultanten hypotenusan i en likbent rätvinklig triangel:

$$|A| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

Exempel 2 — en halv våglängd

$$\Delta r = \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta\delta_{12} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} = \pi$$

Vektorerna pekar rakt mot varandra, och är de lika långa släcker de ut varandra helt:

$$A = 0$$

Exempel 3 — tre vågor

Med tre källor läggs tre vektorer ände mot ände. En gångvägsskillnad på

$$\frac{\lambda}{8}$$

mellan intilliggande källor ger vinkeln

$$\Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

och på samma sätt ger

$$\frac{\lambda}{4}$$

en vinkel på 90° mellan varje par.

Läsning

- 35.3 Intensity in Interference Patterns

Se även

- Vågor på komplex form
- Interferens
- Vektorer
- Multipelspalt
- Interferens i tunna skikt

Resurser

- Wikipedia: Phasor

Svävning

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #akustik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Interferens

Svävning uppstår när två vågor med nära men olika frekvens interfererar. Summan uppfattas som en ton med medelfrekvensen, vars amplitud varierar långsamt, och svävningsfrekvensen är skillnaden mellan de två ursprungliga frekvenserna.

---

1. Hur ofta upprepas svävningen?

Har de två vågorna olika periodtid glider de långsamt ur fas och tillbaka igen. Mönstret upprepas med svävningsperioden

$$T_{\text{sv}}$$

som är den tid det tar för den snabbare vågen att hinna precis en hel period extra. Ligger frekvenserna så att den ena hinner fem perioder på samma tid som den andra hinner fyra gäller

$$T_{\text{sv}} = 5T_{\text{röd}}$$

$$T_{\text{sv}} = 4T_{\text{blå}}$$

Den ena vågen har då sprungit ett varv ifrån den andra, och samma faskonstellation återkommer.

---

2. Svävningsfrekvensen

Generalisera resonemanget: om svävningsperioden rymmer n perioder av den ena vågen rymmer den $n - 1$ av den andra,

$$T_{\text{sv}} = nT_a \qquad T_{\text{sv}} = (n-1)T_b$$

Sätt uttrycken lika,

$$nT_a = (n-1)T_b$$

och lös ut antalet perioder:

$$n = \frac{T_b}{T_b - T_a}$$

Insatt i den första ekvationen ger det svävningsperioden

$$T_{\text{sv}} = \frac{T_a T_b}{T_b - T_a}$$

Uttryckt i frekvenser förenklas det dramatiskt:

$$f_{\text{sv}} = \frac{1}{T_{\text{sv}}} = \frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_b}$$

$$\boxed{f_{\text{sv}} = f_a - f_b}$$

Fysika: Fc1a (i formen $f_{\text{svävning}} = |f_1 - f_2|$)

Två stämgafflar som skiljer sig med $3\ \text{Hz}$ ger alltså tre svävningar per sekund — det är så man stämmer ett instrument utan mätinstrument.

---

3. Samma resultat med komplexa amplituder

Räkningen blir kortare på komplex form. Ta två vågor med olika vinkelfrekvens:

$$s_1 = ae^{i\omega_1 t} \qquad s_2 = be^{i\omega_2 t}$$

och skriv den andra frekvensen som den första plus en liten skillnad:

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$$

Summan blir

$$s_1 + s_2 = ae^{i\omega_1 t} + be^{i(\omega_1 + \Delta\omega)t}$$

och den gemensamma faktorn kan brytas ut:

$$s_1 + s_2 = e^{i\omega_1 t}\,(a + be^{i\Delta\omega t})$$

Nu syns strukturen. Faktorn

$$e^{i\omega_1 t}$$

är den snabba svängningen — tonen vi hör. Parentesen

$$a + be^{i\Delta\omega t}$$

är en amplitud som själv varierar med tiden, långsamt, eftersom

$$e^{i\Delta\omega t}$$

roterar med den lilla vinkelfrekvensen

$$\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$$

Med

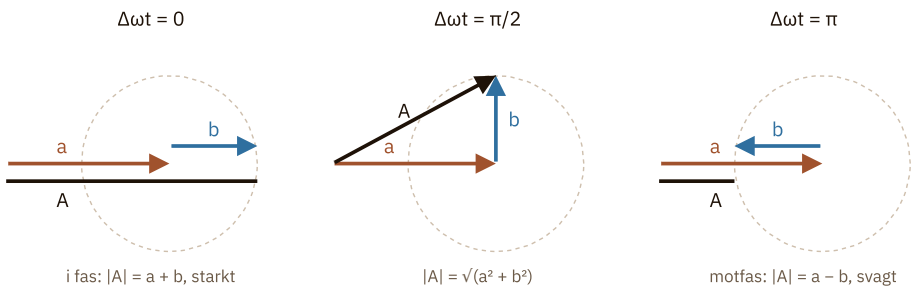
$$\omega = 2\pi f$$

Fysika: Fc1

blir svävningsfrekvensen

$$\boxed{f_{sv} = |f_1 - f_2|}$$

Beloppet gör formeln oberoende av vilken våg som är snabbast, vilket den tidigare skrivningen $f_a - f_b$ förutsatte.



ett varv för b tar tiden 2π/Δω: så ofta blir ljudet starkt, $f_{sv} = \Delta\omega/2\pi$

Parentesen $a + be^{i\Delta\omega t}$ som visare: b snurrar långsamt runt spetsen på a. I fas blir amplituden $a + b$, i motfas $a - b$, och ett helt varv tar tiden $2\pi/\Delta\omega$ — en svävning.

Läsning

- 16.7 Beats

Se även

- Interferens
- Vågor på komplex form
- Superposition av vågor
- Vinkelfrekvens och periodtid
- Dopplereffekt

Resurser

- Wikipedia: Beat (acoustics)

Dopplereffekt

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #akustik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Ljudvåg

Dopplereffekten är den frekvensändring en lyssnare uppfattar när källa och lyssnare rör sig i förhållande till varandra. Källan behöver inte ändra sin utsända frekvens — rörelsen trycker ihop eller drar isär vågfronterna, så frekvensen höjs vid närmande och sänks vid avlägsnande.

---

1. Grundsambandet

Allt vilar på att

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

Fysika: Fc1 (i formen $v = f \cdot \lambda$)

där v är ljudhastigheten i mediet. Den är bestämd av luften och ändras *inte* av att källan rör sig. Ändras våglängden måste därför frekvensen ändras — det är hela mekanismen.

---

2. När ljudkällan rör sig

En stillastående källa lägger ut en våglängd per period:

$$\lambda_0 = vT$$

Rör sig källan mot lyssnaren har den hunnit sträckan $v_s T$ i samma riktning innan nästa vågfront skickas ut, så fronterna kommer närmare varandra:

$$\lambda = \lambda_0 - v_s T$$

Skriv om båda termerna i källans egen frekvens, med

$$\lambda_0 = \frac{v}{f_s} \qquad T = \frac{1}{f_s}$$

vilket ger

$$\lambda = \frac{v}{f_s} - \frac{v_s}{f_s}$$

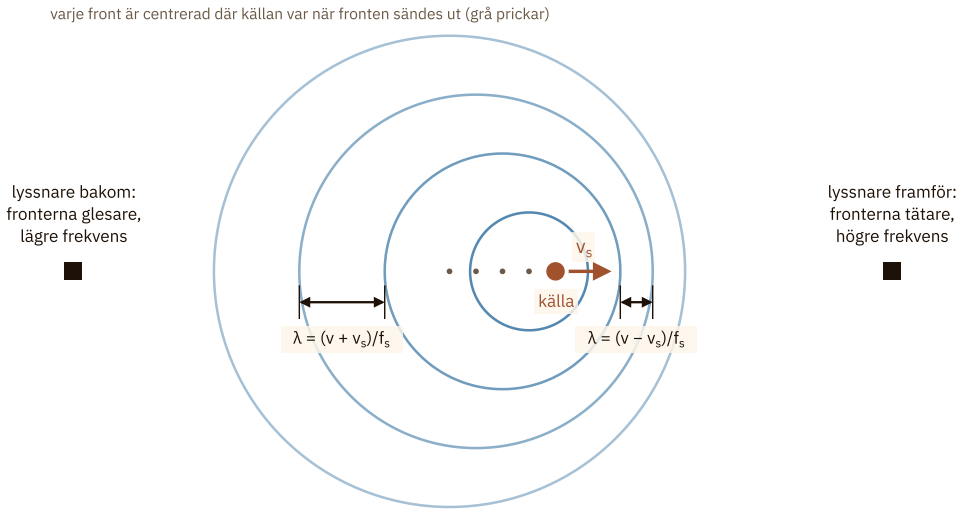
och därmed den hoptryckta våglängden

$$\boxed{\lambda = \frac{v - v_s}{f_s}}$$

Rör sig källan istället bort från lyssnaren byter termen tecken och våglängden dras ut:

$$\boxed{\lambda = \frac{v + v_s}{f_s}}$$

Frekvensen fås sedan ur grundsambandet $f = v/\lambda$.



Källan rör sig åt höger och sänder ut en vågfront per period från det läge den har just då. Framför trängs fronterna, $\lambda = (v - v_s)/f_s$; bakom glesnar de, $\lambda = (v + v_s)/f_s$.

---

3. När lyssnaren rör sig

Här ändras inte våglängden alls — den är utlagd i mediet av en stillastående källa. Det som ändras är hur fort lyssnaren sveper genom vågfronterna. Rör sig lyssnaren mot källan möter hon dem snabbare:

$$f = \frac{v + v_l}{\lambda}$$

och rör hon sig bort passerar de henne långsammare:

$$f = \frac{v - v_l}{\lambda}$$

Skillnaden mot fallet ovan är värd att lägga på minnet: rörlig källa ändrar **våglängden**, rörlig lyssnare ändrar bara **mötesfrekvensen**.

---

4. När både källa och lyssnare rör sig

De två effekterna är oberoende och kan multipliceras samman:

$$\boxed{f = \frac{v + v_l}{v + v_s} f_s}$$

Fysika: Fc2 (i formen $f_m = f_s \frac{v - v_m}{v - v_s}$, med v_m positiv bort från källan och v_s positiv mot mottagaren, alltså motsatta tecken mot här)

Formeln kräver en teckenkonvention för att vara användbar: v_l räknas positiv när lyssnaren rör sig **mot** källan, och v_s positiv när källan rör sig **bort** från lyssnaren. Med den konventionen ger varje närmande en höjd frekvens, precis som specialfallen i sektion 2 och 3.

Sätter vi $v_s = 0$ återfår vi fallet med rörlig lyssnare, och med $v_l = 0$ fallet med rörlig källa.

Allting som bidrar till att källan och lyssnare närmar sig då ska f bli högre än f0

Läsning

- 16.8 The Doppler Effect

Se även

- Ljudvåg
- Ljudets hastighet
- Våglängd och vågtal
- Svävning
- Relativitetsteori

Resurser

- Wikipedia: Doppler effect

Elektromagnetiska vågor

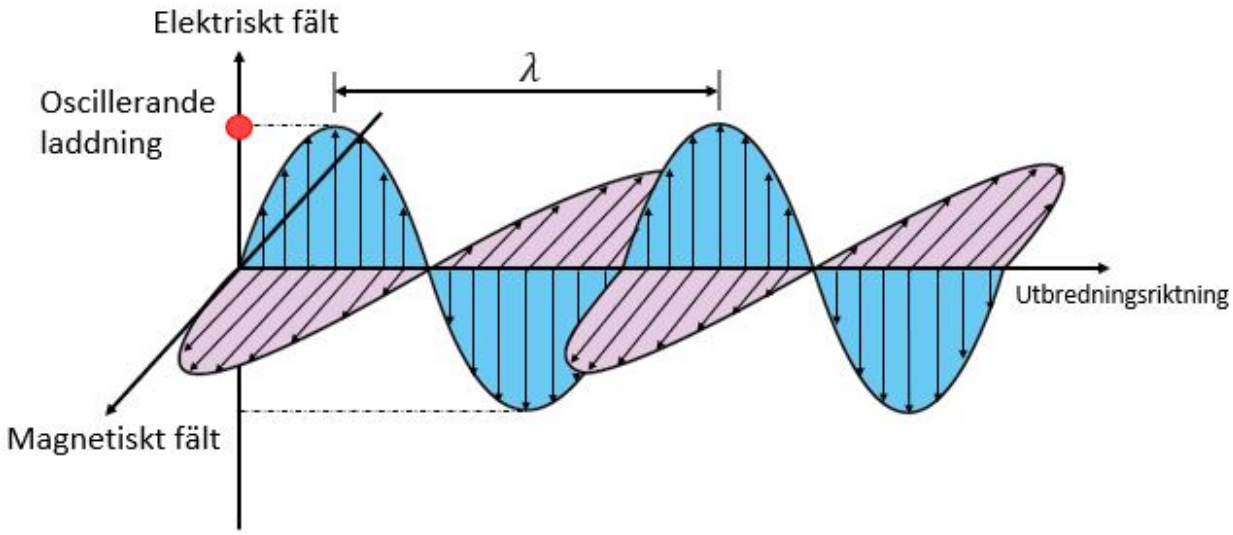
19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Harmonisk våg, Fysikaliska samband och Maxwells ekvationer

En elektromagnetisk våg består av ett oscillerande elektriskt och ett oscillerande magnetiskt fält, vinkelräta mot varandra och mot utbredningsriktningen. Till skillnad från mekaniska vågor kräver den inget medium, och i vakuum utbreder den sig med ljushastigheten c.



1. Fältens orientering

De två fälten står vinkelrätt mot varandra, och vågen går åt det håll deras kryssprodukt pekar:

$$\vec{E} \times \vec{B}$$

Lägger vi utbredningen längs x-axeln har $\vec{E}$ bara en y-komposant och $\vec{B}$ bara en z-komposant — de svänger i takt, i var sitt plan.

---

2. Ljushastigheten

I vakuum går vågen med

$$c = 299\,792 \text{ km/s}$$

Fysika: Te

Hastigheten är så stor att den blir ett praktiskt längdmått i astronomin: avståndet uttrycks i den tid ljuset behöver för att tillryggalägga det.

Sträcka	Gångtid för ljuset
Jorden–månen	1,3 ljussekunder
Jorden–solen	8 ljusminuter
Jorden–Mars	12,7 ljusminuter
Jorden–Alpha Centauri	4,4 ljusår
Jorden–Vintergatans bortre kant	52 000 ljusår

---

3. Det elektromagnetiska spektrumet

Samma slags våg täcker allt från radiovågor via mikrovågor, infrarött, synligt ljus och ultraviolett till röntgen- och gammastrålning — det är bara våglängden som skiljer dem åt.

Det synliga fönstret är smalt, och färgerna ligger i våglängdsordning:

Våglängd	Färg
400–440 nm	Violett
440–480 nm	Blå
480–560 nm	Grön
560–590 nm	Gul

Våglängd	Färg
590–630 nm	Orange
630–700 nm	Röd

Läsning

- 32.1 Maxwell’s Equations and Electromagnetic Waves
- 32.2 Plane Electromagnetic Waves and the Speed of Light
- 32.3 Sinusoidal Electromagnetic Waves

Se även

- Harmonisk våg
- Brytningsindex
- Polarisation
- Vågrörelse
- Fysikaliska samband och Maxwells ekvationer

Resurser

- Wikipedia: Elektromagnetisk strålning
- NASA: Tour of the Electromagnetic Spectrum

Brytningsindex

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Elektromagnetiska vågor

Brytningsindex $n = c/v$ anger hur mycket långsammare ljuset går i ett material än i vakuum. Frekvensen bevaras när ljuset passerar in i ett nytt medium, så det är våglängden som ändras: $\lambda = \lambda_0/n$.

---

1. Definitionen

Brytningsindex är kvoten mellan ljusets hastighet i vakuum och dess hastighet i det aktuella mediet:

$$\boxed{n = \frac{c}{v}}$$

Fysika: Fc3

---

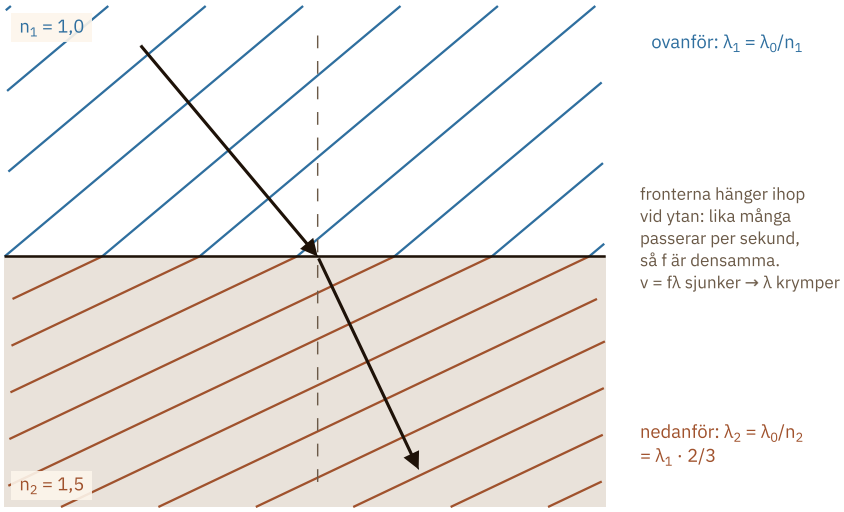
2. Våglängden ändras, inte frekvensen

Grundsambandet för en harmonisk våg gäller i varje medium:

$$v = \lambda f$$

Fysika: Fc1 (i formen $v = f \cdot \lambda$)

Här är f konstant genom gränsytan medan v förändras med brytningsindex, så det är λ som måste ge vika. Högre brytningsindex innebär alltså kortare våglängd.



Plana vågfronter går in i ett material med $n_2 = 1{,}5$. Fronterna hänger ihop vid gränsytan, så frekvensen är densamma på båda sidor; farten sjunker, och därför krymper våglängden till $\frac{2}{3}\lambda_1$ och strålen böjs mot normalen.

---

3. Optisk sträcka

Eftersom våglängden ändras från medium till medium blir det opraktiskt att räkna med den lokala våglängden. I stället räknar vi med vakuumvåglängden och låter sträckan bära brytningsindex:

$$\boxed{l_o = n\, l_g}$$

Fysika: Fc3 (optisk väglängd, i formen $L = \int n\, dx$)

Den optiska sträckan l_o är den geometriska sträckan l_g multiplicerad med brytningsindex — alltså hur långt ljuset *hade* hunnit i vakuum på samma tid.

Läsning

- 33.2 Reflection and Refraction

Se även

- Elektromagnetiska vågor
- Snells lag
- Totalreflektion
- Dispersion
- Våglängd och vågtal

Resurser

- Wikipedia: Brytningsindex

Snells lag

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #lag

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Brytningsindex

Snells lag beskriver hur ljus bryts vid gränsytan mellan två medier med olika brytningsindex: $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$. Ljuset bryts mot normalen när det går in i ett optiskt tätare material.

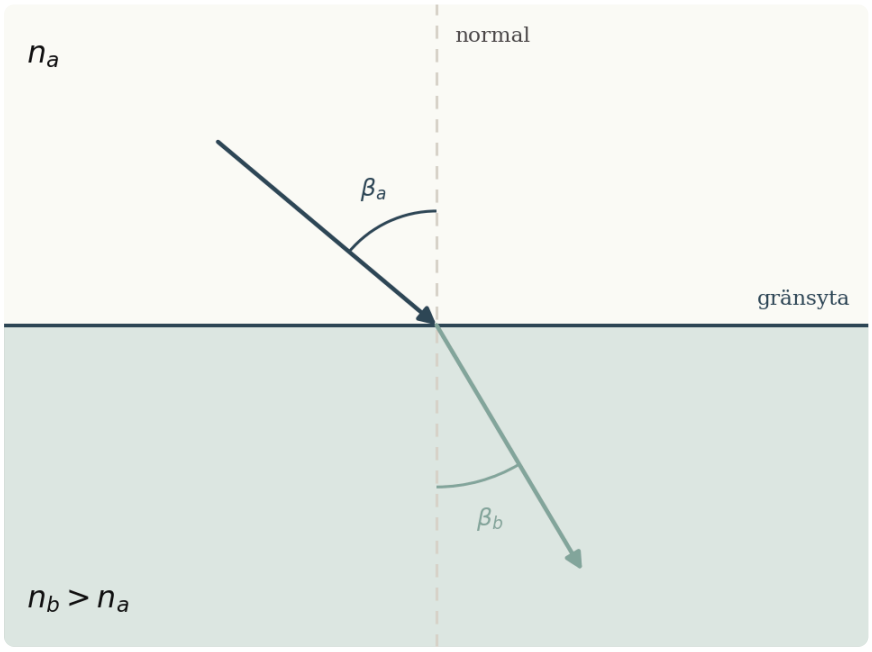
1. Brytningslagen

Med infallsvinkeln β_a i mediet n_a och brytningsvinkeln β_b i mediet n_b, båda räknade från normalen, gäller

$$\boxed{n_a \sin(\beta_a) = n_b \sin(\beta_b)}$$

Fysika: Fc6a (i formen $n_1 \sin i = n_2 \sin b$)

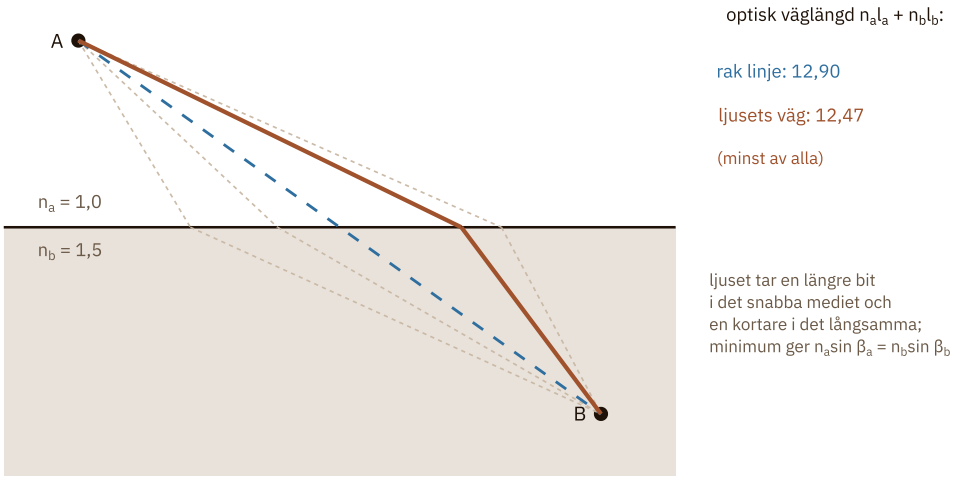
Produkten $n \sin\beta$ är alltså densamma på båda sidor om gränsytan.



2. Ljuset tar den optiskt kortaste vägen

Tumregeln bakom lagen: ljuset tar **alltid** den optiskt kortaste vägen, vilket sällan är den geometriskt kortaste. Det är den optiska sträckan $l_o = n\,l_g$ som minimeras, inte avståndet — och eftersom det tätare mediet straffar varje meter hårdare lönar det sig att lägga en längre bit av vägen i det tunnare.

Betraktar vi en punkt A i mediet n_a och en punkt B i mediet n_b är det den brytpunkt $(x, 0)$ på gränsytan som ger kortast optisk väg som ljuset väljer, och den punkten uppfyller brytningslagen ovan.



Från A till B: den raka linjen (streckad) är geometriskt kortast, men ljusets väg lägger en längre bit i det snabba mediet och har kortast optisk väglängd, $12{,}47$ mot $12{,}90$. Minimum inträffar precis där brytningslagen gäller.

Läsning

- 33.2 Reflection and Refraction

Se även

- Brytningsindex
- Totalreflektion
- Huygens princip
- Dispersion
- Fresnels formler

Resurser

- Wikipedia: Snells lag
- Wikipedia: Fermats princip

Totalreflektion

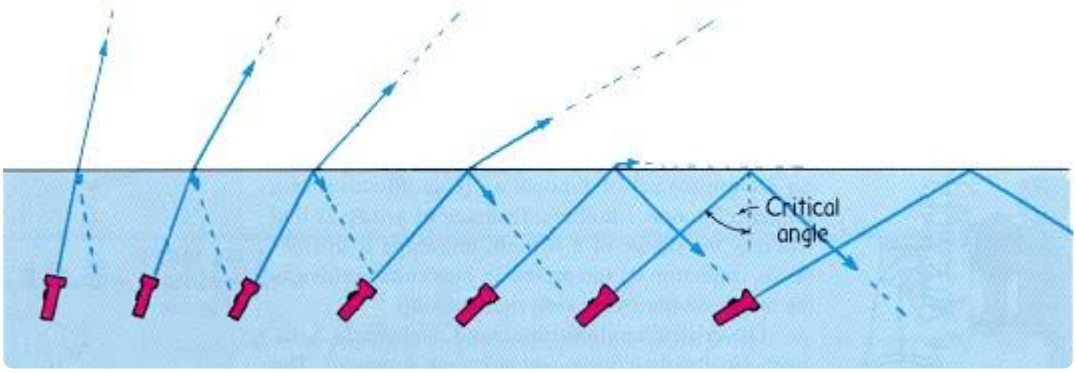
19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Snells lag

Går ljus från ett tätare till ett tunnare medium finns en kritisk infallsvinkel där den brutna strålen skulle löpa längs gränsytan. Vid större infallsvinklar sker ingen brytning alls – allt ljus reflekteras tillbaka, vilket kallas total inre reflektion.



1. Villkoret på medierna

Fenomenet uppträder bara i en riktning genom gränsytan:

$$n_b < n_a$$

Ljuset måste alltså komma från det optiskt tätare mediet. Går det åt andra hållet bryts strålen mot normalen och kan aldrig nå $90°$.

2. Den kritiska vinkeln

Vid den kritiska infallsvinkeln θ_{krit} är brytningsvinkeln precis

$$\theta_b = 90^\circ$$

vilket betyder att den brutna strålen löper längs gränsytan i stället för att lämna den. Sätter vi in det i brytningslagen faller sinusfaktorn på höger sida bort,

$$n_a \sin\theta_{\text{krit}} = n_b \sin 90^\circ$$

Fysika: Fc6a (brytningslagen, med $i = \theta_{\text{krit}}$ och $b = 90^\circ$)

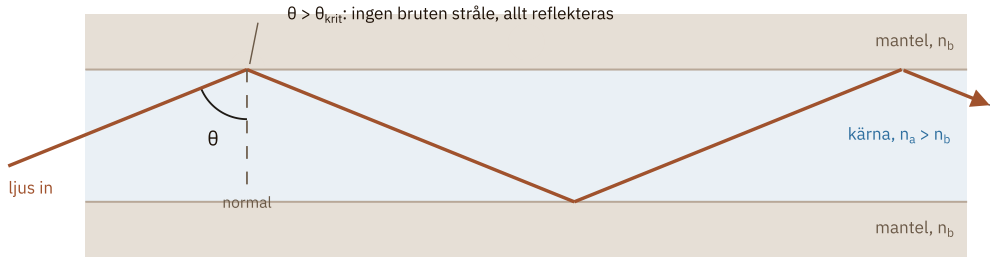
och kvar står villkoret för den kritiska vinkeln:

$$\boxed{\sin\theta_{\text{krit}} = \frac{n_b}{n_a}}$$

---

3. Hur brytningsvinkeln beter sig

Plottar vi brytningsvinkeln mot infallsvinkeln växer den först nästan linjärt, men böjer sedan uppåt och skjuter i höjden mot 90° när infallsvinkeln närmar sig den kritiska. Bortom den punkten finns ingen bruten stråle alls — hela intensiteten går tillbaka in i det tätare mediet.



sin $\theta_{\text{krit}} = n_b/n_a$; strålen stannar i kärnan hur lång fibern än är

Optisk fiber: strålen träffar gränsytan mot manteln med en infallsvinkel större än den kritiska och totalreflekteras vid varje studs, så ljuset leds längs kärnan.

Läsning

- 33.3 Total Internal Reflection

Se även

- Snells lag

- Brytningsindex
- Fresnels formler
- Elektromagnetiska vågor
- Reflektion av vågor

Resurser

- Wikipedia: Totalreflektion

Dispersion

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Brytningsindex

Brytningsindex beror på våglängden, och det beroendet kallas dispersion. Därför bryts olika färger olika mycket, vilket delar upp vitt ljus i sina beståndsdelar i ett prisma eller i en regnbåge.

---

1. Brytningsindex som funktion av våglängden

Hela fenomenet ligger i att n inte är en konstant för ett material:

$$n = n(\lambda)$$

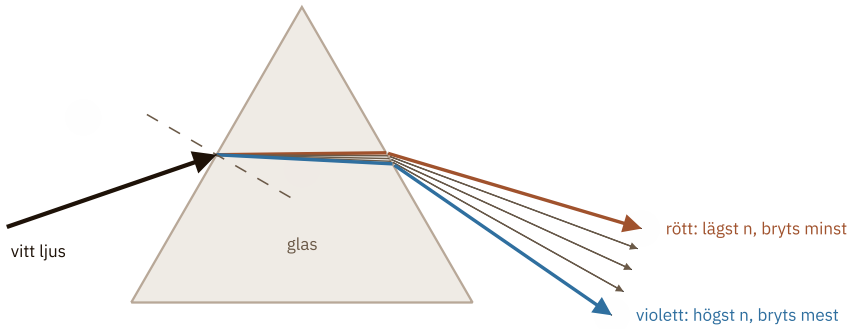
Fysika: Fc3 (dispersion, i formen $D = \partial n/\partial\lambda$)

Varje våglängd får därmed sin egen brytningsvinkel ur brytningslagen, trots att de träffar ytan med samma infallsvinkel.

---

2. Prisma och regnbåge

I ett prisma syns effekten direkt: vitt ljus går in som en enda stråle och kommer ut som ett utbrett spektrum, med de olika färgerna sorterade efter våglängd.



Prisma: alla färger träffar ytan med samma infallsvinkel, men violett ljus har högre n än rött och bryts mer vid båda ytorna. Skillnaden i n är överdriven för att synas.

Regnbågen är samma sak fast med vattendroppar som prismor — solljuset bryts in i droppen, reflekteras invändigt och bryts ut igen, och eftersom rött och violett får olika vinklar når de ögat från droppar på olika höjd.

Läsning

- 33.4 Dispersion

Se även

- Brytningsindex
- Snells lag
- Elektromagnetiska vågor
- Totalreflektion
- Våglängd och vågtal

Resurser

- Wikipedia: Dispersion (optik)

Huygens princip

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #princip

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Vågrörelse

Huygens princip säger att varje punkt på en vågfront kan betraktas som källa till en ny sekundär elementarvåg. Den nya vågfronten är enveloppen av dessa elementarvågor, vilket förklarar både utbredning, brytning och diffraktion.

---

1. Principen

Varje punkt på en vågfront kan ses som en **sekundär källa** som ger upphov till en sfärisk våg. Den primära källan behövs alltså bara för att starta förloppet — därefter bär vågfronten sig själv framåt genom att hela tiden återskapas som enveloppen av sina egna elementarvågor.

---

2. Plan våg och sfärisk våg

Konstruktionen förklarar varför en våg långt från källan uppträder som plan. Nära en punktkälla är vågfronterna cirklar, men ju längre ut man kommer desto rakare blir varje bit av cirkelbågen, och på tillräckligt stort avstånd är fronten i praktiken ett plan.

---

3. Brytning som en följd av principen

Låt en plan vågfront träffa gränsytan snett. Ritar man fronten vid $t = 0$, $t = \Delta t$, $t = 2\Delta t$ och så vidare — med samma tidssteg hela vägen — syns mekanismen: elementarvågorna i det tätare mediet hinner kortare på varje tidssteg än de som fortfarande befinner sig i det tunnare.

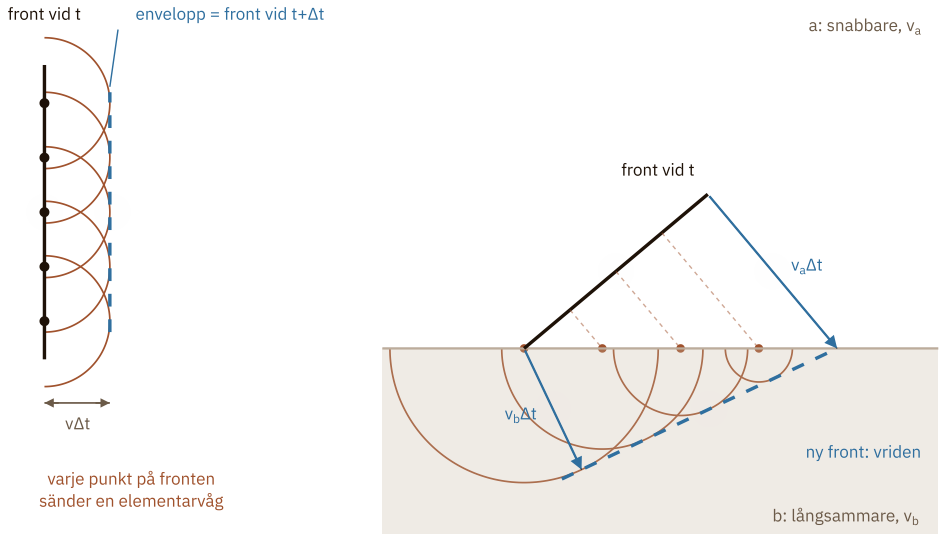
I mediet a hinner fronten sträckan

$$v_a t$$

medan den i mediet b under samma tid bara hinner

$$v_b t$$

Eftersom fronten är enveloppen av elementarvågorna måste den därför vrida sig när halva fronten bromsas in före den andra — och just den vridningen är brytningen. Snells lag följer alltså ur principen, utan att man behöver anta den separat.



Vänster: varje punkt på fronten sänder en elementarvåg, och enveloppen blir nästa front. Höger: den sneda fronten når gränsytan först i vänstra änden, elementarvågorna i b hinner bara $v_b\Delta t$, och enveloppen vrider sig — strålen bryts.

Läsning

- 33.7 Huygens’s Principle

Se även

- Vågrörelse
- Snells lag
- Diffraktion
- Brytningsindex
- Interferens

Resurser

- Wikipedia: Huygens princip

Polarisation

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #fenomen

1

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Elektromagnetiska vågor

Polarisation beskriver i vilken riktning det elektriska fältet svänger hos en elektromagnetisk våg. Linjärt polariserat ljus svänger i ett bestämt plan, medan opolariserat ljus är en blandning av alla riktningar; en polarisator släpper igenom bara en riktning.

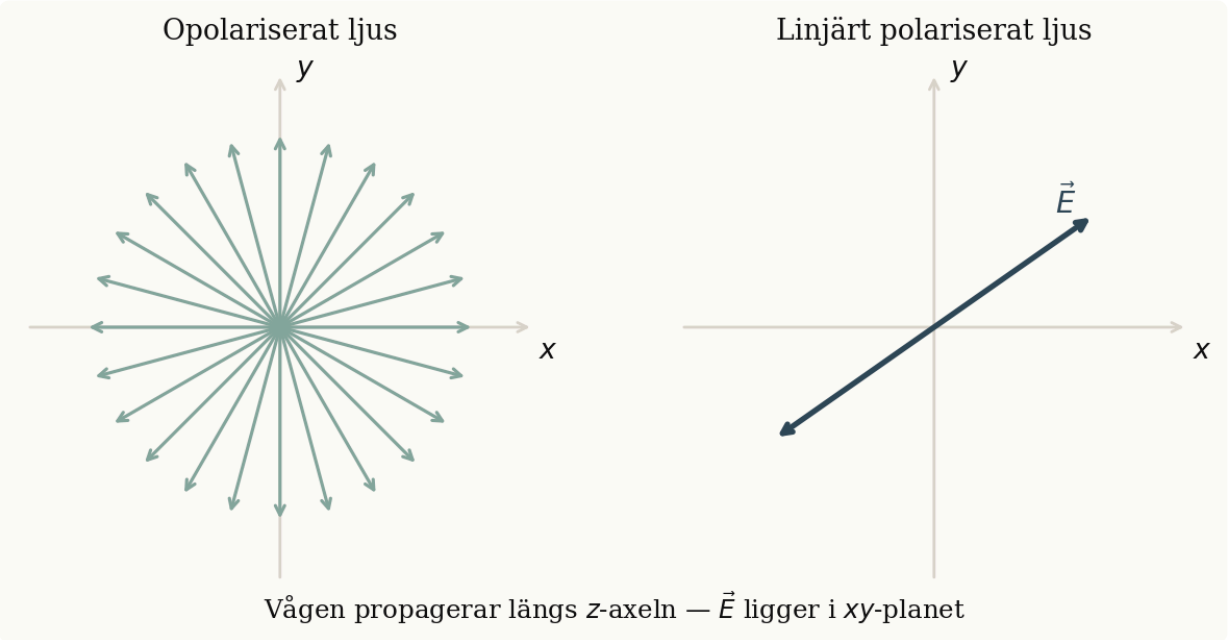
---

1. Opolariserat ljus

Låt vågen propagera längs z-axeln. Eftersom ljus är en transversell våg ligger

$$\vec{E} \perp \hat{z}$$

så fältet svänger alltid i xy-planet. För opolariserat ljus svänger $\vec{E}$ lika mycket i **alla** riktningar i det planet — ingen riktning är utmärkt.



Vågen propagerar längs z-axeln — $\vec{E}$ ligger i xy-planet

---

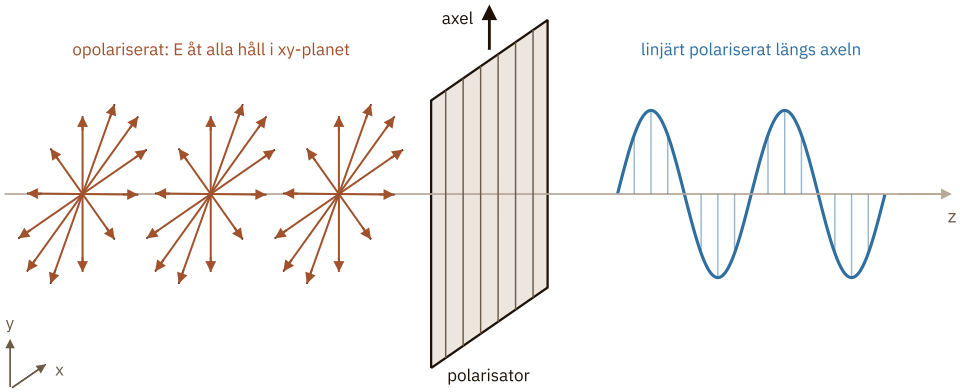
2. Linjärt polariserat ljus

Är ljuset istället linjärt polariserat svänger $\vec{E}$ **endast i en riktning** i xy-planet. Riktningen är godtycklig, men två specialfall är värda egna namn: linjärt polariserat i x-riktning och linjärt polariserat i y-riktning.

---

3. Polarisatorn

En polarisator släpper igenom ljus med en bestämd polarisationsriktning — filtrets **axel**. Opolariserat ljus in ger därför linjärt polariserat ljus ut, med svängningsriktningen låst till axeln oavsett hur det infallande ljuset såg ut.



Opolariserat ljus längs z in i en polarisator: efter filtret svänger $\vec{E}$ bara längs filtrets axel.

---

4. Uppdelning i komposanter

Varje polarisationsriktning kan delas upp i två komposanter längs valfria vinkelräta axlar:

$$\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$$

Det är den uppdelningen som gör polarisatorn hanterbar: lägger vi axlarna längs och tvärs filtrets axel passerar den ena komposanten och den andra blockeras, vilket är utgångspunkten för Malus lag.

Läsning

- 33.5 Polarization

Se även

- Elektromagnetiska vågor
- Malus lag
- Fresnels formler
- Brewsters vinkel
- Reflektion av vågor

Resurser

- Wikipedia: Polarisation

Malus lag

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #lag

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Polarisation

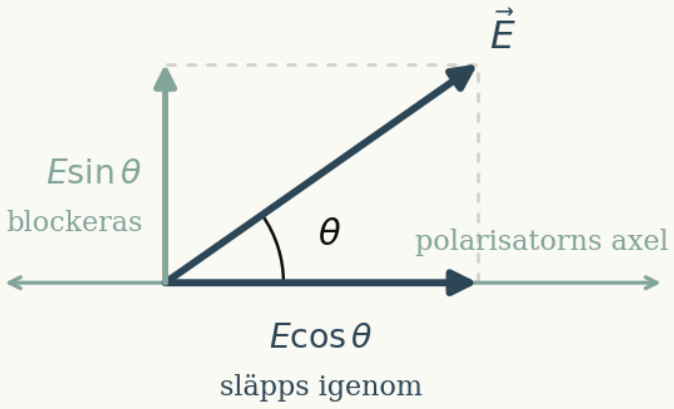
Malus lag ger intensiteten hos linjärt polariserat ljus efter en polarisator: $I = I_0 \cos^2 \theta$, där θ är vinkeln mellan ljusets polarisationsriktning och polarisatorns axel.

1. Komposanten som släpps igenom

Låt linjärt polariserat ljus med amplituden E träffa en polarisator vars axel bildar vinkeln θ med ljusets polarisationsriktning. Delar vi upp fältet längs och tvärs axeln är det bara den parallella komposanten som passerar:

$$E_{\text{ut}} = E \cos \theta$$

Den vinkelräta komposanten blockeras, och ljuset som kommer ut är polariserat längs axeln.



Endast komposanten längs axeln passerar: $E_{\text{ut}} = E\cos\theta$

2. Från amplitud till intensitet

Intensiteten går som amplituden i kvadrat, så kvadrering av uttrycket ovan ger

$$\boxed{I = I_0 \cos^2 \theta}$$

Fysika: Fc3

Detta är Malus lag. Den säger att parallella axlar ($\theta = 0$) släpper igenom allt och att korsade axlar ($\theta = 90^\circ$) släcker ljuset helt.

---

3. Opolariserat ljus in i första polarisatorn

Opolariserat ljus har ingen bestämd vinkel θ att sätta in, utan är en blandning av alla riktningar. Medelvärdet av $\cos^2 \theta$ över alla riktningar är $1/2$, så exakt hälften av intensiteten passerar:

$$\boxed{I_1 = \frac{I_0}{2}}$$

Den första polarisatorn i en kedja behandlas alltså alltid med denna formel, och först därefter blir Malus lag användbar — ljuset har nu en polarisationsriktning att mäta vinklar mot.

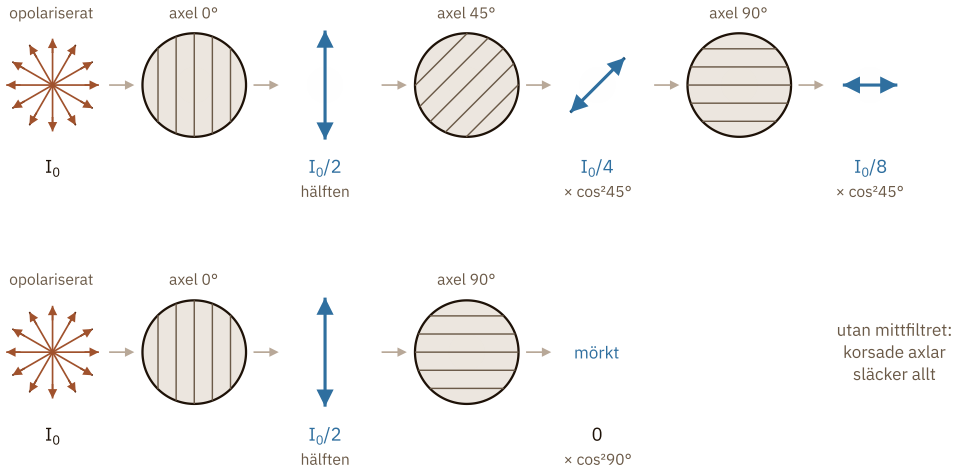
---

4. Flera polarisatorer i serie

Med flera polarisatorer i xy-planet efter varandra tillämpas lagen steg för steg:

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta_{12} \qquad I_3 = I_2 \cos^2 \theta_{23}$$

Vinkeln räknas varje gång mellan ljusets **aktuella** polarisationsriktning — alltså föregående polarisators axel — och nästa axel.



Tre polarisatorer med axlarna $0°$, $45°$ och $90°$ släpper igenom $I_0/8$; utan mittfiltret står axlarna korsade och inget ljus kommer igenom. Pilarnas längd är amplituden, alltså $\sqrt{I}$.

Läsning

- 33.5 Polarization — Malus’s law

Se även

- Polarisation
- Elektromagnetiska vågor
- Fresnels formler
- Brewsters vinkel
- Ljudintensitet och ljudnivå

Resurser

- Wikipedia: Malus lag

Fresnels formler

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #samband

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Polarisation, Snells lag

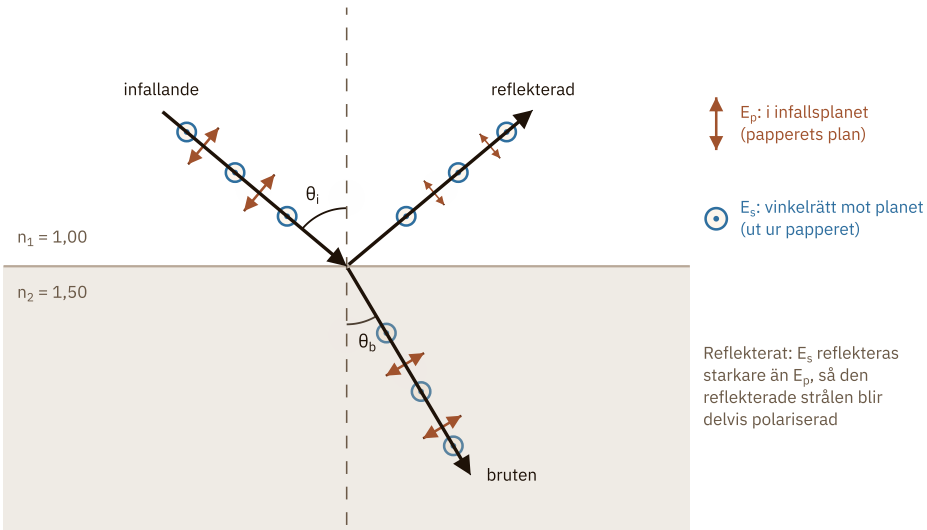
Fresnels formler ger förhållandet mellan infallande, reflekterad och transmitterad våg vid en gränsyta, som funktion av infallsvinkeln och brytningsindexen. De behandlar de två polarisationsriktningarna relativt infallsplanet var för sig, eftersom dessa reflekteras olika mycket.

1. Infallsplanet och de två komposanterna

Infallsplanet är det plan som innehåller den infallande strålen och normalen till ytan. Relativt det planet delas ljusvektorn upp i två komposanter:

$$E_{ip} \parallel \text{infallsplanet} \qquad E_{is} \perp \text{infallsplanet}$$

Uppdelningen är nödvändig därför att de två komposanterna reflekteras enligt var sin formel — det är hela anledningen till att reflektion polariserar ljus.



Infallsplanet är papperets plan: E_p svänger i planet (pilar vinkelrätt mot strålen) och E_s vinkelrätt mot det (⊙). Den reflekterade strålen har kortare p-pilar eftersom $R_p < R_s$.

2. Formlerna

Med infallsvinkeln θ_i och brytningsvinkeln θ_b ger Maxwells ekvationer de reflekterade amplituderna

$$E_{rp} = E_{ip} \cdot \frac{\tan(\theta_i - \theta_b)}{\tan(\theta_i + \theta_b)} \qquad E_{rs} = -E_{is} \cdot \frac{\sin(\theta_i - \theta_b)}{\sin(\theta_i + \theta_b)}$$

Vinklarna är inte fria från varandra utan kopplade av brytningslagen:

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_b$$

Fysika: Fc6a

3. Reflektanserna

Kvadrering ger intensiteterna, och kvoten mellan reflekterad och infallande intensitet för respektive komposant kallas reflektansen:

$$\boxed{R_p = \frac{I_{rp}}{I_{ip}} = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_b)}{\tan^2(\theta_i + \theta_b)}} \qquad \boxed{R_s = \frac{I_{rs}}{I_{is}} = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_b)}{\sin^2(\theta_i + \theta_b)}}$$

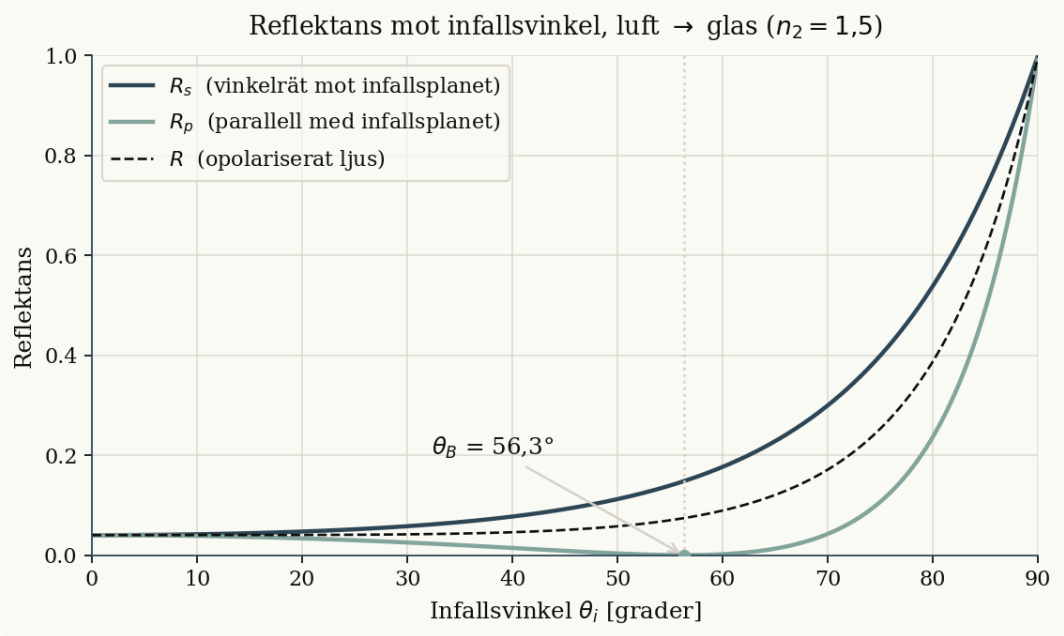
Fysika: Fc3 (Fresnels formler, i formen $R_\parallel = \tan^2(i-b)/\tan^2(i+b)$ och $R_\perp = \sin^2(i-b)/\sin^2(i+b)$)

Är det infallande ljuset opolariserat med intensiteten I_0 fördelar det sig jämnt mellan komposanterna,

$$I_{ip} = I_{is} = \frac{I_0}{2}$$

och den totalt reflekterade intensiteten blir $I_r = I_{rp} + I_{rs}$.

Plottar vi reflektanserna mot infallsvinkeln syns skillnaden mellan komposanterna direkt: R_s växer monotont, medan R_p först dyker ned till noll och sedan stiger. Vid vinkelrätt infall sammanfaller de, och vid strykande infall går båda mot 1.



Nollstället hos R_p är Brewsters vinkel.

---

4. Specialfall: små vinklar

Är infallsvinkeln liten blir även brytningsvinkeln liten, och serieutveckling ger approximationer av typen $\sin(\theta_i - \theta_b) \approx \theta_i - \theta_b$. Formlerna blir då

$$E_{rp} = E_{ip} \cdot \frac{\theta_i - \theta_b}{\theta_i + \theta_b} \qquad E_{rs} = -E_{is} \cdot \frac{\theta_i - \theta_b}{\theta_i + \theta_b}$$

Med brytningslagen i samma approximation, $n_1\theta_i = n_2\theta_b$, faller vinklarna bort helt:

$$E_{rp} = E_{ip} \cdot \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \qquad E_{rs} = -E_{is} \cdot \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

Eftersom båda komposanterna nu reflekteras lika mycket gäller $I_{rp} = I_{rs}$, och reflektansen beror bara på brytningsindexen:

$$\boxed{R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{(n_2 - n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2}}$$

Fysika: Fc3 (vinkelrätt infall)

---

5. Fasspränget vid reflektion

Tecknet i formlerna bär fysik. Om $n_1 < n_2$ är

$$\frac{E_{rs}}{E_{is}} = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} < 0$$

och den negativa kvoten betyder att den reflekterade vågen fasförskjuts π radianer, vilket motsvarar en vägskillnad på en halv våglängd. Samma sak gäller den parallella komposanten, eftersom de positiva riktningarna för E_{ip} och E_{rp} är motriktade.

Vid reflektion mot ett optiskt *tunnare* medium, $n_1 > n_2$, blir kvoten positiv och något fassprång uppstår inte. Skillnaden är avgörande för interferens i tunna skikt.

Läsning

- 33.5 Polarization — Polarization by Reflection
- Vågkompendiet (Fällström), avsnitt 2.2 *Reflektion av ljus*

Se även

- Polarisation
- Snells lag
- Brewsters vinkel
- Reflektion av vågor
- Interferens i tunna skikt
- Totalreflektion

Resurser

- Wikipedia: Fresnel equations

Brewsters vinkel

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Fresnels formler

Brewsters vinkel är den infallsvinkel där det reflekterade ljuset blir fullständigt linjärt polariserat. Den inträffar när den reflekterade och den brutna strålen står vinkelrätt mot varandra, vilket ger $\tan\theta_B = n_2/n_1$.

---

1. Brewstervillkoret

Villkoret läses av direkt ur reflektansen för den parallella komposanten,

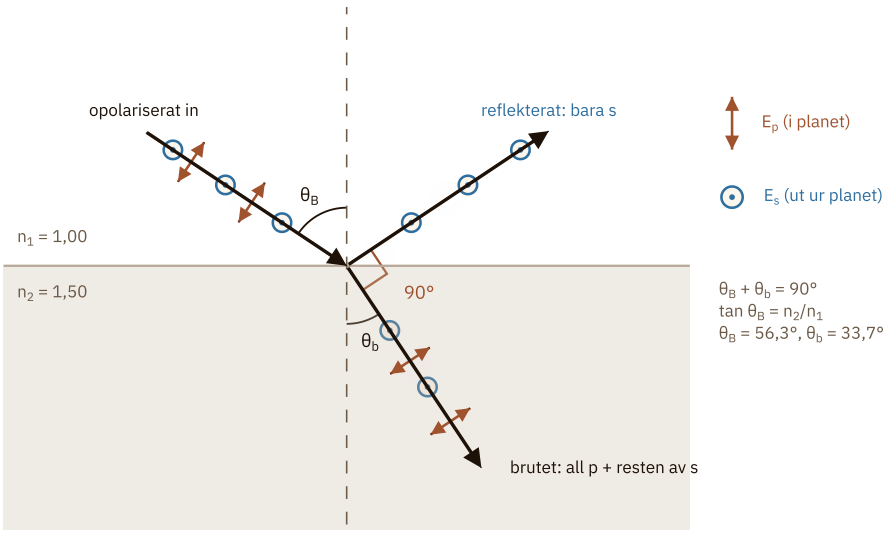
$$R_p = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_b)}{\tan^2(\theta_i + \theta_b)}$$

Fysika: Fc3 (Fresnels formler, i formen $R_\parallel = \tan^2(i-b)/\tan^2(i+b)$)

Nämnaren skjuter i höjden när vinkelsumman närmar sig en rät vinkel, eftersom $\tan(\theta_i + \theta_b) \to \infty$ då $\theta_i + \theta_b \to 90^\circ$. Det ger

$$\boxed{\theta_i + \theta_b = 90^\circ} \qquad \Longrightarrow \qquad R_p \to 0$$

Att vinkelsumman är 90° betyder geometriskt att den reflekterade och den brutna strålen står vinkelrätt mot varandra.



Vid Brewstervinkeln $\theta_B = 56{,}3^\circ$ (luft mot glas) står reflekterad och bruten stråle vinkelrätt mot varandra. Den reflekterade strålen bär bara s-komposanten (⊙), den brutna hela p-komposanten och resten av s.

---

2. Vinkeln ur brytningslagen

Sätt in villkoret i brytningslagen med $\theta_b = 90^\circ - \theta_B$:

$$n_1 \sin\theta_B = n_2 \sin(90^\circ - \theta_B) = n_2 \cos\theta_B$$

Fysika: Fc6a

Division med $\cos\theta_B$ ger Brewstervinkeln uttryckt enbart i brytningsindexen:

$$\boxed{\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1}}$$

Fysika: Fc3 (Brewstervinkeln, i formen $\tan\theta_p = n_2/n_1$)

För ljus som går från luft mot glas med $n_2 = 1{,}50$ ger det $\theta_B = 56{,}3^\circ$.

---

3. Vad som händer med de två komposanterna

Vid Brewstervinkeln reflekteras ingenting av den parallella komposanten — hela I_{ip} transmitteras utan förlust, vilket utnyttjas i så kallade Brewsterfönster. Det som reflekteras är därför uteslutande den vinkelräta komposanten, och det reflekterade ljuset är fullständigt linjärt polariserat vinkelrätt mot infallsplanet.

Det transmitterade ljuset blir i gengäld bara *delvis* polariserat parallellt med infallsplanet: det innehåller allt av den parallella komposanten men också resten av den vinkelräta.

Vid andra infallsvinklar än θ_B reflekteras den vinkelräta komposanten fortfarande starkare än den parallella, så reflekterat ljus är delvis polariserat även där — bara inte fullständigt.

Läsning

- 33.5 Polarization — Brewster’s law
- Vågkompendiet (Fällström), avsnitt 2.2.3 *Specialfall Brewstervillkoret*

Se även

- Fresnels formler
- Polarisation
- Snells lag
- Brytningsindex
- Malus lag

Resurser

- Wikipedia: Brewsters vinkel

Diffraktion

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Huygens princip, Interferens

---

Diffraktion är vågors förmåga att böja av runt hinder och breda ut sig efter att ha passerat en öppning. Effekten blir märkbar när öppningen är jämförbar med våglängden, och den följer direkt ur Huygens princip.

---

1. Fenomenet följer ur Huygens princip

Geometrisk optik förutsäger att ett hinder ska kasta en skugga med skarp kant. Det gör den inte: kanten är i stället omgiven av omväxlande ljusa och mörka band som sträcker sig in i det som borde vara skugga.

Förklaringen ligger i Huygens princip. Varje punkt i öppningen är en sekundär källa till en elementarvåg, och den nya vågfronten är enveloppen av dem alla. Elementarvågorna vid öppningens kanter har ingen granne utanför som begränsar dem, så enveloppen kröker sig runt kanten och ljuset breder ut sig in i skuggområdet. Banden uppstår sedan genom att elementarvågorna från olika delar av öppningen når samma punkt med olika gångväg och interfererar.

Diffraktion och interferens är därför inte två skilda fenomen utan samma sak, räknad över ett kontinuum av källor i stället för ett fåtal.

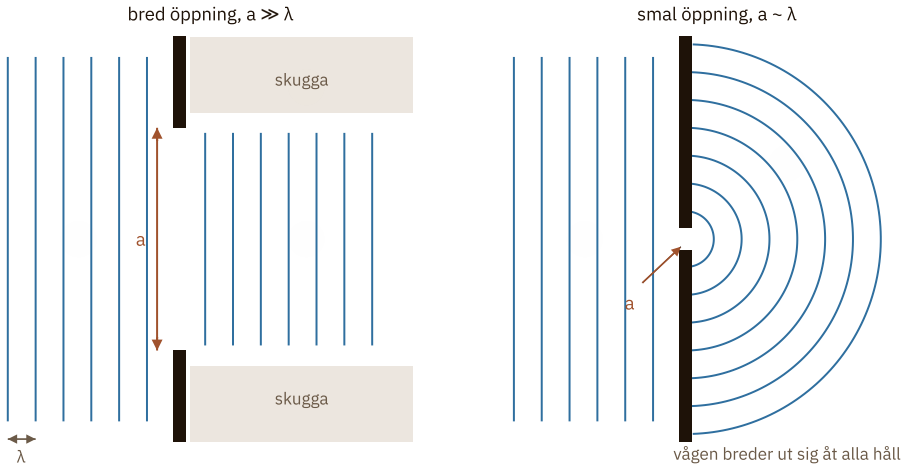
---

2. När effekten blir märkbar

Avgörande är öppningens bredd a i förhållande till våglängden λ.

Är öppningen mycket bredare än våglängden, $a \gg \lambda$, böjer vågen av försumbart och skuggan uppträder som geometrisk optik förutsäger. Det är därför diffraktion inte syns i vardagen för synligt ljus: en dörröppning är hundratusentals våglängder bred.

Är öppningen jämförbar med våglängden sprids vågen ut kraftigt bakom öppningen. Ljud har våglängder i meterskala och diffrakterar därför tydligt runt dörrposter och hörn, vilket är skälet till att vi hör runt hörn men inte ser runt dem.



Plana vågfronter mot en vägg. Genom en bred öppning går vågen nästan rakt fram och lämnar skugga bakom väggen; en öppning jämförbar med våglängden blir en punktkälla och fronterna blir cirkulära.

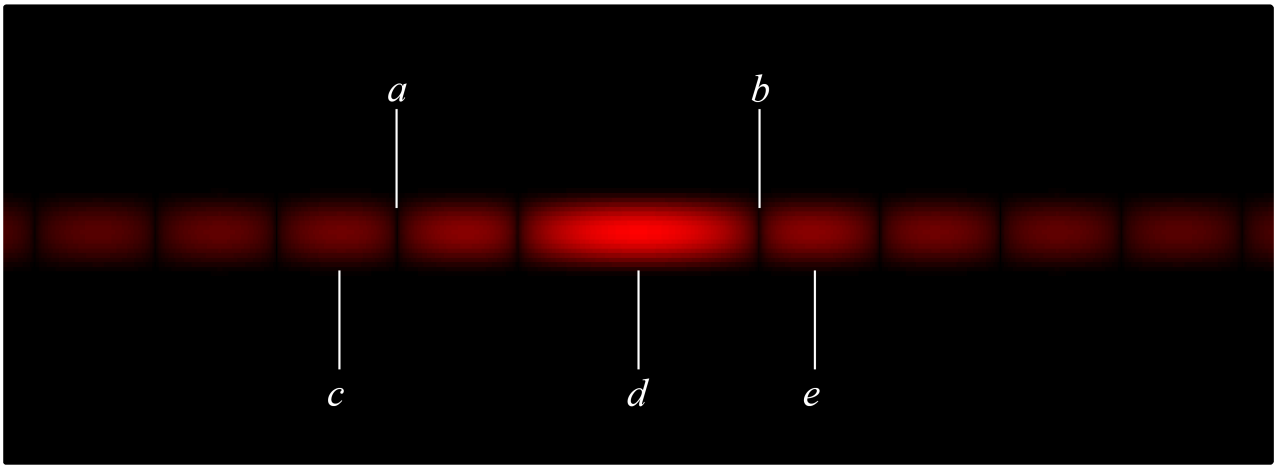
---

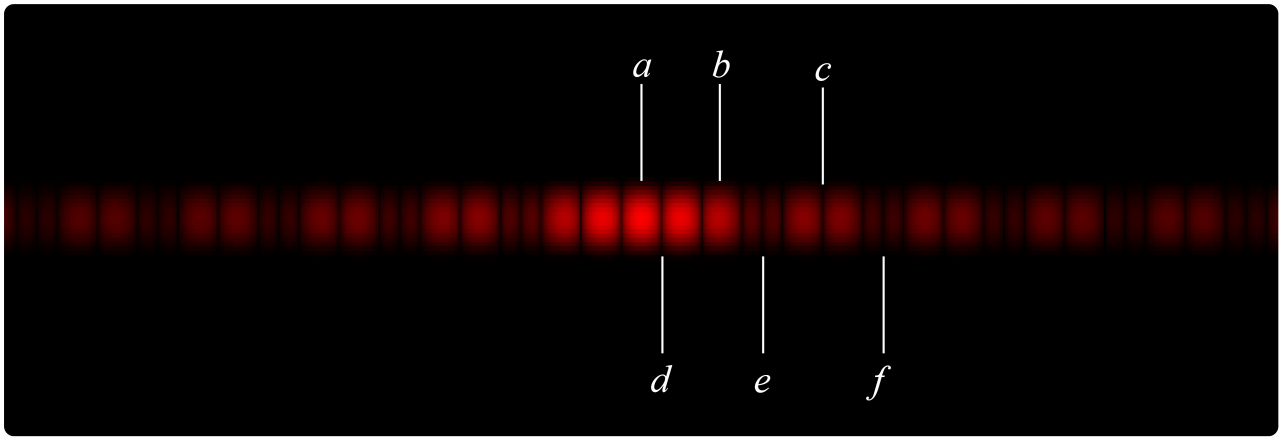
3. Fresnel- och fraunhoferdiffraktion

Fallen delas upp efter hur långt bort skärmen står.

Fresnel- eller **närfältsdiffraktion** gäller när källa, hinder och skärm ligger så nära varandra att strålarna fram till en punkt på skärmen inte kan behandlas som parallella.

Fraunhofer- eller **fjärrfältsdiffraktion** gäller när avstånden är så stora att alla linjer fram till en given punkt på skärmen kan räknas som parallella. För en spalt innebär det att skärmavståndet r i meterskala är mycket större än spaltbredden a under millimeterskala. Fallet är avsevärt enklare att räkna på, och det är det som behandlas i kursen.





Läsning

- 36.1 Fresnel and Fraunhofer Diffraction
- 36.2 Diffraction from a Single Slit
- Vågkompendiet (Fällström), avsnitt 3.2 *Fraunhofer diffraktion*

Se även

- Fraunhoferdiffraktion
- Huygens princip
- Interferens
- Dubbelspaltexperimentet
- Multipelspalt

Resurser

- Wikipedia: Diffraktion

Dubbelspaltexperimentet

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #experiment

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Interferens, Fraunhoferdiffraktion

---

I Youngs dubbelspaltexperiment får ljus passera två smala spalter och interferera på en skärm bakom. Gångvägsskillnaden mellan de två vägarna ger omväxlande ljusa och mörka fransar, med maxima där skillnaden är ett helt antal våglängder.

---

1. Koherenskravet

Två elektromagnetiska vågor kan bara interferera med varandra om de är **koherenta**, och det ställer tre krav: de måste vara monokromatiska — alltså bestå av en enda våglängd — de måste ha samma frekvens, och de måste ha samma polarisation.

Två separata ljuskällor uppfyller aldrig detta, eftersom deras faser driver oberoende av varandra. Youngs lösning är att låta *en* källa försörja båda spalterna: monokromatiskt ljus får först passera en enda smal spalt S_0, vars cylindriska vågfronter sedan träffar de två spalterna S_1 och S_2 samtidigt. Därmed är de två spalterna per konstruktion i fas, och interferensmönstret står stilla i stället för att suddas ut.

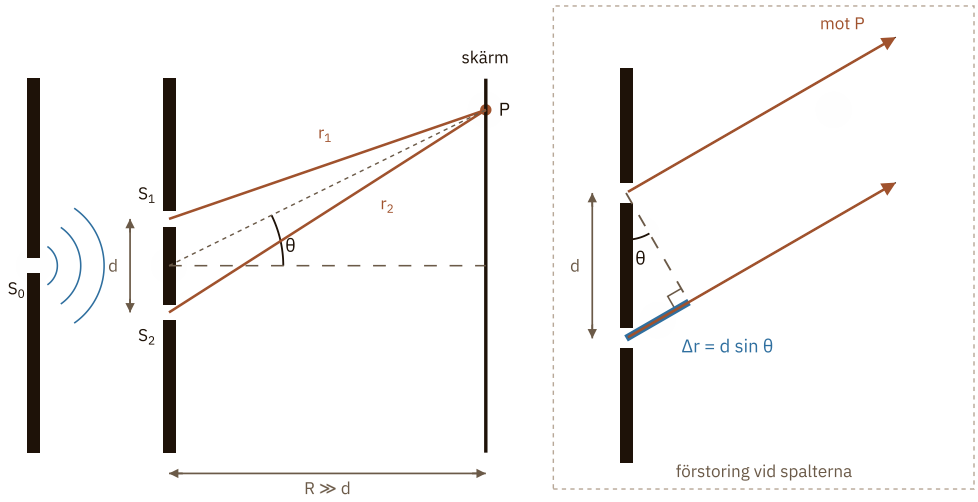
---

2. Geometrin och gångvägsskillnaden

De två spalterna ligger på avståndet d från varandra och skärmen på avståndet R. Vägarna fram till en punkt på skärmen är r_1 och r_2, och riktningen dit anges av vinkeln θ från mittlinjen.

Eftersom $R \gg d$ kan de två strålarna räknas som parallella, och då syns gångvägsskillnaden som en rätvinklig triangel med d som hypotenusa:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = d \sin\theta$$



Vänster: en källa S_0 försörjer båda spalterna, och strålarna r_1 och r_2 möts i P. Höger: nära spalterna är strålarna i praktiken parallella, och den rätvinkliga triangeln med hypotenusan d ger $\Delta r = d \sin\theta$.

---

3. Ljusa och mörka band

Ljusa band uppstår där vågfronterna kommer fram i fas, alltså där gångvägsskillnaden är ett helt antal våglängder:

$$\boxed{nd\sin\theta = p\lambda} \qquad p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Fysika: Fc4b (i formen $d\sin\theta = m\lambda$, i luft där $n = 1$)

Mörka band uppstår där de kommer fram i motfas, alltså vid ett udda antal halva våglängder:

$$\boxed{nd\sin\theta = (p + \frac{1}{2})\lambda}$$

Fysika: Fc4b (minima, i formen $Nd\sin\theta = m'\lambda$ med $N = 2$ och udda m')

Vill man i stället ha fransarnas läge mätt längs skärmen är avståndet från mönstrets mitt $y_p = R\tan\theta_p$. Är $y_p \ll R$ blir vinkeln liten, $\tan\theta \approx \sin\theta$, och lägena blir jämnt fördelade:

$$y_p = R\sin\theta_p = \frac{Rp\lambda}{d}$$

---

4. Intensiteten när spalterna har bredd

Villkoren ovan behandlar spalterna som punkter. Har de i stället bredden a bidrar var och en med sin egen fraunhoferfördelning, och intensiteten fås genom att sätta $N = 2$ i uttrycket för multipelspalten:

$$\boxed{I_P = 4I_0 \frac{\sin^2(\beta/2)}{(\beta/2)^2} \cdot \cos^2(\frac{\delta}{2})}$$

Fysika: Fc5 (dubbelspalt, med b för spaltbredden a)

De två vinkelvariablerna mäter olika saker: $\beta = (2\pi/\lambda)\, a \sin\theta$ är fasskillnaden mellan randstrålarna inom *en* spalt, medan $\delta = (2\pi/\lambda)\, d \sin\theta$ är fasskillnaden mellan de två spalterna. Interferensen sitter i cosinusfaktorn och diffraktionen i den andra.

---

5. Diffraktionen lägger sig som ett enveloppe

Diffraktionsfaktorn varierar långsamt och dämpar interferensfransarna mot kanterna. Den släcker mönstret helt där

$$na \sin\theta = m\lambda \qquad m = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Fysika: Fc5 (i formen $b \sin\theta = m\lambda$)

Eftersom de två villkoren beror på olika längder, a respektive d, kan diffraktionsminima hamna var som helst i förhållande till interferensmönstret. Med $d = 0{,}7$ mm och $a = 0{,}2$ mm sammanfaller första diffraktionsminimum med fjärde interferensminimum; med $d = 0{,}6$ mm och $a = 0{,}2$ mm sammanfaller det i stället med tredje interferensmaximum, som då försvinner. Vilket franstal som faller bort är därför ett sätt att mäta upp kvoten d/a.

Läsning

- 35.2 Two-Source Interference of Light
- 35.3 Intensity in Interference Patterns
- Vågkompendiet (Fällström), avsnitt 3.3.2 *Specialfall dubbelspalt*

Se även

- Interferens
- Fraunhoferdiffraktion
- Multipelspalt
- Diffraktion
- Interferens i tunna skikt
- Fasordiagram

Resurser

- Wikipedia: Youngs dubbelspaltexperiment

Fraunhoferdiffraktion

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Diffraktion, Interferens

Fraunhoferdiffraktion är diffraktion i fjärrfältet, där infallande och utgående strålar kan behandlas som parallella. Den ger intensitetsfördelningen bakom en enkelspalt, och mönstret breddas när spalten görs smalare eller våglängden ökar.

1. Fjärrfältsvillkoret

En spalt med bredden a belyses och mönstret betraktas på avståndet r. Fraunhoferfallet innebär att r i meterskala är mycket större än a under millimeterskala, vilket gör att alla strålar fram till en given punkt kan räknas som parallella och att vinkeln θ blir densamma för dem alla.

2. Spalten som N punktkällor

Vi delar upp spalten i N punktformiga sändare med avståndet d mellan grannarna, så att

$$a = (N-1)d$$

Fasskillnaden mellan *randstrålarna* — strålarna från spaltens två kanter — blir då summan av alla $N-1$ stegen, och den ges ett eget namn:

$$\beta = (N-1)\delta = (N-1)kd\sin\theta = ka\sin\theta$$

Med $\delta = \beta/(N-1)$ kan vi nu sätta in i uttrycket för intensiteten från N ekvidistanta källor och få hela spaltens bidrag uttryckt i den enda variabeln β:

$$I_P = I\,\frac{\sin^2\left(\dfrac{N\beta}{2(N-1)}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\beta}{2(N-1)}\right)}$$

3. Gränsen $N \to \infty$

Spalten är inte en rad diskreta sändare utan ett kontinuum, så vi låter antalet källor växa medan bredden a hålls konstant. Då blir $N - 1 = N$, och för stora N är nämnarens argument så litet att $\sin(\beta/2N) \approx \beta/2N$:

$$I_P = I\,\frac{\sin^2(\beta/2)}{(\beta/2N)^2} = N^2 I\,\frac{\sin^2(\beta/2)}{(\beta/2)^2}$$

Rakt fram är $\theta = 0$ och därmed $\beta = 0$, vilket ger $I_P = N^2 I$. Den produkten är intensiteten rakt fram från spalten och skrivs I_0, så fördelningen blir

$$\boxed{I_P = I_0\,\frac{\sin^2(\beta/2)}{(\beta/2)^2}} \qquad \beta = nka\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\,na\sin\theta$$

Fysika: Fc5 (enkelspalt, med b för spaltbredden a)

---

4. Huvudmaximum och minima

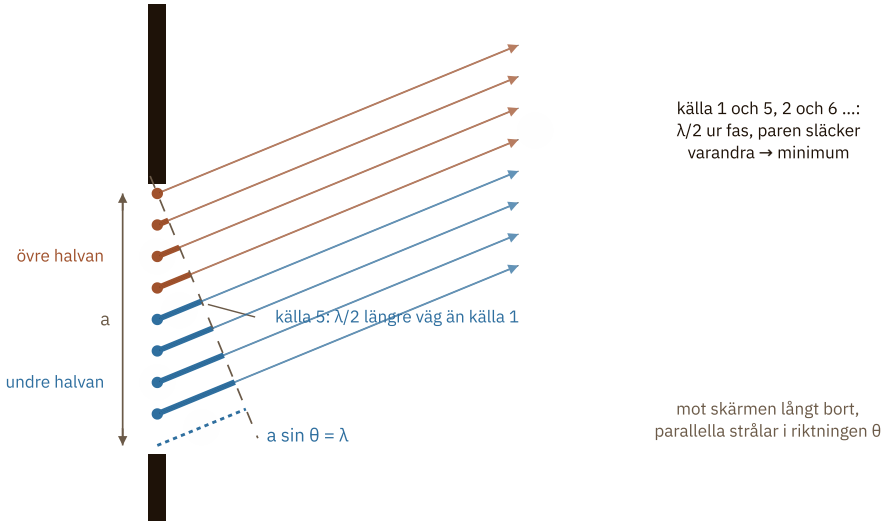
Till skillnad från multipelspalten ger formeln **ett enda** huvudmaximum, nämligen där $\beta/2 = 0$, alltså rakt fram vid $\theta = 0$.

Minimum får vi där täljaren är noll utan att nämnaren är det, alltså $\sin(\beta/2) = 0$ men $\beta/2 \neq 0$:

$$\boxed{na\sin\theta = m\lambda} \qquad m = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Fysika: Fc5 (i formen $b\sin\theta = m\lambda$)

Att $m = 0$ är undantaget är hela poängen — där ligger centralmaximum, inte ett minimum.



Spalten delad i åtta källor vid första minimum, $a \sin\theta = \lambda$: källan mitt i spalten har $\lambda/2$ längre väg än källan i överkanten, och så vidare parvis nedåt — varje par släcker varandra.

---

5. Mönstrets bredd

Centralmaximum sträcker sig ut till det första minimumet på ömse sidor, alltså till

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{na}$$

Vinkeln växer när a minskar eller λ ökar: en smalare spalt ger ett *bredare* mönster. Centralbilden blir dessutom dubbelt så bred som avståndet mellan två efterföljande minima, eftersom den sträcker sig från $m = -1$ till $m = +1$.

Läsning

- 36.1 Fresnel and Fraunhofer Diffraction
- 36.3 Intensity in the Single-Slit Pattern
- Vågkompendiet (Fällström), avsnitt 3.2 *Fraunhofer diffraktion*

Se även

- Diffraktion
- Multipelspalt
- Dubbelspaltexperimentet
- Interferens
- Huygens princip
- Våglängd och vågtal

Resurser

- Wikipedia: Fraunhofer diffraction

Multipelspalt

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Dubbelspaltexperimentet, Diffraktion, Fraunhoferdiffraktion

Med N likadana spalter i stället för två blir interferensmaxima smalare och skarpare, medan deras lägen är oförändrade. Det är principen bakom det optiska gittret, som därför kan skilja närliggande våglängder åt.

1. Geometri och fasskillnad

Multipelspalten består av N öppningar med spaltbredden a och spaltavståndet d mellan närliggande öppningar. Punkten P ligger så långt bort att avståndet r är mycket större än $(N-1)d$, vilket gör att de utgående strålarna kan räknas som parallella och vinkeln θ blir densamma för alla.

Gångvägsskillnaden mellan två grannspalter är då $d\sin\theta$, och den växer linjärt genom spaltraden till $2d\sin\theta$, $3d\sin\theta$ och slutligen $(N-1)d\sin\theta$ för den sista spalten. Omräknad till fas med vågtalet $k = 2\pi/\lambda$ blir fasskillnaden mellan två grannstrålar

$$\delta = k\,d\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\,d\sin\theta$$

2. Intensiteten från N punktkällor

Antar vi först att varje spalt är en punktkälla som sänder i fas och med samma amplitud, ger superpositionsprincipen att svängningen i P är summan av N termer som var och en är fasvriden δ relativt den föregående:

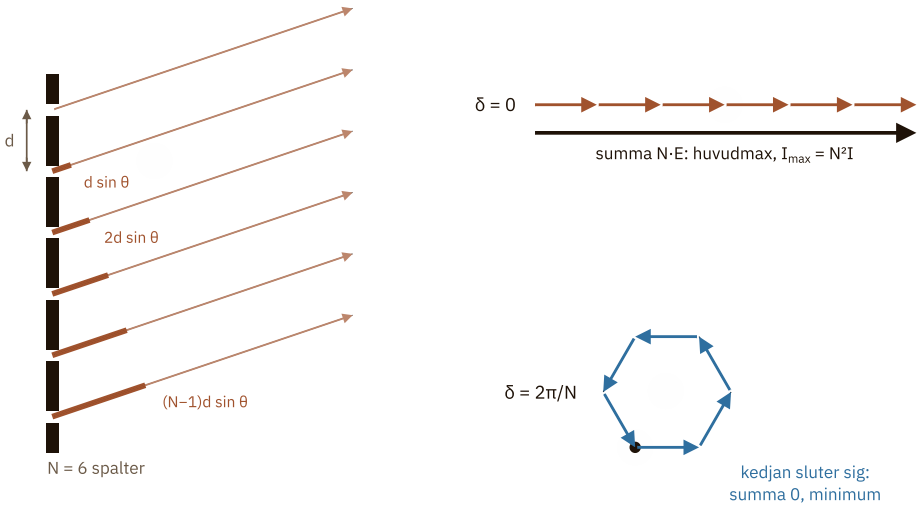
$$s_P = \frac{E_0}{r}e^{i(kx_1-\omega t)}\left(1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \cdots + e^{i(N-1)\delta}\right)$$

Parentesen är en geometrisk serie med kvoten $e^{i\delta}$, och summeras den med $1 + r + r^2 + \cdots + r^{N-1} = \dfrac{1-r^N}{1-r}$ följt av Eulers formel blir amplituden proportionell mot $\sin(N\delta/2)/\sin(\delta/2)$. Intensiteten går som amplituden i kvadrat:

$$\boxed{I_P = I\,\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}}$$

Fysika: Fc4b (med $\Delta\varphi$ för δ och I_0 för en källas intensitet I)

Här är I intensiteten i P från *en* av källorna, och formeln gäller bara om alla källor ger samma intensitet i P. I gränsen $\delta \to 0$ går kvoten mot N^2, så rakt fram blir $I_P = N^2 I$.



Vänster: gångvägen växer med $d\sin\theta$ för varje spalt. Höger: varje spalt ger en visare vriden δ mot föregående; vid $\delta = 0$ ligger alla i rad (huvudmaximum), vid $\delta = 2\pi/N$ sluter kedjan sig och summan blir noll (minimum).

---

3. Huvudmaxima

Intensiteten är maximal där uttrycket antar formen $0/0$, alltså där nämnaren $\sin(\delta/2)$ är noll. Det kräver $\delta/2 = p\pi$, det vill säga $\delta = p \cdot 2\pi$, och insatt i fasskillnaden ovan ger det

$$\boxed{nd\sin\theta = p\lambda} \qquad p = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Fysika: Fc4b (gitterekvationen, i formen $d\sin\theta = p\lambda$)

Villkoret gäller oberoende av hur många sändare vi har — det är samma villkor som för dubbelspalten, vilket är skälet till att huvudmaximas *lägen* inte flyttar sig när N ökar. Intensiteten i ett huvudmaximum är

$$\boxed{I_{\max} = N^2 I}$$

---

4. Minima och bimaxima

Minimum får vi när täljaren är noll utan att nämnaren är det, alltså $\sin(N\delta/2) = 0$ men $\sin(\delta/2) \neq 0$:

$$\boxed{nd\sin\theta = \frac{q}{N}\lambda} \qquad q \neq pN$$

Fysika: Fc4b (i formen $Nd\sin\theta = m'\lambda$)

Undantaget $q = pN$ måste skrivas ut, för då reduceras villkoret till $nd\sin\theta = p\lambda$ som i stället är ett huvudmaximum. Mellan två huvudmax ligger

$$N-1 \text{ minima} \qquad \text{och} \qquad N-2 \text{ bimaxima}$$

där bimaxima har betydligt lägre intensitet än huvudmaxima.

---

5. Spaltbredden – diffraktion gånger interferens

Uttrycket ovan behandlar varje spalt som en punkt. Har spalterna i stället bredden a bidrar var och en med sin egen fraunhoferfördelning, och den multipliceras in som intensiteten från en enskild källa:

$$\boxed{I_P = I_0\,\frac{\sin^2(\beta/2)}{(\beta/2)^2}\cdot\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}}$$

Fysika: Fc5 (N spalter, med b för spaltbredden a)

De två vinkelvariablerna mäter olika saker: $\beta = (2\pi/\lambda)\,a\sin\theta$ är fasskillnaden mellan randstrålarna *inom* en spalt, medan $\delta = (2\pi/\lambda)\,d\sin\theta$ är fasskillnaden mellan strålarna från närliggande spalter. Diffraktionsfaktorn lägger sig som ett enveloppe över interferensmönstret och släcker det helt där

$$na\sin\theta = m\lambda \qquad m = \pm1, \pm2, \ldots$$

Fysika: Fc5 (i formen $b\sin\theta = m\lambda$)

Sätter man $N = 2$ faller uttrycket tillbaka på dubbelspalten.

---

6. Vägen till gittret

Det första minimum vid sidan om ett huvudmaximum ligger där $N\delta = 2\pi$, alltså där

$$d\sin\theta = \frac{\lambda}{N}$$

Avståndet från huvudmaximum ut till dess närmaste minimum krymper alltså som $1/N$: huvudmaxima blir smalare ju fler spalter vi har, samtidigt som bimaxima blir fler och svagare. Då N blir mycket stort återstår bara en rad mycket smala och skarpa huvudmax — det är ett gitter.

Läsning

- 36.4 Multiple Slits
- 36.5 The Diffraction Grating
- Vågkompendiet (Fällström), avsnitt 3.1 *Multipelspalt med N stycken punktkällor* och 3.3 *Multipelspalt*

Se även

- Dubbelspaltexperimentet
- Fraunhoferdiffraktion
- Diffraktion
- Interferens
- Huygens princip
- Vågor på komplex form

Resurser

- Wikipedia: Diffraction grating

Interferens i tunna skikt

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Interferens, Brytningsindex, Fresnels formler

---

Ljus som reflekteras mot skiktets över- respektive undersida interfererar, och gångvägsskillnaden beror på skiktets tjocklek och brytningsindex. Fasskiftet vid reflektion mot ett tätare medium måste räknas med; fenomenet ger färgerna i såpbubblor och ligger bakom antireflexbehandling.

---

1. Strålgången i skiktet

Ljus infaller från ett medium med brytningsindex n_1 mot ett tunt skikt med brytningsindex n och tjockleken d; på andra sidan skiktet är brytningsindexet n_2. Vid varje gränsyta delas strålen, så en enda infallande stråle ger upphov till en hel serie utgående strålar – $I_{R1}, I_{R2}, I_{R3}, \ldots$ på reflektionssidan och $I_{T1}, I_{T2}, I_{T3}, \ldots$ på transmissionssidan. Det är därför fenomenet också kallas multipelinterferens.

Vid nästan vinkelrätt infall ges reflektanserna vid de två gränsytorna av Fresnels formler i approximerad form:

$$R_1 = \frac{(n - n_1)^2}{(n + n_1)^2} \qquad R_2 = \frac{(n - n_2)^2}{(n + n_2)^2}$$

Fysika: Fc3 (vinkelrätt infall)

---

2. Tvåstråleapproximationen

Är skiktet glas med luft på båda sidor blir $R_1 = R_2 = \dfrac{(1{,}5 - 1)^2}{(1{,}5 + 1)^2} = 0{,}04$. Följer vi de reflekterade strålarna genom gränsytorna får varje ny stråle två reflektioner extra:

$$I_1 = R_1 I_0 = 0{,}040\, I_0 \qquad I_2 = (1 - R_1)^2 R_2\, I_0 = 0{,}037\, I_0 \qquad I_3 = (1 - R_1)^2 R_2^2 R_1\, I_0 = 0{,}00006\, I_0$$

De två första strålarna har alltså nästan samma intensitet medan de övriga är försumbara, och som en första approximation kan vi därför räkna med ren tvåstråleinterferens:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\varphi)$$

Fysika: Fc4a

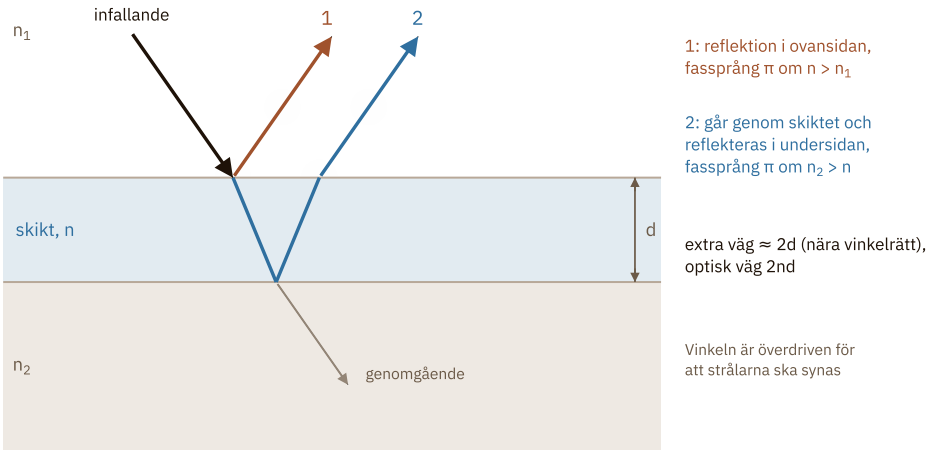
---

3. Fasskillnaden

Fasskillnaden mellan de två strålarna har två bidrag: den extra sträcka den andra strålen tillryggalägger fram och tillbaka genom skiktet, och de fassprång som uppstår vid reflektion.

$$\boxed{\Delta\varphi = k\left(2nd + (\text{antalet fassprång}) \cdot \frac{\lambda}{2}\right)}$$

Den optiska vägen $2nd$ är den geometriska sträckan $2d$ viktad med skiktets brytningsindex, och varje reflektion mot ett *optiskt tätare* medium bidrar med ett fassprång på π radianer — vilket är precis vad en halv våglängd motsvarar, därav termen $\lambda/2$.



Stråle 1 reflekteras i skiktets ovansida, stråle 2 går genom skiktet och reflekteras i undersidan. Nära vinkelrätt infall är vägskillnaden $2d$, alltså optisk väg $2nd$, och varje reflektion mot ett tätare medium ger ett fassprång π.

---

4. Maximum och minimum

Maximum får vi där cosinustermen är $+1$, alltså där fasskillnaden är ett helt antal varv:

$$\Delta\varphi = p \cdot 2\pi$$

Minimum får vi där cosinustermen är -1, alltså vid ett udda antal halva varv:

$$\Delta\varphi = (2p + 1)\pi$$

Eftersom $\Delta\varphi$ beror på våglängden uppfylls maximivillkoret vid olika tjocklekar för olika färger — det är därför en såpbubbla eller en oljefilm på vatten framstår som färgad i vitt ljus.

---

5. Reflekterat och transmitterat ljus skiljer sig åt

På reflektionssidan är de två dominerande strålarna nästan lika starka, $0{,}040\,I_0$ mot $0{,}037\,I_0$, och interferenstermen räcker därför till att nästan helt släcka minima.

På transmissionssidan är läget det motsatta: den första strålen går rakt igenom båda gränsytorna medan den andra först måste reflekteras två gånger, vilket gör den tusenfalt svagare.

$$I_{T1} = (1-R_1)(1-R_2)\,I_0 = 0{,}92\,I_0 \qquad I_{T2} = (1-R_1)R_2R_1(1-R_2)\,I_0 = 0{,}0015\,I_0$$

En stark stråle och en svag ger bara en liten modulation ovanpå en hög medelnivå, så interferensmönstret i det genomgående ljuset är svårt att över huvud taget se. Skillnaden kvantifieras av visibiliteten.

Läsning

- 35.4 Interference in Thin Films
- Vågkompendiet (Fällström), avsnitt 2.3 *Multipelinterferens*

Se även

- Visibilitet
- Interferens
- Fresnels formler
- Brytningsindex
- Reflektion av vågor
- Multipelspalt

Resurser

- Wikipedia: Thin-film interference

Visibilitet

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Interferens, Interferens i tunna skikt

---

Visibiliteten kvantifierar kontrasten i ett interferensmönster som förhållandet mellan mönstrets variation och dess medelnivå. Värdet 1 betyder maximal kontrast med helt mörka minima, och 0 att inget mönster syns.

---

1. Definitionen

Visibiliteten mäts på ett färdigt mönster: den jämför skillnaden mellan ljusaste och mörkaste franstopp med deras summa.

$$\boxed{V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}}$$

Fysika: Fc4a

Storheten är dimensionslös och anger hur bra vi ser interferensfransarna.

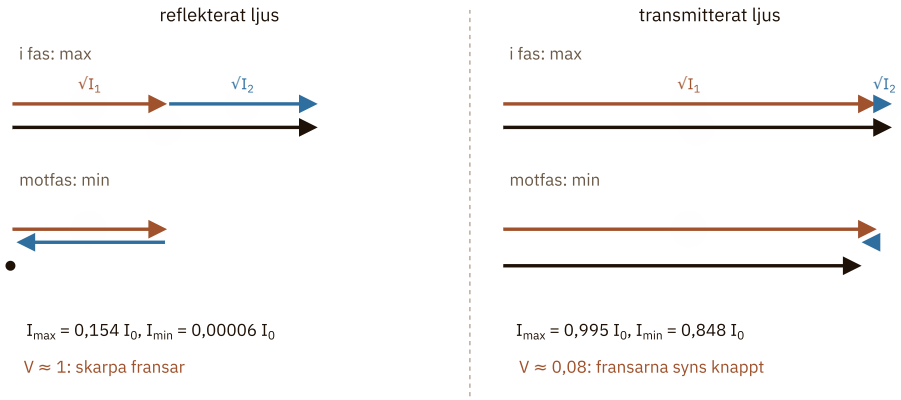
---

2. Max och min ur tvåstråleinterferens

För två interfererande strålar växlar interferenstermen mellan $+2\sqrt{I_1 I_2}$ och $-2\sqrt{I_1 I_2}$ när fasskillnaden varieras, vilket ger ytterligheterna

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \qquad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Skrivna som kvadrater blir de $I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$ och $I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$, så minima blir helt mörka först när de två strålarna är lika starka. Det är styrkeförhållandet mellan strålarna — inte deras absoluta intensitet — som avgör kontrasten.

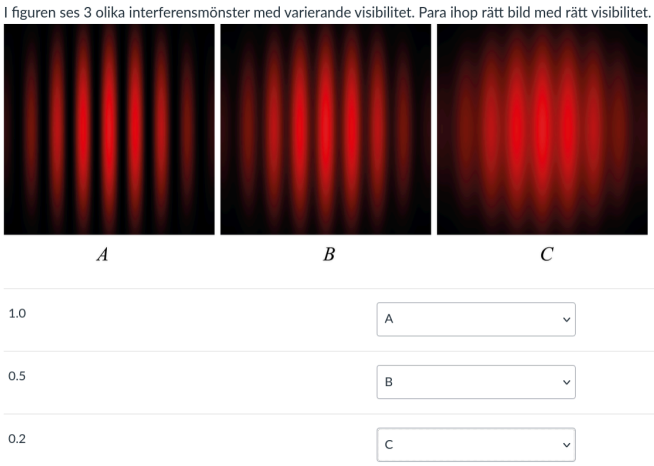


Visarna $\sqrt{I_1}$ och $\sqrt{I_2}$ i fas och i motfas för glasskiktet (olika skala i de två panelerna). I reflekterat ljus är visarna nästan lika långa och minimum blir nästan mörkt; i transmitterat ljus är den andra visaren så kort att max och min knappt skiljer sig.

3. Reflekterat och transmitterat ljus i ett tunt skikt

Ett glasskikt med luft på båda sidor ger ett tydligt exempel på hur avgörande styrkeförhållandet är. Reflektionssidans två dominerande strålar är nästan lika starka, medan transmissionssidan domineras helt av den stråle som gått rakt igenom.

	Reflekterat ljus	Transmitterat ljus
Stråle 1	$0{,}040\,I_0$	$0{,}92\,I_0$
Stråle 2	$0{,}037\,I_0$	$0{,}0015\,I_0$
$I_{\max}$	$0{,}154\,I_0$	$0{,}995\,I_0$
$I_{\min}$	$0{,}00006\,I_0$	$0{,}848\,I_0$
V	$0{,}999$	$0{,}08$

	Reflekterat ljus	Transmitterat ljus
		

I det reflekterade ljuset är skillnaden mellan max och min alltså nära total och fransarna syns skarpt, medan det genomgående ljusets svaga modulation ovanpå en hög medelnivå gör mönstret praktiskt taget osynligt.

Läsning

- 35.3 Intensity in Interference Patterns
- Vågkompendiet (Fällström), avsnitt 2.3 *Multipelinterferens*

Se även

- Interferens i tunna skikt
- Interferens
- Dubbelspaltexperimentet
- Multipelspalt
- Ljudintensitet och ljudnivå

Resurser

- Wikipedia: Interferometric visibility

Fotoelektriska effekten

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Fotonen

Ljus som faller på en metallyta frigör elektroner, men bara om frekvensen överstiger en tröskelfrekvens som beror på materialet. Under tröskeln händer ingenting hur intensivt ljuset än är, och över den uppstår ingen tidsfördröjning hur svagt det än är — vågmodellen förutsäger motsatsen i båda fallen. Einstein förklarade effekten år 1905 genom att låta en enda foton absorberas av en enda elektron: allt eller inget, utan den kontinuerliga energiöverföring vågteorin kräver. Fotonens energi hf går åt till utträdesarbetet ϕ, och resten blir elektronens kinetiska energi.

Photoelectric effekt:

$$\boxed{K_{\max} = eV_0 = hf - \phi} \quad \text{(formel 38.4 i bok)}$$

Fysika: Fd3 (fotoelektriska effekten, med Φ för utträdesarbetet)

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{K_{\max}}_{\substack{\text{snabbaste elektronens}\\ \text{rörelseenergi}}} = \underbrace{e}_{\substack{\text{elementar-}\\ \text{laddningen}}} \underbrace{V_0}_{\substack{\text{broms-}\\ \text{potentialen}}}$$

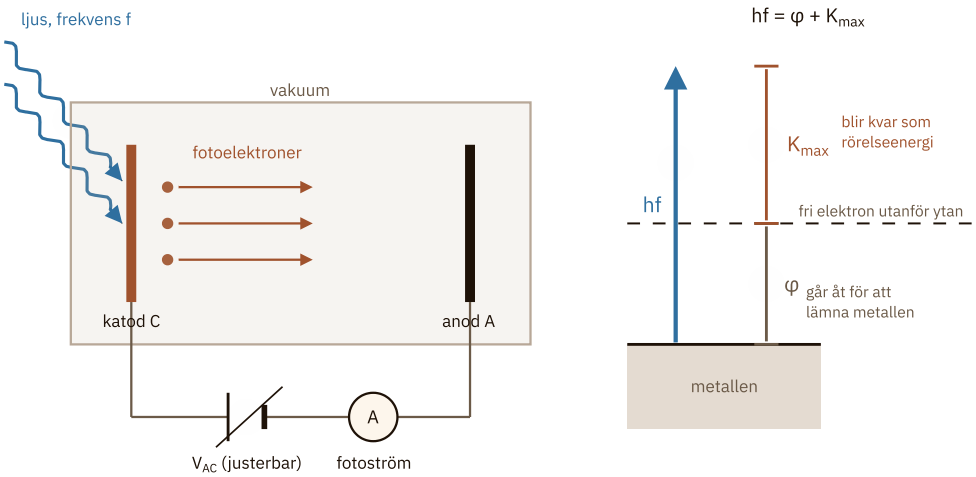
$$\underbrace{K_{\max}}_{\substack{\text{det som}\\ \text{blir över}}} = \underbrace{hf}_{\substack{\text{fotonens}\\ \text{energi}}} - \underbrace{\phi}_{\substack{\text{kostnaden för att}\\ \text{lämna metallen}}}$$

Den övre raden är vad man **mäter**, den undre vad som **händer**: en foton ger hela sin energi till en elektron, en del går åt för att ta sig ut, och resten syns som bromspotential.

---

1. Experimentet och bromspotentialen

Två elektroder sitter i ett vakuumrör. Katoden belyses med monokromatiskt ljus, och de utslagna **fotoelektronerna** kan ta sig över till anoden och ge en ström i i den yttre kretsen. Vänder vi fältet så att anoden repellerar elektronerna, och ökar det tills strömmen precis upphör, har vi hittat **bromspotentialen** V_0.



Vänster: fotoröret. Ljuset slår ut elektroner ur katoden, och amperemetern mäter strömmen till anoden medan spänningen V_{AC} justeras. Höger: samma sak i energi — fotonens hf räcker först till utträdesarbetet ϕ, och resten blir $K_{\max}$.

Den snabbaste elektronen lämnar katoden med $K_{\max}$ och når nätt och jämnt anoden med $K = 0$. Fältet uträttar arbetet $-eV_0$ på den, så arbets–energisatsen ger

$$W = \Delta K$$

$$-eV_0 = 0 - K_{\max}$$

$$\boxed{K_{\max} = eV_0}$$

Genom att mäta en spänning mäter vi alltså den största kinetiska energin.

---

2. Vad vågmodellen förutsäger — och vad som händer

	Vågmodellen förutsäger	Experimentet visar
Frekvens	Effekten bör finnas för alla frekvenser, bara ljuset är starkt nog	Under en gränsfrekvens f_0 blir det ingen ström alls, hur stark intensiteten än är

	Vågmodellen förutsäger	Experimentet visar
Fördröjning	Svagt ljus behöver tid för att samla ihop utträdesarbetet	Ingen mätbar fördröjning, hur svagt ljuset än är
Bromspotential	V_0 bör öka med intensiteten	V_0 beror bara på frekvensen; intensiteten ändrar bara strömmen

3. Einsteins förklaring

Ljuset består av fotoner med energin hf, och *en* foton absorberas av *en* elektron. Elektronen måste betala utträdesarbetet ϕ för att lämna ytan, och resten blir kinetisk energi. Energins bevarande ger

$$hf = \phi + K_{\max}$$

vilket är formeln i rutan överst. Den förklarar alla tre observationerna:

- **Gränsfrekvens.** Elektronen kommer loss bara om $hf \geq \phi$. Gränsen ligger där $K_{\max} = 0$:

$$\boxed{f_0 = \frac{\phi}{h}} \qquad \lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{hc}{\phi}$$

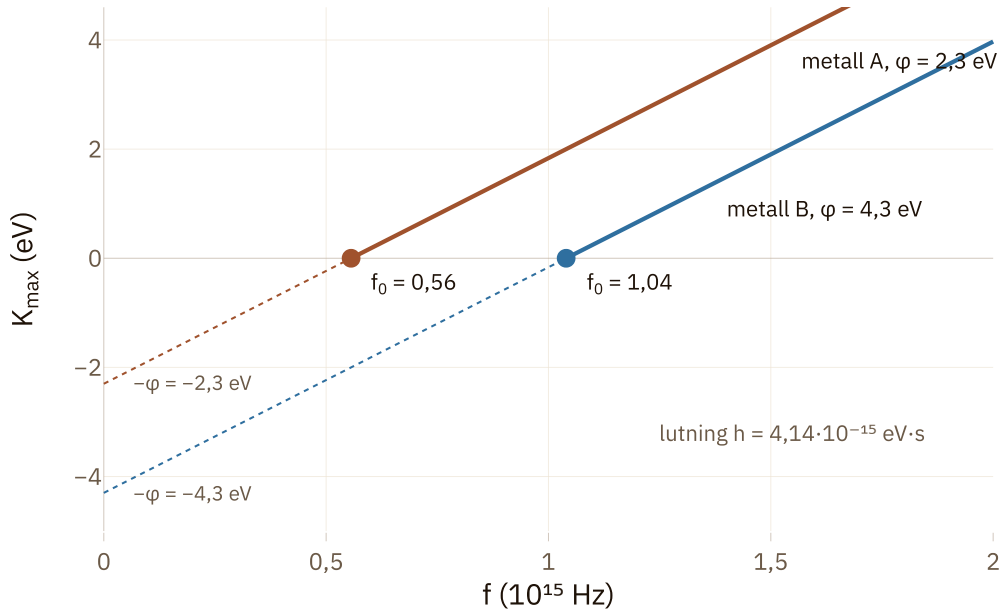
- **Ingen fördröjning.** Energin kommer i ett enda paket, så elektronen kan lämna ytan så fort första fotonen träffar.
- **Intensiteten.** Starkare ljus betyder fler fotoner per sekund, alltså fler elektroner och större ström — men varje foton har fortfarande energin hf, så $K_{\max}$ och V_0 ändras inte.

4. Att mäta h och ϕ

Löser vi ut bromspotentialen ur $eV_0 = hf - \phi$ får vi en rät linje i f:

$$V_0 = \frac{h}{e} f - \frac{\phi}{e}$$

Mäter vi V_0 för några olika frekvenser ger **lutningen** h/e och **skärningen** med V_0-axeln $-\phi/e$. Alla metaller ger parallella linjer — lutningen är naturkonstanten h — men de är förskjutna i sidled efter sitt utträdesarbete.



K_{max} mot frekvensen för två metaller. Linjerna är parallella med lutningen h, och gränsfrekvensen $f_0 = \phi/h$ ligger där de skär frekvensaxeln. Streckat: under f_0 kommer inga elektroner ut alls.

⚠ Vanliga fel

- **eV och J blandas.** ϕ och K anges oftast i eV. Räkna med $h = 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ eV·s eller $hc \approx 1240$ eV·nm, eller omvandla med $1\ \text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J — men inte hälften av varje.
- **Gränsfrekvens och utträdesarbete förväxlas.** ϕ är en energi, $f_0 = \phi/h$ en frekvens och $\lambda_0 = hc/\phi$ den *längsta* våglängd som fungerar.
- **Intensiteten påverkar K_{max}.** Den gör det inte; den ändrar bara antalet elektroner och därmed strömmen.
- **K_{max} används för alla elektroner.** Formeln ger den *största* kinetiska energin. Elektroner längre in i metallen förlorar energi på vägen ut och kommer ut långsammare.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Silver i ultraviolett ljus

Ljus med våglängden 250 nm faller på en silveryta med utträdesarbetet $4{,}30$ eV. Bestäm bromspotentialen och fotoelektronernas största fart.

Lösning

Fotonenergin. Med $hc = 1240$ eV·nm:

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{250\ \text{nm}} = 4{,}96\ \text{eV}$$

Största kinetiska energin.

$$K_{\max} = hf - \phi = 4{,}96 - 4{,}30 = 0{,}66\ \text{eV}$$

Bromspotentialen. $eV_0 = K_{\max}$ ger $V_0 = \boxed{0{,}66\ \text{V}}$.

Största farten. $K_{\max} = 0{,}66\ \text{eV} = 0{,}66 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 1{,}06 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$, så

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}06 \cdot 10^{-19}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}}} \approx \boxed{4{,}8 \cdot 10^{5}\ \text{m/s}}$$

Farten är under $0{,}2\ \%$ av ljushastigheten, så den klassiska formeln för kinetisk energi räcker.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Plancks konstant ur två mätningar

En okänd metall belyses först med 400 nm och sedan med 250 nm. Bromspotentialen blir $0{,}80$ V respektive $2{,}66$ V. Bestäm Plancks konstant, metallens utträdesarbete och gränsvåglängden.

Lösning

Frekvenserna. $f = c/\lambda$ ger

$$f_1 = \frac{2{,}998 \cdot 10^{8}}{400 \cdot 10^{-9}} = 7{,}50 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} \qquad f_2 = \frac{2{,}998 \cdot 10^{8}}{250 \cdot 10^{-9}} = 1{,}20 \cdot 10^{15}\ \text{Hz}$$

Lutningen. Linjen $V_0 = (h/e)f - \phi/e$ genom de två punkterna har lutningen

$$\frac{h}{e} = \frac{\Delta V_0}{\Delta f} = \frac{2{,}66 - 0{,}80}{1{,}20 \cdot 10^{15} - 7{,}50 \cdot 10^{14}} = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\ \text{V} \cdot \text{s}$$

så

$$h = 4{,}14 \cdot 10^{-15} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \approx \boxed{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}$$

Utträdesarbetet. Ur första mätningen, i eV:

$$\phi = hf_1 - eV_0 = 4{,}14 \cdot 10^{-15} \cdot 7{,}50 \cdot 10^{14} - 0{,}80 = 3{,}10 - 0{,}80 = \boxed{2{,}30\ \text{eV}}$$

Gränsvåglängden.

$$\lambda_0 = \frac{hc}{\phi} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{2{,}30\ \text{eV}} \approx \boxed{539\ \text{nm}}$$

Grönt ljus räcker alltså precis, rött gör det inte.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 38.1 Light Absorbed as Photons: The Photoelectric Effect

Fotonen

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Elektromagnetiska vågor

Fotonen är ljusets energikvantum: ett masslöst paket som färdas med ljushastigheten men ändå bär både energi och rörelsemängd. Den har samtidigt vågegenskaper i form av frekvens och våglängd, och det är genom Plancks konstant h som de två beskrivningarna kopplas ihop.

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \qquad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Fysika: Fd3 (fotonenergi)

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{E}_{\text{en fotons energi}} = \underbrace{h}_{\text{Plancks konstant}} \underbrace{f}_{\text{frekvensen}} = \frac{hc}{\underbrace{\lambda}_{\text{våglängden}}}$$

$$\underbrace{p}_{\text{fotonens rörelsemängd}} = \frac{\overbrace{E}^{\text{energin}}}{\underbrace{c}_{\text{ljusets hastighet}}} = \frac{h}{\lambda}$$

Ljus kommer i portioner. Frekvensen bestämmer hur stor **varje** portion är, och intensiteten bara **hur många** portioner som kommer per sekund.

---

1. Energin

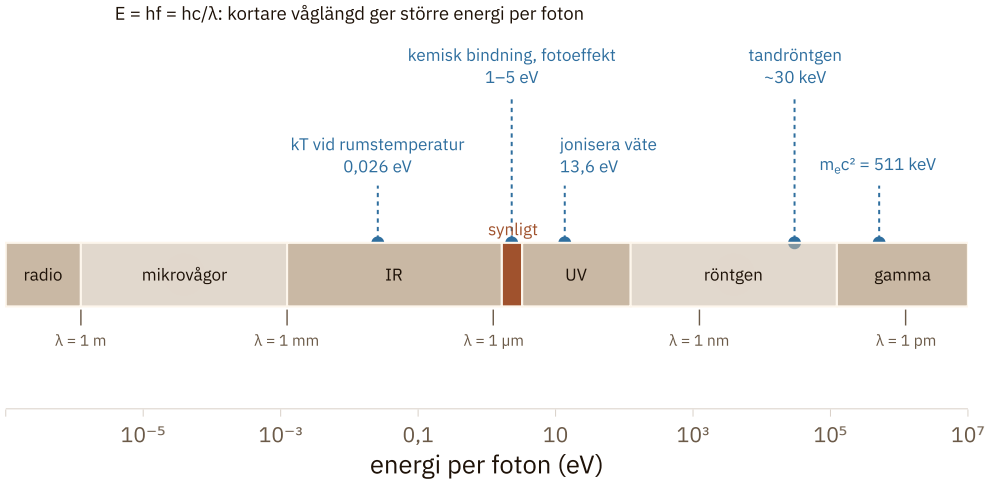
Fotonens energi är proportionell mot frekvensen, med Plancks konstant som proportionalitetskonstant. Med $c = f\lambda$ kan den lika gärna skrivas med våglängden — kort våglängd betyder energirik foton.

I atom- och kärnfysik är eV och nm de naturliga enheterna, och då är det bekvämt att komma ihåg produkten

$$hc = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}\ \text{m/s} \approx 1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}$$

Fysika: Te (h, c)

så att till exempel en röd foton med $\lambda = 700$ nm har $E = 1240/700 \approx 1{,}77$ eV.



Energin per foton längs hela spektrumet, på logaritmisk skala. En synlig foton bär några eV — lagom för att bryta en kemisk bindning eller slå ut en elektron ur en metall. En radiofoton bär en miljondel av det, och en röntgenfoton tusentals gånger mer.

---

2. Rörelsemängden

Enligt den speciella relativitetsteorin hänger energi, rörelsemängd och vilomassa ihop genom

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

Fotonen har vilomassan $m = 0$, så den andra termen försvinner:

$$E^2 = (pc)^2$$

$$E = pc$$

Sätt in $E = hf = hc/\lambda$ och dela med c:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

vilket är den andra formeln i rutan. Rörelsemängden pekar i ljusets utbredningsriktning. Den är liten för synligt ljus men blir viktig i Comptonspridning, där fotonen stöter mot en elektron.

---

3. Antal fotoner och ljusets tryck

En ljuskälla med effekten P sänder ut energin P per sekund, fördelad på fotoner med energin hf vardera. Antalet fotoner per sekund blir

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = \frac{P}{hf} = \frac{P\lambda}{hc}}$$

Varje foton som absorberas lämnar ifrån sig rörelsemängden h/λ. Kraften på en helt absorberande yta är rörelsemängden per sekund:

$$F = \frac{dN}{dt} \cdot \frac{h}{\lambda} = \frac{P\lambda}{hc} \cdot \frac{h}{\lambda} = \frac{P}{c}$$

Reflekteras fotonerna i stället vänder rörelsemängden, och kraften fördubblas till $2P/c$.

Inga biljardbollar

Fotonen är inte en liten kula. Den har ingen vilomassa, rör sig alltid med c i vakuum, och kan skapas och förintas (se Röntgenstrålning och Parproduktion). Den har egenskaper av både våg och partikel — vilken som syns beror på experimentet, se Komplementaritetsprincipen.

Vanliga fel

- **eV och J blandas.** Med h i J·s blir E i joule. Använd $hc \approx 1240$ eV·nm om svaret ska vara i eV.
- **Våglängden i nm sätts in som meter.** 500 nm är $5 \cdot 10^{-7}$ m, inte $5 \cdot 10^{-9}$.
- $p = mv$ **används för fotonen.** Fotonen har ingen vilomassa; rörelsemängden är h/λ.
- **Våglängden i ett medium används.** Fotonenergin bestäms av frekvensen, som inte ändras när ljuset går in i glas. Räkna med vakuumvåglängden.

---

4. Lösta exempel

Exempel — Fotoner från en grön laserpekare

En laserpekare sänder ut $1{,}00$ mW grönt ljus med $\lambda = 532$ nm. Bestäm varje fotons energi och rörelsemängd, antalet fotoner per sekund, och kraften på en svart skärm som absorberar strålen.

Lösning

Energin.

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}}{532 \cdot 10^{-9}} = 3{,}73 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = \boxed{2{,}33\ \text{eV}}$$

Rörelsemängden.

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{532 \cdot 10^{-9}} = \boxed{1{,}25 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}$$

Antal fotoner per sekund.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{P}{E} = \frac{1{,}00 \cdot 10^{-3}}{3{,}73 \cdot 10^{-19}} = \boxed{2{,}68 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1}}$$

Kraften. Allt absorberas, så

$$F = \frac{P}{c} = \frac{1{,}00 \cdot 10^{-3}}{2{,}998 \cdot 10^{8}} = \boxed{3{,}34 \cdot 10^{-12}\ \text{N}}$$

Det är så många fotoner per sekund, var och en med så liten energi, att ljuset ser ut som ett jämnt flöde.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Vilken våglängd har en foton på 2,00 eV?

En lysdiod sänder ut fotoner med energin $2{,}00$ eV. Vilken våglängd och färg har ljuset, och hur stor är fotonens frekvens?

Lösning

Våglängden.

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{2{,}00\ \text{eV}} = \boxed{620\ \text{nm}}$$

vilket är orangerött ljus.

Frekvensen.

$$f = \frac{E}{h} = \frac{2{,}00\ \text{eV}}{4{,}136 \cdot 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}} = \boxed{4{,}84 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}}$$

Kontroll: $f\lambda = 4{,}84 \cdot 10^{14} \cdot 620 \cdot 10^{-9} = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s = c.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 38.1 Light Absorbed as Photons: The Photoelectric Effect
- 38.2 Light Emitted as Photons: X-Ray Production

Röntgenstrålning

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

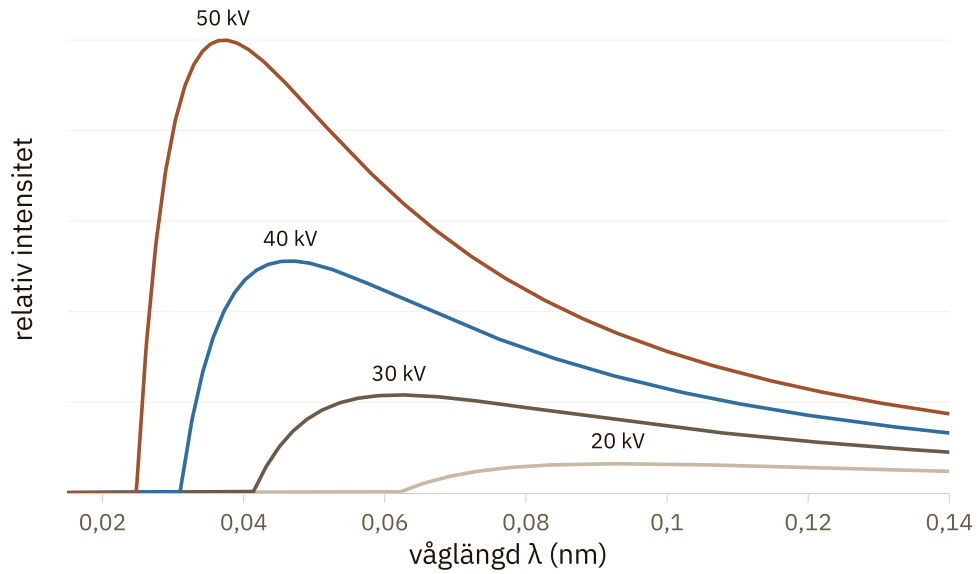
#fysik #kvantfysik #fenomen

Kurs: F0005T **Förkunskaper:** Fotonen

Röntgenstrålning med typisk våglängd $0{,}001–1$ nm produceras när elektroner accelererade genom spänningen V bromsas in i ett mål — den omvända processen mot fotoelektriska effekten, elektron till foton i stället för foton till elektron. Vågmodellen förutsäger alla frekvenser, men experimentet visar en skarp undre gräns för våglängden som bara beror på accelerationsspänningen: den kortaste våglängden fås när hela elektronens kinetiska energi blir en enda foton.

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eV}$$

Fysika: Fd3 (gränsvåglängd för kontinuerlig röntgenstrålning, med U för spänningen)



Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\lambda_{\text{min}}}_{\substack{\text{kortaste}\\ \text{våglängden}}} = \frac{\overbrace{hc}^{1240\ \text{eV·nm}}}{\underbrace{eV}_{\substack{\text{en elektrons energi}\\ \text{vid anoden}}}}$$

Den kortaste våglängden får man när **hela** elektronens energi eV blir en enda foton. Dubblar man spänningen halveras λ_{min}.

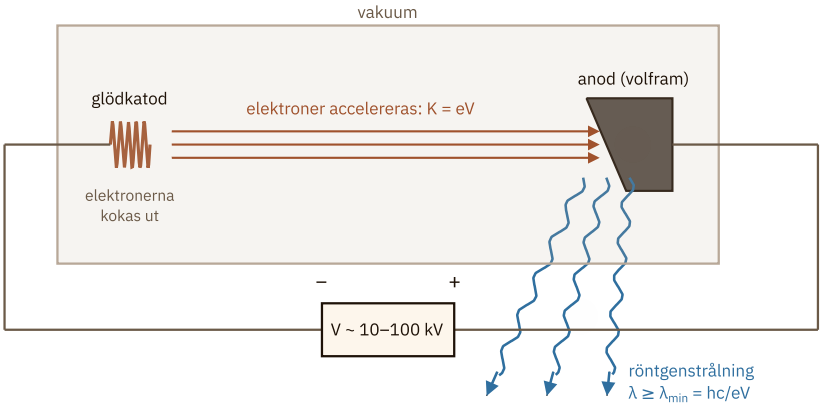
---

1. Röntgenröret

En glödande katod släpper ut elektroner (termisk emission), och spänningen V mellan katod och anod accelererar dem. Varje elektron har laddningen $-e$ och får den kinetiska energin

$$K = eV$$

när den når anoden. Där bromsas den in och en del av energin blir röntgenfotoner. Katodens utträdesarbete och elektronernas starthastighet är försumbara jämfört med eV, som är flera tusen elektronvolt.



Röntgenröret. Glödkatoden kokar ut elektroner, spänningen V accelererar dem mot anoden, och där bromsas de in och sänder ut röntgen. Ingen foton kan få mer energi än eV, därav λ_{min}.

---

2. Den kortaste våglängden

Den mest energirika fotonen uppstår när elektronen stoppas i en enda smäll och **hela** K blir en enda foton:

$$hf_{\max} = eV$$

Med $f = c/\lambda$ svarar störst frekvens mot minst våglängd:

$$\frac{hc}{\lambda_{\min}} = eV$$

vilket ger formeln i rutan. Två saker följer direkt:

- $\lambda_{\min}$ beror **bara på spänningen** — inte på anodmaterialet och inte på strömmen genom röret.
- Med $hc \approx 1240$ eV·nm blir $\lambda_{\min}$ i nm lika med $1{,}24$ delat med spänningen i kV.

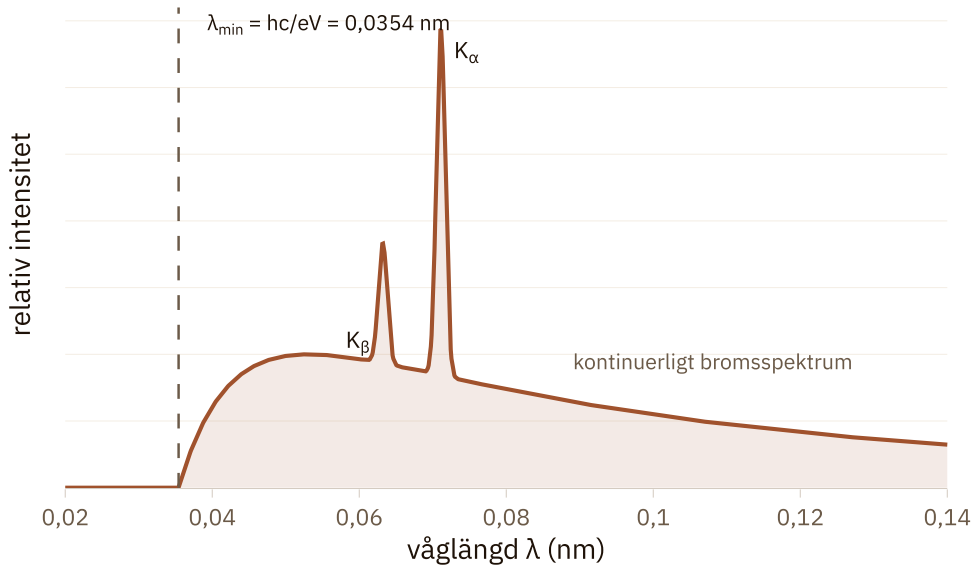
Vågmodellen kan inte förklara gränsen: en inbromsad laddning borde stråla på alla frekvenser, ungefär som cymbaler som slås ihop ger ljud i alla frekvenser.

---

3. Spektrumets två delar

Ett uppmätt röntgenspektrum består av två bidrag:

1. **Ett kontinuerligt spektrum** från elektroner som bromsas in i många steg, se Bromsstrålning. Det börjar vid $\lambda_{\min}$ och sträcker sig mot längre våglängder.
2. **Skarpa toppar** med våglängder som är typiska för anodens grundämne. De uppstår när en inkommande elektron slår ut en elektron ur ett inre skal och en elektron längre ut faller ned i hålet, se Moseleys lag. K_α är övergången från $n = 2$ till $n = 1$, K_β från $n = 3$ till $n = 1$.



Röntgenspektrum från en molybdenanod vid 35 kV. Kontinuumet börjar vid $\lambda_{\min} = hc/eV$ och topparna K_α ($0{,}071$ nm) och K_β ($0{,}063$ nm) är molybdens egna. Kontinuets form är schematisk.

Höjer vi spänningen flyttas $\lambda_{\min}$ åt vänster medan topparna står kvar. Ökar vi strömmen blir allt starkare men ingenting flyttas.

⚠ **Vanliga fel**

- **Spänningen i kV sätts in som V.** 30 kV är $3{,}0 \cdot 10^4$ V; med fel faktor tusen blir λ_{min} helt fel.
- λ_{min} **beror på anodmaterialet.** Det gör den inte — bara topparna gör det.
- **Strömmen påverkar** λ_{min}**.** Fler elektroner ger fler fotoner, inte mer energirika.
- λ_{min} **och** λ_{max} **förväxlas.** Spektrumet har en skarp *undre* gräns i våglängd, som svarar mot en *övre* gräns i frekvens och fotonenergi.

---

4. Lösta exempel

Exempel — Tandröntgen vid 30 kV

Ett röntgenrör arbetar med $30{,}0$ kV. Bestäm den kortaste våglängden och den högsta frekvensen i strålningen.

Lösning

Kortaste våglängden. Elektronens energi är $eV = 30{,}0$ keV, så

$$\lambda_{\text{min}} = \frac{hc}{eV} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{30{,}0 \cdot 10^3\ \text{eV}} = \boxed{0{,}0413\ \text{nm}}$$

Högsta frekvensen.

$$f_{\text{max}} = \frac{eV}{h} = \frac{30{,}0 \cdot 10^3\ \text{eV}}{4{,}136 \cdot 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}} = \boxed{7{,}25 \cdot 10^{18}\ \text{Hz}}$$

Kontroll: $c/\lambda_{\text{min}} = 2{,}998 \cdot 10^8 / 4{,}13 \cdot 10^{-11} = 7{,}26 \cdot 10^{18}$ Hz.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Spänningen ur spektrumet

Ett uppmätt röntgenspektrum har sin kortaste våglängd vid $0{,}0500$ nm. Vilken spänning ligger över röret?

Lösning

Lös ut spänningen ur $eV = hc/\lambda_{\text{min}}$:

$$eV = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{0{,}0500\ \text{nm}} = 24\,800\ \text{eV}$$

så $V = \boxed{24{,}8\ \text{kV}}$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 38.2 Light Emitted as Photons: X-Ray Production

Bromsstrålning

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Röntgenstrålning

Bromsstrålning är det kontinuerliga underlaget i ett röntgenspektrum. Den uppstår när infallande elektroner bromsas upp i en serie kollisioner i målet: varje kollision avger en foton, och eftersom energin kan fördelas godtyckligt över kollisionerna blir spektrumet kontinuerligt ovanför $\lambda_{\min}$. Topparna som sticker upp ur kontinuumet kommer däremot från övergångar mellan atomorbitaler och är materialspecifika.

Formeln, symbol för symbol

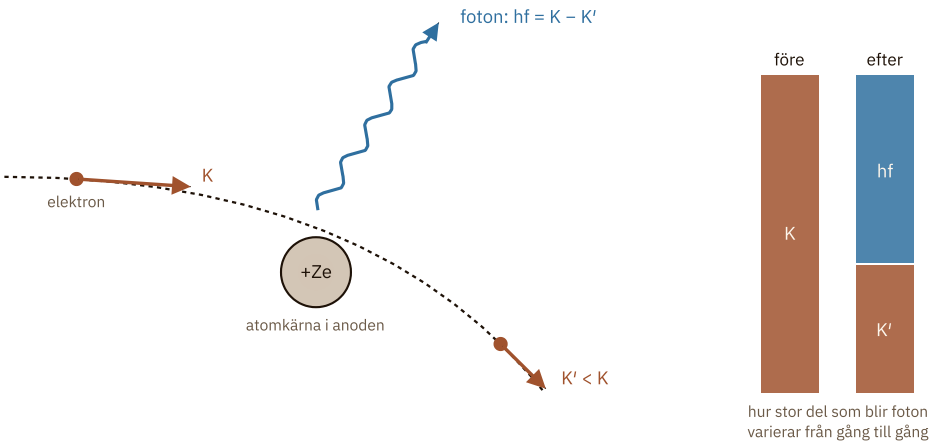
$$\underbrace{hf}_{\substack{\text{fotonens}\\ \text{energi}}} = \underbrace{K}_{\substack{\text{energin}\\ \text{före}}} - \underbrace{K'}_{\substack{\text{energin}\\ \text{efter}}} \leq \underbrace{eV}_{\substack{\text{allt den}\\ \text{har}}}$$

K och K' är elektronens rörelseenergi före och efter inbromsningen, och fotonen tar skillnaden. Eftersom K' kan bli vad som helst mellan 0 och K blir spektrumet kontinuerligt, med en skarp gräns där $K' = 0$.

---

1. Varför en inbromsad elektron strålar

En laddning som accelereras sänder ut elektromagnetisk strålning (se Elektromagnetiska vågor). En elektron som träffar anoden i ett röntgenrör bromsas in så kraftigt av atomkärnornas fält att strålningen hamnar i röntgenområdet, med våglängder kring 10^{-12}–10^{-9} m. Namnet är tyskt: *Bremsstrahlung*, bromsstrålning.



En elektron passerar nära en atomkärna i anoden, dras mot den och byter riktning. Accelerationen gör att den strålar: fotonen får energin $K - K'$. Hur stor del som blir foton varierar från gång till gång.

---

2. Varför spektrumet blir kontinuerligt

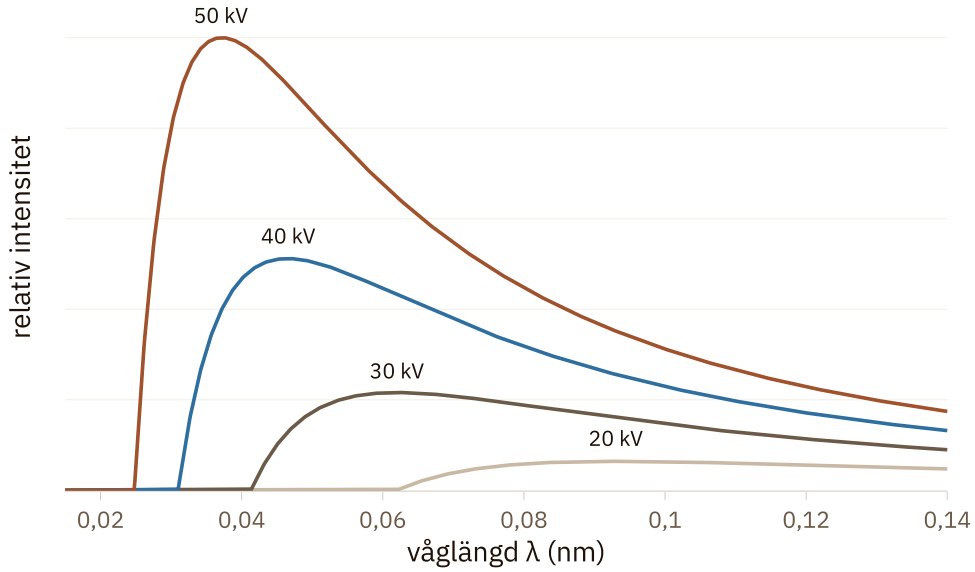
Elektronen har energin eV när den når anoden. De flesta elektroner stoppas inte i en enda kollision utan tappar energin bit för bit i en serie möten med anodens atomer. I varje möte kan en foton med energin lika med den förlorade kinetiska energin sändas ut:

$$hf = K_{\text{före}} - K_{\text{efter}}$$

Eftersom energiförlusten i ett enskilt möte kan vara vad som helst mellan noll och elektronens hela energi får vi alla fotonenergier upp till eV. Det ger ett kontinuerligt spektrum med en skarp gräns:

$$hf \le eV \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda \ge \lambda_{\text{min}} = \frac{hc}{eV}$$

Gränsen härleds i Röntgenstrålning; den gäller bara bromsstrålningen, inte de karakteristiska topparna.



Bromsspektrum vid fyra spänningar (schematisk form). Högre spänning flyttar $\lambda_{\min}$ mot kortare våglängder och ger mer strålning totalt. Kurvorna börjar vid $\lambda_{\min} = hc/eV$, oberoende av anodmaterialet.

---

3. Bromsstrålning eller karakteristisk strålning?

	Bromsstrålning	**Karakteristisk strålning**
Orsak	Elektronen bromsas i kärnornas fält	Elektron i ett inre skal slås ut, hålet fylls
Spektrum	Kontinuerligt, från $\lambda_{\min}$ och uppåt	Skarpa toppar (K_α, K_β, ...)
Beror på spänningen	Ja, $\lambda_{\min} = hc/eV$	Nej, men spänningen måste räcka för att slå ut elektronen
Beror på anodmaterialet	Formen, inte gränsen	Ja, helt, se Moseleys lag

⚠ **Vanliga fel**

- **Topparna tas för bromsstrålning.** De sticker upp ur kontinuumet men har en helt annan orsak.

- **Varje elektron ger en foton.** En elektron kan ge många fotoner på vägen in i anoden; bara summan av deras energier är begränsad till eV.
- **Kortare våglängd tros ge mer strålning.** Intensiteten är noll vid $\lambda_{\min}$ och har sitt maximum en bit ovanför.

---

4. Lösta exempel

Exempel — En elektron, två fotoner

En elektron accelereras genom $50{,}0$ kV och bromsas in i två steg. I det första steget sänds en foton med energin $20{,}0$ keV ut. Vilken våglängd har den fotonen, och vilken är den kortaste möjliga våglängden för fotonen från det andra steget?

Lösning

Första fotonen.

$$\lambda_1 = \frac{hc}{E_1} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{20{,}0\cdot 10^3\ \text{eV}} = \boxed{0{,}0620\ \text{nm}}$$

Kvar efter första steget. Elektronen hade $50{,}0$ keV och har nu

$$K = 50{,}0 - 20{,}0 = 30{,}0\ \text{keV}$$

Andra fotonen. Kortast våglängd fås om hela återstoden blir en foton:

$$\lambda_{2,\min} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{30{,}0\cdot 10^3\ \text{eV}} = \boxed{0{,}0413\ \text{nm}}$$

Båda fotonerna är längre än rörets $\lambda_{\min} = 1240/50\,000 = 0{,}0248$ nm, som bara nås om hela 50 keV blir en enda foton.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 38.2 Light Emitted as Photons: X-Ray Production

Comptonspridning

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

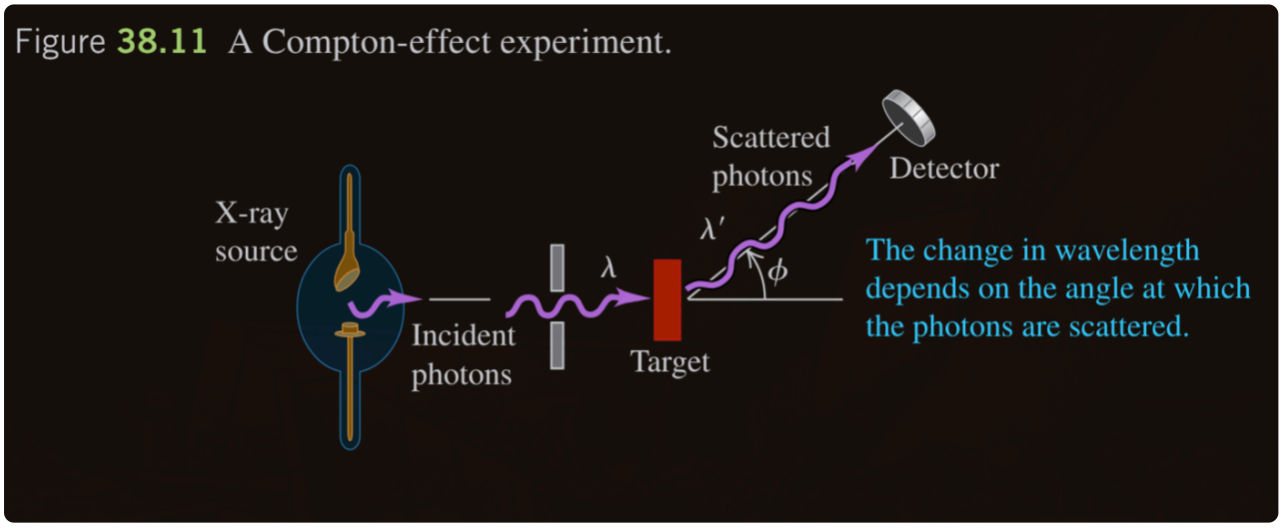
#fysik #kvantfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Fotonen, Rörelsemängd och kollisioner

När röntgenstrålning träffar materia sprids en del av fotonerna med lägre frekvens än den infallande — något vågmodellen inte kan ge, eftersom en våg skulle behålla sin frekvens. Compton härledde våglängdsförskjutningen genom att behandla mötet som en relativistisk kollision mellan en foton och en elektron, med energi och rörelsemängd bevarade — helt i enlighet med partiklar som krockar.

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$

Fysika: Fd3 (Comptonspridning, med θ för spridningsvinkeln)



Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\lambda' - \lambda}_{\text{hur mycket längre våglängden blir}} = \underbrace{\frac{h}{mc}}_{\substack{\text{Compton-}\\\text{våglängden}\\2{,}43\text{ pm}}} \underbrace{(1 - \cos\phi)}_{\substack{0\text{ rakt fram,}\\2\text{ rakt bakåt}}}$$

Här är m elektronens massa. Ökningen beror **bara** på spridningsvinkeln ϕ, inte på vilken våglängd man startar med. Den är alltid högst $2h/mc \approx 4{,}9$ pm, och därför märks den bara för röntgen och gamma.

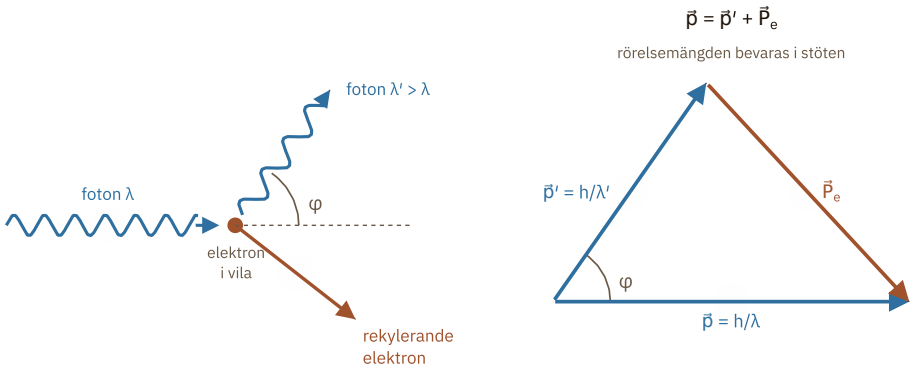
---

1. Vågmodell mot fotonmodell

Vågmodellen. Det infallande ljusets elektriska fält får elektronen att svänga med samma frekvens, och elektronen strålar ut igen som en liten antenn. Det spridda ljuset får då **samma** frekvens och våglängd som det infallande.

Fotonmodellen. Spridningen är en kollision mellan två partiklar: en foton och en elektron i vila. Fotonen lämnar ifrån sig en del av sin energi och rörelsemängd till elektronen, som rekylerar. Den spridda fotonen har då **mindre** energi och därmed **längre** våglängd, och förändringen beror på vinkeln.

Compton mätte på röntgenstrålning som spreds mot grafit och fann precis det fotonmodellen förutsäger.



Comptonspridning som en stöt. Vänster: fotonen studsar mot en elektron i vila och fortsätter med längre våglängd, medan elektronen rekylerar. Höger: rörelsemängden bevaras, så $\vec{p}$, $\vec{p}'$ och elektronens $\vec{P}_e$ bildar en triangel.

---

2. Härledningen

Elektronens rekyl kan vara relativistisk, så vi använder relativistisk energi och rörelsemängd. Beteckningar: infallande foton $p = h/\lambda$ och energi pc, spridd foton $p' = h/\lambda'$ och energi $p'c$, elektronens slutliga rörelsemängd $\vec{P}_e$ och energi E_e med $E_e^2 = (mc^2)^2 + (P_e c)^2$.

Härledning av Comptonformeln

Energins bevarande. Elektronen har först bara sin viloenergi:

$$pc + mc^2 = p'c + E_e$$

Flytta över och kvadrera:

$$(pc - p'c + mc^2)^2 = E_e^2 = (mc^2)^2 + (P_e c)^2$$

Rörelsemängdens bevarande. $\vec{p} = \vec{p}' + \vec{P}_e$, alltså $\vec{P}_e = \vec{p} - \vec{p}'$. Skalärprodukten med sig själv ger, med ϕ vinkeln mellan $\vec{p}$ och $\vec{p}'$:

$$P_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\phi$$

Sätt in. Utveckla vänsterledet och sätt in P_e^2:

$$p^2c^2 + p'^2c^2 + m^2c^4 - 2pp'c^2 + 2pmc^3 - 2p'mc^3 = m^2c^4 + p^2c^2 + p'^2c^2 - 2pp'c^2\cos\phi$$

Termerna p^2c^2, p'^2c^2 och m^2c^4 tar ut varandra. Dela med $2c^2$:

$$-pp' + mc(p - p') = -pp'\cos\phi$$

$$mc(p - p') = pp'(1 - \cos\phi)$$

Dela med pp':

$$\frac{mc}{p'} - \frac{mc}{p} = 1 - \cos\phi$$

Sätt in $p = h/\lambda$ och $p' = h/\lambda'$ och multiplicera med $h/(mc)$:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$

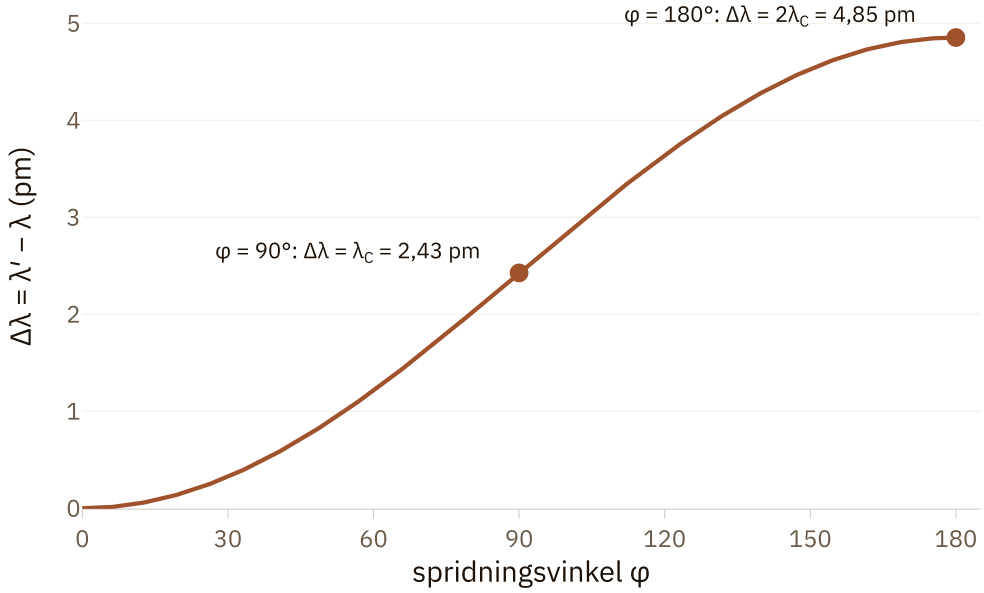
3. Comptonvåglängden

Faktorn framför parentesen har dimensionen längd och kallas elektronens **Comptonvåglängd**:

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}} = 2{,}426 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

Förskjutningen beror bara på vinkeln, inte på den infallande våglängden:

- $\phi = 0$: ingen förskjutning — fotonen har inte krockat.
- $\phi = 90°$: $\Delta\lambda = \lambda_C$.
- $\phi = 180°$ (rakt tillbaka): störst förskjutning, $\Delta\lambda = 2\lambda_C$.



Comptonförskjutningen som funktion av spridningsvinkeln. Den växer från noll rakt fram till $2\lambda_C \approx 4{,}85$ pm rakt bakåt.

---

4. Varför bara röntgen?

Förskjutningen är högst $4{,}85$ pm. För synligt ljus med $\lambda = 500$ nm är den relativa ändringen

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \le \frac{4{,}85 \cdot 10^{-12}}{500 \cdot 10^{-9}} \approx 10^{-5}$$

vilket är omätbart med enkla medel. För röntgen med $\lambda \sim 0{,}1$ nm blir den några procent och syns tydligt. Därför krävdes röntgen för att se effekten.

I Comptons mätningar syns också en topp vid den **oförändrade** våglängden. Den kommer från fotoner som sprids mot hårt bundna elektroner, där hela atomen rekylerar. Då ska m i formeln vara atomens massa, och förskjutningen blir försumbar.

5. Elektronens rekylenergi

Energin som fotonen förlorar går till elektronen:

$$\boxed{K_e = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}}$$

Störst blir den när fotonen studsar rakt tillbaka, $\phi = 180^\circ$.

⚠ Vanliga fel

- **λ och λ' byts.** Den spridda fotonen har alltid *längre* våglängd: $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$.
- **Fel vinkel.** ϕ är fotonens spridningsvinkel, mätt från den infallande riktningen — inte elektronens rekylvinkel.
- **Räknaren i radianer.** $\cos 120^\circ = -0{,}5$; i radianer blir det något helt annat.
- **Energierna subtraheras i fel ordning.** $K_e = hc/\lambda - hc/\lambda'$ är positivt eftersom $\lambda' > \lambda$.
- **Förskjutningen tros bero på λ.** $\Delta\lambda$ beror bara på vinkeln; det är den *relativa* ändringen $\Delta\lambda/\lambda$ som beror på våglängden.

6. Lösta exempel

Exempel — Röntgen spridd 120°

Röntgenfotoner med $\lambda = 0{,}0500$ nm sprids mot fria elektroner. Bestäm våglängden hos fotoner som sprids 120° och den kinetiska energi som elektronen får.

Lösning

Förskjutningen. $\cos 120^\circ = -0{,}5$, så

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos 120^\circ) = 2{,}426\ \text{pm} \cdot 1{,}5 = 3{,}64\ \text{pm}$$

Spridd våglängd.

$$\lambda' = 0{,}0500\ \text{nm} + 0{,}00364\ \text{nm} = \boxed{0{,}0536\ \text{nm}}$$

Elektronens energi. Med $hc = 1240$ eV·nm:

$$K_e = \frac{1240}{0{,}0500} - \frac{1240}{0{,}05364} = 24\,800 - 23\,117 \approx \boxed{1{,}68\ \text{keV}}$$

Fotonen har tappat ungefär $7\,\%$ av sin energi.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Största rekylenergin

Röntgenfotoner med $\lambda = 0{,}100$ nm sprids mot elektroner. Vilken är den största kinetiska energi en elektron kan få?

Lösning

Största energiöverföringen sker vid $\phi = 180^\circ$, där $\Delta\lambda = 2\lambda_C$:

$$\lambda' = 0{,}100\ \text{nm} + 2 \cdot 0{,}002426\ \text{nm} = 0{,}10485\ \text{nm}$$

$$K_{e,\max} = \frac{1240}{0{,}100} - \frac{1240}{0{,}10485} = 12\,398 - 11\,825 \approx \boxed{574\ \text{eV}}$$

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 38.3 Light Scattered as Photons: Compton Scattering and Pair Production

Parproduktion

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Fotonen, Relativitetsteori

---

En gammafoton som träffar ett material kan antingen spridas eller omvandlas till ett elektron-positronpar. Processen går inte att beskriva med vågmodellen för ljus över huvud taget. Den kräver en tröskelenergi motsvarande de två partiklarnas viloenergi, vilket svarar mot en maximal våglängd $\lambda_{\max} = hc/E_{\min} = 1{,}213$ pm. Den omvända processen, Annihilation, är grunden för PET.

$$\boxed{E_{\min} = 2mc^2 = \frac{hc}{\lambda_{max}} = 1{,}022 \text{ MeV}}$$

Fysika: Fd1 (viloenergi), Fd3 (fotonenergi), Te (m_e)

Trick i beräkningar med fysika

m_e ges i tre enheter.

- kg
- u
- $\frac{MeV}{c^2}$

Så om man ska räkna ut $2mc^2$ så kan man räkna flytta över c^2 så får man $m_e c^2 = 0,510998950 MeV \implies 2m_e c^2 \approx 1,022 MeV$

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{E_{\min}}_{\text{minsta foton-energin}} = 2 \underbrace{m_e c^2}_{\text{en partikels viloenergi}} = \underbrace{\frac{hc}{\lambda_{\max}}}_{\text{längsta våglängden}}$$

$$\underbrace{E_\gamma}_{\text{fotonens energi}} = \underbrace{2m_e c^2}_{\text{skapar paret}} + \underbrace{K_- + K_+}_{\text{parets rörelseenergi}}$$

Fotonen måste minst bära viloenergin för *två* partiklar, elektronen och positronen. Allt över tröskeln blir rörelseenergi, och eftersom hela energin sitter i en enda foton svarar tröskeln mot en största våglängd.

---

1. Varför bara fotonbilden fungerar

Tre krav måste uppfyllas samtidigt när en foton omvandlas till ett elektron-positronpar:

- **Laddning.** Fotonen är oladdad, så partiklarna måste komma i par med laddningarna $-e$ och $+e$.
- **Energi.** Fotonen måste minst bära parets viloenergi $2m_e c^2$, vilket är gränsen i rutan ovan.
- **Rörelsemängd.** Fotonens rörelsemängd $p = E/c$ måste tas upp av något.

Vågmodellen har ingen mekanism för att en våg plötsligt ska försvinna och ersättas av två massiva partiklar, och ingen förklaring till varför det bara sker under en viss våglängd. I fotonbilden är det ren energibokföring: en enskild foton med $E = hc/\lambda$ räcker, eller räcker inte.

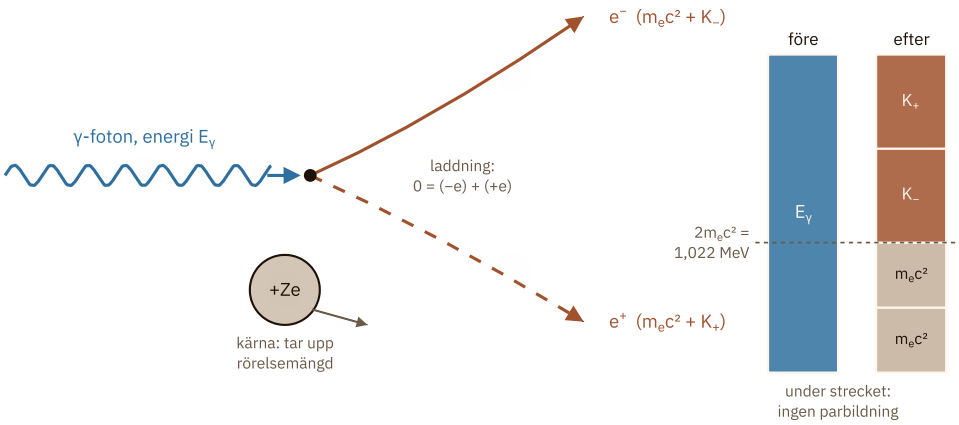
---

2. Varför det behövs en kärna i närheten

En ensam foton i vakuum kan inte bilda ett par, hur energirik den än är, eftersom energi och rörelsemängd då inte kan bevaras samtidigt. Kombinationen $E^2 - (pc)^2$ har samma värde i alla inertialsystem (se Relativitetsteori):

- för fotonen är $E^2 - (pc)^2 = 0$,
- för paret är $E^2 - (pc)^2 \geq (2m_e c^2)^2$, med likhet när båda partiklarna står stilla i sitt gemensamma tyngdpunktssystem.

Värdena kan aldrig vara lika, så processen är omöjlig. En atomkärna i närheten kan ta upp rörelsemängd, och då går det. Kärnan får samtidigt lite rörelseenergi, så tröskeln blir något högre än $2m_e c^2$.



En gammafoton omvandlas till ett elektron-positronpar i kärnans fält. Kärnan tar upp rörelsemängd men nästan ingen energi. Till höger energibokföringen: $2m_ec^2$ går åt till att skapa paret, och resten blir parets rörelseenergi.

Härledning av tröskeln när en kärna med massan M rekylerar

Före. Fotonen har energin E och rörelsemängden E/c, och kärnan står still:

$$E_{\text{tot}} = E + Mc^2$$

$$p_{\text{tot}}c = E$$

Invarianten före stöten.

$$E_{\text{tot}}^2 - (p_{\text{tot}}c)^2 = (E + Mc^2)^2 - E^2 = 2EMc^2 + M^2c^4$$

Vid tröskeln. Kärnan, elektronen och positronen står alla still i tyngdpunktssystemet, så invarianten är kvadraten på den totala viloenergin:

$$2EMc^2 + M^2c^4 = (M + 2m_e)^2c^4$$

$$2EMc^2 = 4Mm_ec^4 + 4m_e^2c^4$$

$$E_{\text{th}} = 2m_ec^2\left(1 + \frac{m_e}{M}\right)$$

Resultatet är

$$\boxed{E_{\text{th}} = 2m_ec^2\left(1 + \frac{m_e}{M}\right)}$$

För en tung kärna är m_e/M av storleksordningen 10^{-6} och tillägget försumbart, så $1{,}022$ MeV gäller i praktiken. Sker processen vid en elektron, $M = m_e$, blir tröskeln dubbelt så hög — se det andra exemplet.

---

3. Hur energin fördelas

Över tröskeln går överskottet till partiklarnas rörelseenergi. Med kärnans rekyl försummad ger energins bevarande

$$E_\gamma = (m_e c^2 + K_-) + (m_e c^2 + K_+)$$

$$\boxed{K_- + K_+ = E_\gamma - 2m_e c^2}$$

Hur summan delas mellan elektron och positron bestäms inte av bevarandelagarna, eftersom kärnan tar upp en okänd del av rörelsemängden. Rörelseenergin blir ofta jämförbar med $m_e c^2$, så farten måste räknas relativistiskt med $K = (\gamma - 1)m_e c^2$.

---

4. Den omvända processen: annihilation

När en positron möter en elektron försvinner båda och ersätts av fotoner, oftast två. En enda foton är omöjlig av samma skäl som i avsnitt 2, nu baklänges: i parets tyngdpunktssystem är rörelsemängden noll, men en ensam foton har aldrig rörelsemängden noll.

Är partiklarna nästan i vila är den totala rörelsemängden noll. De två fotonerna går då åt motsatta håll med lika stora energier:

$$2m_e c^2 = 2E_\gamma$$

$$E_\gamma = m_e c^2 = 511 \text{ keV}$$

Det är principen bakom PET. En positronsändande isotop i kroppen ger fotonpar på 511 keV som sänds ut rygg mot rygg, och två detektorer som slår till samtidigt anger en linje genom kroppen där annihilationen skedde.

⚠ **Vanliga fel**

- **Glömd faktor 2.** Tröskeln är $2m_e c^2 = 1{,}022$ MeV eftersom två partiklar ska skapas. $m_e c^2 = 0{,}511$ MeV är energin per foton vid annihilation i vila.
- **Minsta och största våglängd byts.** Tröskeln är en *minsta* energi och alltså en *största* våglängd, $\lambda_{\max} = 1{,}213$ pm. Kortare våglängd fungerar, längre gör det inte.
- **Klassisk rörelseenergi.** Partiklarna får ofta K av samma storlek som $m_e c^2$, och $v = \sqrt{2K/m_e}$ ger då en fart större än c. Använd $K = (\gamma - 1)m_e c^2$.
- **Parproduktion i tomma rymden.** Utan en kärna eller en annan partikel som tar upp rörelsemängd kan processen inte ske.
- **En foton vid annihilation.** Ett par i vila ger minst två fotoner, vars rörelsemängder tar ut varandra.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Paret från en 2,50 MeV-foton

En gammafoton med energin $2{,}50$ MeV bildar ett elektron-positronpar nära en blykärna. Kärnans rekyl kan försummas, och elektronen och positronen får lika stor rörelseenergi. Bestäm fotonens våglängd, varje partikels rörelseenergi och partiklarnas fart.

Lösning

Våglängden. Med $hc = 1240$ eV·nm:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{2{,}50\cdot 10^{6}\ \text{eV}} = 4{,}96\cdot 10^{-4}\ \text{nm} = \boxed{0{,}496\ \text{pm}}$$

Den är kortare än $\lambda_{\max} = 1{,}213$ pm, så parproduktion är möjlig.

Rörelseenergin. Överskottet delas lika:

$$K = \frac{E_\gamma - 2m_ec^2}{2} = \frac{2{,}50 - 1{,}022}{2}\ \text{MeV} = \boxed{0{,}739\ \text{MeV}}$$

Farten. K är större än m_ec^2, så vi räknar relativistiskt:

$$\gamma = 1 + \frac{K}{m_ec^2} = 1 + \frac{0{,}739}{0{,}511} = 2{,}45$$

Fysika: Fd1 (i formen K = mc²(γ − 1))

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2{,}45^2}} \approx \boxed{0{,}913}$$

Rimlighetskoll. Den klassiska formeln hade gett $v = \sqrt{2K/m_e} \approx 1{,}70\,c$, vilket är omöjligt.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Tröskeln vid en blykärna och vid en elektron

Bestäm tröskelenergin för parproduktion (a) i närheten av en blykärna med massan 208 u och (b) vid en fri elektron i vila. Hur mycket skiljer sig (a) från $2m_e c^2$? Elektronens massa är $5{,}486 \cdot 10^{-4}$ u.

Lösning

a) Kvoten mellan massorna är

$$\frac{m_e}{M} = \frac{5{,}486 \cdot 10^{-4}}{208} = 2{,}64 \cdot 10^{-6}$$

så tillägget är

$$2m_e c^2 \cdot \frac{m_e}{M} = 1{,}022 \cdot 10^{6}\ \text{eV} \cdot 2{,}64 \cdot 10^{-6} \approx \boxed{2{,}70\ \text{eV}}$$

Tröskeln är fortfarande $E_{\text{th}} = \boxed{1{,}022\ \text{MeV}}$ på fyra värdesiffror.

b) Med $M = m_e$ blir parentesen 2:

$$E_{\text{th}} = 2m_e c^2\,(1 + 1) = 4m_e c^2 = 4 \cdot 0{,}511\ \text{MeV} = \boxed{2{,}04\ \text{MeV}}$$

Den lätta elektronen rekylerar kraftigt och tar med sig en stor del av fotonens energi, så tröskeln fördubblas. Efteråt finns tre partiklar i rörelse: den ursprungliga elektronen och det nya paret.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 38.3 Light Scattered as Photons: Compton Scattering and Pair Production

Komplementaritetsprincipen

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #princip

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Fotonen, Diffraktion

Ljusets vågnatur och partikelnatur utesluter inte varandra utan behövs båda för en fullständig bild. Samma diffraktionsexperiment visar det: mönstrets form förklaras av vågnaturen, medan det faktum att en fotomultiplikator räknar diskreta energipaket förklaras av partikelnaturen. Mönstret byggs upp statistiskt av enskilda fotoner. En foton är inte ett objekt i en punkt, och fotoner med samma initiala rörelse följer inte alla samma väg — newtonsk mekanik kan inte ange dess framtida bana, bara sannolikheten att den träffar en viss punkt.

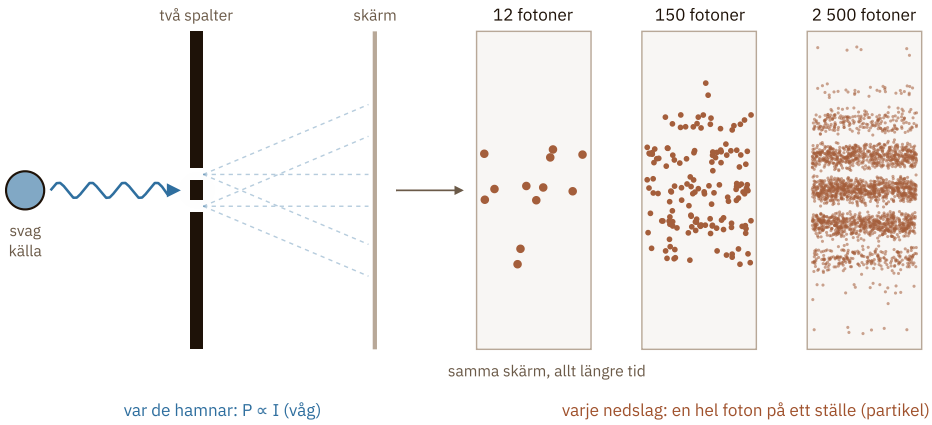
1. Principen

Niels Bohr formulerade **komplementaritetsprincipen** år 1928: våg- och partikelbeskrivningen kompletterar varandra. Båda behövs för en fullständig bild av ljuset, men för att beskriva en och samma del av ett experiment används bara den ena. Vilken som gäller avgörs av vad vi frågar efter.

Fenomen	Beskrivningen som förklarar det
Interferens och diffraktion, mönstrets form på skärmen	Våg
Att detektorn registrerar enskilda nedslag med energin hf	Partikel
Fotoelektriska effekten, Comptonspridning, Parproduktion	Partikel

2. Mönstret byggs upp av enskilda fotoner

Gör vi ljuset i ett dubbelspaltexperiment så svagt att fotonerna kommer en och en, ger varje foton ett enda nedslag på en slumpmässig plats. De första nedslagen ser helt oordnade ut. Efter tusentals fotoner framträder ändå samma interferensmönster som vågteorin förutsäger.



Dubbelspalt med så svagt ljus att fotonerna kommer en och en. Varje foton ger ett enda nedslag på ett slumpmässigt ställe, men efter tusentals nedslag framträder vågteorins interferensmönster.

Tolkningen är statistisk. Vågteorins intensitet $I(y)$ anger inte hur stor del av en foton som hamnar vid y, utan hur **sannolikt** det är att en hel foton hamnar där:

$$\boxed{P(y)\,dy \propto I(y)\,dy}$$

Mönstret uppstår även när det i genomsnitt bara finns en foton åt gången i apparaten (se exemplet). Det är alltså inte olika fotoner som interfererar med varandra; det är varje fotons våg som passerar båda spalterna.

---

3. Vilken väg tog fotonen?

Frågan “genom vilken spalt gick fotonen?” är ställd i partikelspråk, men det är vågnaturen som bestämmer var fotonerna hamnar. Försöker vi ta reda på vägen, till exempel genom att låta en partikel vid ena spalten rekylera när fotonen passerar, ändrar själva växelverkan fotonens rörelsemängd så mycket att interferensmönstret försvinner. Vi kan få väginformation eller interferens, men aldrig båda i samma experiment. Samma gräns uttrycks kvantitativt i Heisenbergs osäkerhetsprincip.

Principen gäller inte bara ljus. Elektroner som skickas en i taget genom en dubbelspalt bygger upp samma slags mönster (se Elektrondiffraktion och De Broglie-våglängd).

⚠ Vanliga fel

- **“Ljuset är ibland våg och ibland partikel.”** Ljuset är detsamma hela tiden. Det är *beskrivningen* som väljs efter vilken fråga som ställs.
- **Mönstret förklaras med att fotoner interfererar med varandra.** Mönstret uppstår även när fotonerna kommer en och en.
- **Intensiteten tolkas som en del av en foton.** En foton registreras alltid hel och på ett ställe. Intensiteten anger en sannolikhet.
- **Banan förutsägs.** Två fotoner med samma begynnelsetillstånd kan hamna på olika ställen. Bara fördelningen går att förutsäga.

---

4. Lösta exempel

Exempel — En foton i taget

En dubbelspalt belyses med ljus med våglängden 550 nm och effekten $1{,}0 \cdot 10^{-13}$ W. Avståndet från ljuskällan till skärmen är $1{,}20$ m. Hur många fotoner passerar per sekund, hur långt är det i genomsnitt mellan två på varandra följande fotoner, och hur många fotoner finns i genomsnitt i apparaten samtidigt? Vad säger resultatet om hur interferensmönstret uppstår?

Lösning

Fotonenergin.

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}}{550 \cdot 10^{-9}} = 3{,}61 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Fysika: Fd3 (fotonenergi), Te (h, c)

Antal fotoner per sekund. Som i Fotonen:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{P}{E} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-13}}{3{,}61 \cdot 10^{-19}} = \boxed{2{,}77 \cdot 10^{5}\ \text{s}^{-1}}$$

Avståndet mellan fotonerna. På tiden $1/(dN/dt)$ mellan två fotoner hinner den första färdas

$$d = \frac{c}{dN/dt} = \frac{2{,}998 \cdot 10^{8}}{2{,}77 \cdot 10^{5}} \approx \boxed{1{,}08\ \text{km}}$$

Antal fotoner i apparaten.

$$\bar{N} = \frac{1{,}20}{1{,}08 \cdot 10^{3}} \approx \boxed{1{,}11 \cdot 10^{-3}}$$

Tolkning. I genomsnitt finns det nästan aldrig mer än en foton i apparaten. Ändå byggs interferensmönstret upp efter tillräckligt lång tid. Mönstret kan alltså inte komma från att fotoner växelverkar med varandra, utan varje foton landar enligt sannolikhetsfördelningen $P(y) \propto I(y)$ från vågbeskrivningen.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 38.4 Wave–Particle Duality, Probability, and Uncertainty

Heisenbergs osäkerhetsprincip

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #princip

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Komplementaritetsprincipen, Fraunhoferdiffraktion

---

Position och rörelsemängd kan inte båda bestämmas godtyckligt noga, och det är inte en fråga om mätinstrument utan en principiell gräns. Enkelspaltdiffraktionen visar kopplingen direkt: en smalare spalt ger mindre osäkerhet i y-läget men bredare mönster och därmed större osäkerhet i p_y — mindre Δp_y går bara att få genom att öka spaltbredden. Samma slags relation gäller mellan energi och tid, vilket sätter den naturliga linjebredden hos ett exciterat tillstånd.

$$\boxed{\Delta x\,\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Fysika: Fd3 (i formen $\Delta p_x \cdot \Delta x \geq h/4\pi$ och $\Delta E \cdot \Delta t \geq h/4\pi$)

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\Delta x}_{\substack{\text{osäkerhet}\\ \text{i läge}}}\ \underbrace{\Delta p_x}_{\substack{\text{osäkerhet i}\\ \text{rörelsemängd}}} \geq \underbrace{\frac{\hbar}{2}}_{\substack{\text{naturens}\\ \text{nedre gräns}}}$$

$$\underbrace{\Delta E}_{\substack{\text{oskärpa}\\ \text{i energi}}}\ \underbrace{\Delta t}_{\substack{\text{tillståndets}\\ \text{livstid}}} \geq \frac{\hbar}{2}$$

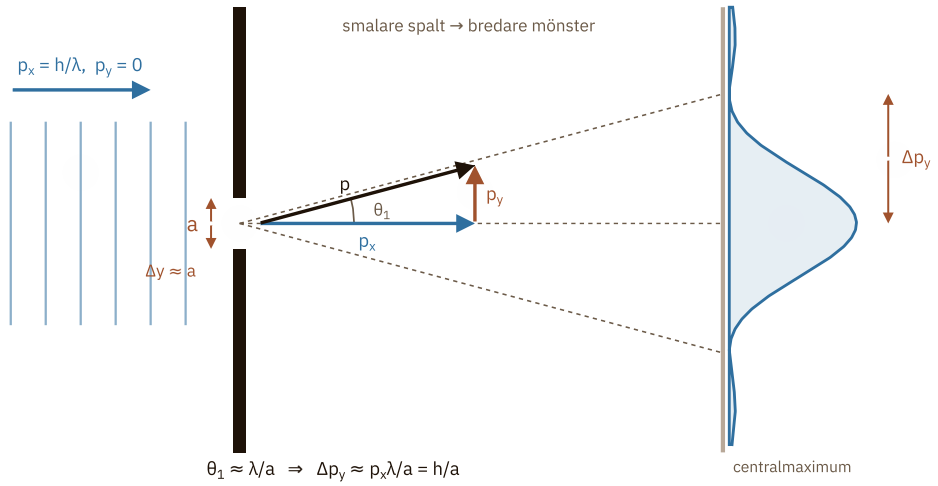
Produkten av två osäkerheter kan aldrig bli mindre än $\hbar/2$: pressar vi ihop den ena måste den andra växa. Gränsen är en egenskap hos vågen själv, inte hos mätinstrumentet.

---

1. Enkelspalten ger relationen

Parallellt monokromatiskt ljus med rörelsemängden $p_x = h/\lambda$ faller in mot en spalt med bredden a. Före spalten är $p_y = 0$. Vi vet inte var i spalten en viss foton passerar, så lägesosäkerheten i y-led är ungefär a. Efter spalten sprids fotonerna i ett diffraktionsmönster, och en foton som hamnar i kanten

av centralmaximum har fått en rörelsemängd i y-led.



Enkelspalten som lägesmätning: fotonen passerade någonstans inom bredden a, så $\Delta y \approx a$. En foton mot kanten av centralmaximum har fått $p_y = p_x \tan\theta_1 \approx p_x\lambda/a$, och därmed blir $a\,\Delta p_y \approx h$.

Härledning av $a\,\Delta p_y \geq h$

Första minimum. För $\lambda \ll a$ ligger det vid den lilla vinkeln

$$\theta_1 \approx \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$$

Rörelsemängden i kanten av centralmaximum. Fotonens riktning ger

$$\frac{p_y}{p_x} = \tan\theta_1 \approx \theta_1$$

$$p_y = p_x\,\frac{\lambda}{a}$$

Spridningen. Fotonerna i centralmaximum har p_y mellan $-p_x\lambda/a$ och $+p_x\lambda/a$, så

$$\Delta p_y \geq p_x\,\frac{\lambda}{a}$$

Sätt in $\lambda = h/p_x$.

$$\Delta p_y \geq p_x\,\frac{h}{p_x\,a} = \frac{h}{a}$$

$$a\,\Delta p_y \geq h$$

En smalare spalt ger mindre lägesosäkerhet men ett bredare mönster och därmed större osäkerhet i rörelsemängd. Relationen är grov, eftersom varken a eller Δp_y här är standardavvikelser.

---

2. Den skarpa formen

Mäts osäkerheterna som standardavvikelser blir gränsen $\hbar/2$ i stället för h. Det är relationen i rutan överst, med

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}055 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} = 6{,}582 \cdot 10^{-16}\ \text{eV} \cdot \text{s}$$

Fysika: Te

Tre saker att hålla isär:

- **Varje riktning för sig.** $\Delta x\,\Delta p_x \geq \hbar/2$, $\Delta y\,\Delta p_y \geq \hbar/2$ och $\Delta z\,\Delta p_z \geq \hbar/2$. Osäkerheten i x säger ingenting om p_y.
- **Inte ett mätfel.** Gränsen gäller oavsett instrument. En detektor måste växelverka med partikeln och ändrar då dess rörelse.
- **All materia.** Relationen härleddes för fotoner, men elektroner och andra partiklar har också vågegenskaper och lyder samma gräns.

Uppskattning av rörelseenergi. En partikel som är instängd i ett område med storleken Δx har av symmetriskäl medelvärdet $p_x = 0$, men spridningen är minst $\Delta p_x = \hbar/(2\Delta x)$. Rörelsemängdens storlek är alltså typiskt minst Δp_x, och den icke-relativistiska rörelseenergin blir

$$\boxed{K \approx \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{8m\,(\Delta x)^2}}$$

Ju trängre instängning, desto högre energi. För en elektron instängd i en atom ger uppskattningen några eV, alltså just atomära energier. Samma räkning förklarar varför elektroner inte faller in i kärnan: där skulle deras rörelseenergi bli enorm (se det första exemplet).

---

3. Vågpaket

En ren sinusvåg $A\sin(kx - \omega t)$ har en bestämd våglängd, och därmed en bestämd rörelsemängd och energi:

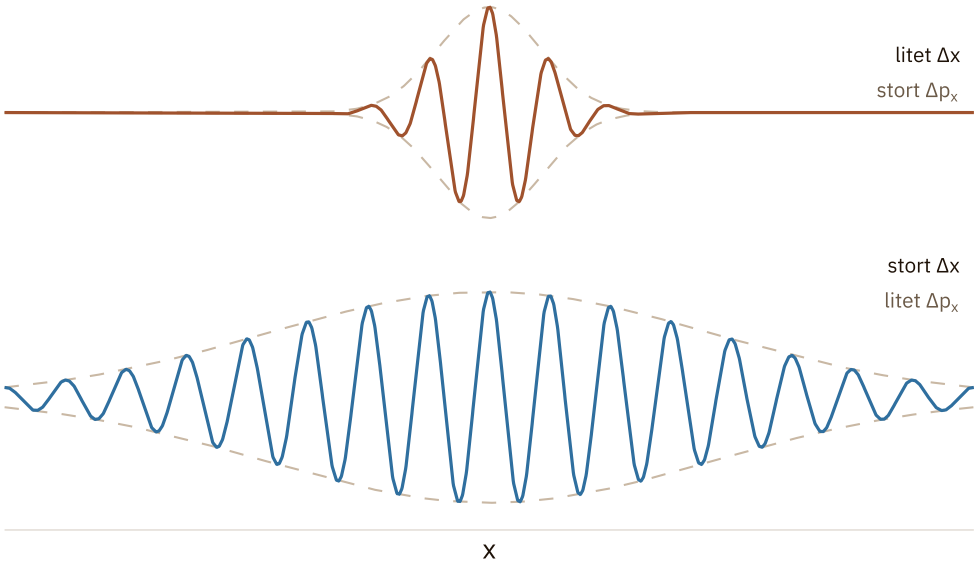
$$p_x = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

Fysika: Fd3 (de Broglie-våglängden)

$$E = hf = \hbar\omega$$

Fysika: Fd3 (fotonenergi)

Då är $\Delta p_x = 0$. Men vågen har samma amplitud längs hela x-axeln, så Δx är oändlig. För att lokalisera partikeln måste vi lägga ihop vågor med olika k. Summan blir ett **vågpaket** som bara är stort i ett begränsat område, men nu ingår flera värden på p_x. Ju smalare paket, desto fler våglängder behövs.



Två vågpaket med samma medelvåglängd. Det smala (överst) är väl lokaliserat men byggs upp av ett brett band av våglängder, alltså stort Δp_x. Det breda (nederst) liknar en ren sinusvåg: litet Δp_x men stort Δx.

---

4. Energi och tid – naturlig linjebredd

Registreras vågpaketet på ett fast ställe blir samma resonemang ett samband mellan tid och energi. En kort puls innehåller ett band av vinkelfrekvenser och därmed ett band av energier $\hbar\omega$. Den andra relationen i rutan gäller därför för varje tillstånd som bara finns under en tid Δt.

Ett exciterat atomtillstånd med medellivstiden τ har alltså en oskarp energi. Med $\Delta t = \tau$ blir den minsta osäkerheten

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2\tau}$$

Grundtillståndet lever hur länge som helst och har skarp energi, så hela osäkerheten hamnar i den utsända fotonen och ger spektrallinjen en bredd (se Linjespektrum). Bredden i våglängd fås genom att derivera $E = hc/\lambda$:

$$\frac{dE}{d\lambda} = -\frac{hc}{\lambda^2} = -\frac{E}{\lambda}$$

$$\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta E}{E}}$$

Det här är den **naturliga linjebredden**. Den är mycket liten, och i en verklig gas döljs den oftast av bredare effekter som dopplerbreddning och kollisioner mellan atomerna.

---

5. Bohrmodellen bryter mot principen

I Bohrs modell rör sig elektronen i en plan cirkelbana. Kallar vi planet för xy-planet gäller alltid $z = 0$ och $p_z = 0$, så $\Delta z\,\Delta p_z = 0 < \hbar/2$. Modellen kan därför inte vara en korrekt bild av elektronen, trots att den ger rätt energinivåer för väte. Det krävs en beskrivning som helt bygger på elektronens vågegenskaper, Schrödingerekvationen.

⚠ **Vanliga fel**

- **h i stället för $\hbar$.** Gränsen är $\hbar/2 = h/(4\pi)$. Fel konstant ger ett fel på en faktor 2π.
- **Fel komponenter paras.** Δx hör ihop med Δp_x, inte med Δp_y.
- **Relationen tolkas som ett mätfel.** Den är en egenskap hos tillståndet och gäller oavsett instrument.
- **Klassisk energi när $\Delta p\,c$ är stor.** Blir $\Delta p\,c$ jämförbar med mc^2 ger $p^2/2m$ fel svar. Använd $K = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2$.
- **Livstiden läggs på grundtillståndet.** Bredden kommer från det exciterade tillståndets ändliga livstid; grundtillståndet har skarp energi.

---

6. Lösta exempel

Exempel — Proton och elektron i en atomkärna

En atomkärna har diametern $5{,}0$ fm. Ta den som lägesosäkerheten Δx. (a) Uppskatta den minsta osäkerheten i rörelsemängd för en proton i kärnan och motsvarande rörelseenergi. (b) Gör samma uppskattning för en elektron. Jämför med elektronens viloenergi $0{,}511$ MeV och med kärnors bindningsenergier, som är några MeV per partikel.

Lösning

Rörelsemängden. Den är densamma för båda partiklarna:

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1{,}055 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-15}} = \boxed{1{,}05 \cdot 10^{-20}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}$$

a) Protonen. Icke-relativistiskt:

$$K = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m_p} = \frac{(1{,}055 \cdot 10^{-20})^2}{2 \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27}} = 3{,}32 \cdot 10^{-14}\ \text{J} = \boxed{0{,}207\ \text{MeV}}$$

Det är långt under protonens viloenergi, så den klassiska formeln håller, och energin ryms gott inom kärnans bindning.

b) Elektronen. Först pc:

$$pc = 1{,}055 \cdot 10^{-20} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8} = 3{,}16 \cdot 10^{-12}\ \text{J} = 19{,}7\ \text{MeV}$$

Det är mycket mer än $m_e c^2 = 0{,}511$ MeV, så vi måste räkna relativistiskt:

$$K = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 = \sqrt{19{,}7^2 + 0{,}511^2} - 0{,}511 \approx \boxed{19{,}2\ \text{MeV}}$$

Den klassiska formeln hade gett omkring 381 MeV, alltså helt fel. En elektron instängd i kärnan får en rörelseenergi långt över bindningsenergierna och kan inte hållas kvar där.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Lyman-α-linjens naturliga bredd

När en väteatom faller från det första exciterade tillståndet till grundtillståndet sänds Lyman-α-linjen ut med $\lambda = 121{,}6$ nm. Det exciterade tillståndet har medellivstiden $1{,}60$ ns. Bestäm den minsta energiosäkerheten, motsvarande frekvensbredd och linjens naturliga bredd i våglängd.

Lösning

Energiosäkerheten. Med $\Delta t = \tau$:

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2\tau} = \frac{1{,}055 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-9}} = 3{,}30 \cdot 10^{-26}\ \text{J} = \boxed{2{,}06 \cdot 10^{-7}\ \text{eV}}$$

Frekvensbredden.

$$\Delta f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{3{,}30 \cdot 10^{-26}}{6{,}626 \cdot 10^{-34}} = \boxed{4{,}97 \cdot 10^{7}\ \text{Hz}}$$

alltså ungefär 50 MHz.

Fotonenergin och den relativa bredden.

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{121{,}6\ \text{nm}} = 10{,}20\ \text{eV}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2{,}057 \cdot 10^{-7}}{10{,}20} = 2{,}017 \cdot 10^{-8}$$

Linjebredden.

$$\Delta\lambda = \lambda\,\frac{\Delta E}{E} = 121{,}6\ \text{nm} \cdot 2{,}017 \cdot 10^{-8} \approx \boxed{2{,}45 \cdot 10^{-6}\ \text{nm}}$$

Bredden är ungefär en hundramiljondel av våglängden.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 38.4 Wave–Particle Duality, Probability, and Uncertainty
- 39.6 The Uncertainty Principle Revisited

Linjespektrum

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Fotonen

Gaser sänder ut ljus bara vid bestämda våglängder i stället för ett kontinuerligt spektrum. Det är ett direkt tecken på att atomen har bestämda energinivåer, eftersom varje linje svarar mot en övergång mellan en övre och en undre nivå. Spektrumet är unikt för varje ämne och används därför för att identifiera atomer och molekyler.

$$\boxed{\Delta E = E_U - E_L = hf = \frac{hc}{\lambda}}$$

Fysika: Fd3 (fotonenergi)

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{E_U - E_L}_{\text{nivåskillnaden i atomen}} = \underbrace{hf}_{\text{fotonens energi}} = \underbrace{\frac{hc}{\lambda}}_{\text{linjens våglängd}}$$

Varje linje är en övergång mellan två nivåer, och fotonen bär exakt skillnaden. Ett stort språng ger stor fotonenergi och kort våglängd, och absorption är samma sak baklänges.

---

1. Kontinuerligt spektrum och linjespektrum

Delas ljuset upp med ett prisma eller ett gitter framträder två typer av spektrum:

- En **het fast kropp eller vätska**, till exempel en glödtråd, ger ett **kontinuerligt spektrum** där alla våglängder finns med (se Svartkroppsstrålning).
- En **het gas**, till exempel neonet i en skylt, ger ett **emissionslinjespektrum**: några skarpa linjer, var och en med en bestämd våglängd.

Varje grundämne har sin egen uppsättning linjer. Väte har till exempel en röd linje vid $656{,}3$ nm som inget annat ämne har.

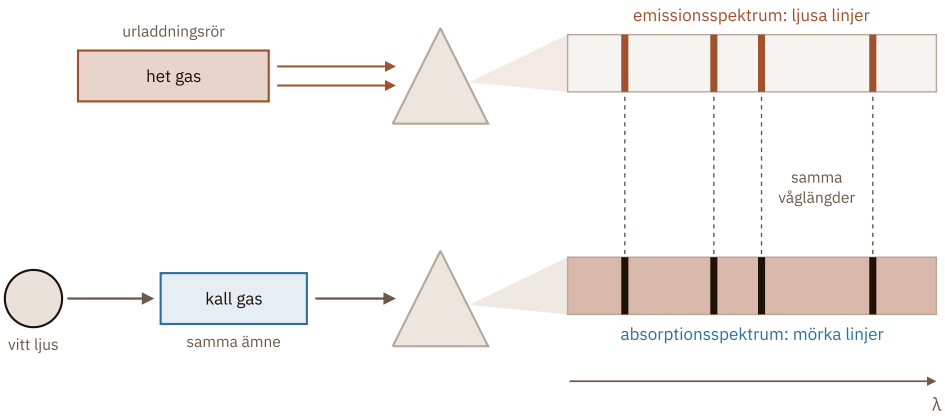
---

2. Emission och absorption

Skickas vitt ljus genom en kall gas saknas vissa våglängder i det ljus som kommer igenom. Det blir mörka linjer i ett annars kontinuerligt spektrum, ett **absorptionslinjespektrum**. Linjerna ligger på samma våglängder som gasen sänder ut när den är het. Formeln i rutan överst gäller åt båda håll:

- **Emission.** Atomen faller från E_U till E_L och sänder ut en foton med $hf = E_U - E_L$.
- **Absorption.** En foton med *exakt* energin $E_U - E_L$ lyfter atomen från E_L till E_U. En foton med lite för mycket eller lite för lite energi passerar opåverkad, eftersom atomen inte kan ha någon energi mellan nivåerna.

Alla linjer kommer inte från samma atom. I en gas finns ett enormt antal atomer i olika exciterade tillstånd, och spektrumet visar summan av alla övergångar som sker.



Överst: en het gas i ett urladdningsrör sänder ut ljus bara vid vissa våglängder. Nederst: vitt ljus genom en kall gas av samma ämne. Just de våglängderna saknas, och det blir mörka linjer på samma ställen.

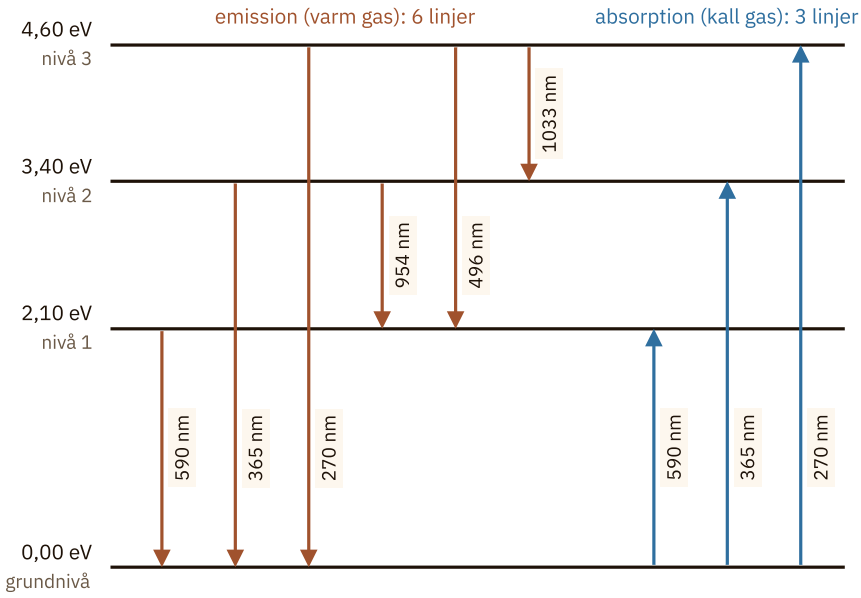
---

3. Hur många linjer?

En atom med N nivåer kan i emission gå mellan varje par av nivåer. Antalet par ger det största möjliga antalet emissionslinjer:

$$\boxed{\text{antal emissionslinjer} \le \frac{N(N-1)}{2}}$$

Det är ett tak, eftersom urvalsregler kan förbjuda vissa övergångar. I en kall gas befinner sig nästan alla atomer i grundnivån, så absorption sker bara därifrån och ger högst $N - 1$ linjer. Absorptionsspektrumet har därför oftast färre linjer än emissionsspektrumet. En varm gas har atomer även i exciterade nivåer och kan då absorbera också från dem.



Energinivåer för en tänkt atom med fyra nivåer. En varm gas kan sända ut sex linjer (nedåtpilar). En kall gas, där atomerna sitter i grundnivån, absorberar bara de tre som börjar i grundnivån (uppåtpilar). Det största energisprånget ger den kortaste våglängden.

---

4. Fluorescens

En atom som lyfts till en hög nivå behöver inte falla tillbaka i ett enda språng. Den kan gå via mellanliggande nivåer och sänder då ut flera fotoner, var och en med lägre energi och längre våglängd än den absorberade. Det kallas **fluorescens**: ämnet lyser med längre våglängd än det belyses med.

Energin bevaras över hela kaskaden. För två steg gäller

$$E_{\text{abs}} = E_1 + E_2$$

$$\frac{hc}{\lambda_{\text{abs}}} = \frac{hc}{\lambda_1} + \frac{hc}{\lambda_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_{\text{abs}}} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}}$$

Lysrör bygger på detta. Kvicksilverångan i röret sänder ut ultraviolett ljus, som absorberas i beläggningen på rörets insida och sänds ut igen som synligt ljus.

---

5. Spektroskopi

Eftersom linjerna är unika för varje ämne fungerar de som fingeravtryck. Solens absorptionslinjer, som uppstår i den svalare atmosfären utanför de hetare lagren, visar vilka ämnen som finns där, och astronomer identifierar molekyler i gasmoln långt ute i rymden. Molekyler har egna spektrum (se Molekylspektra). För väte går linjernas våglängder att räkna fram med Rydbergs formel, och nivåerna bakom dem förklaras av Bohrs atommodell.

⚠ Vanliga fel

- **Nivåns energi i stället för skillnaden.** Våglängden bestäms av $\Delta E = E_U - E_L$, inte av en enskild nivås energi.
- **Stort energisprång tros ge lång våglängd.** Det är tvärtom: $\lambda = hc/\Delta E$, så det största språnget ger den kortaste våglängden.
- **Absorption från vilken nivå som helst.** I en kall gas sitter atomerna i grundnivån, och absorptionslinjerna utgår därifrån.
- **Fotonen absorberas delvis.** En foton absorberas bara om dess energi exakt matchar en nivåskillnad. Den kan inte lämna ifrån sig en del och fortsätta.
- **Fluorescens med kortare våglängd.** Det utsända ljuset har längre våglängd än det absorberade, eftersom energin delas på flera fotoner.

---

6. Lösta exempel

☰ Exempel — Emissions- och absorptionslinjer för en tänkt atom

En tänkt atom har energinivåerna 0 (grundnivå), $1{,}50$ eV, $2{,}80$ eV och $4{,}20$ eV. (a) Vilka våglängder kan gasen sända ut när den är het, och vilka av dem är synliga (380–750 nm)? (b) Vilka våglängder absorberar gasen när den är kall?

✎ Lösning

a) Med fyra nivåer finns $4 \cdot 3/2 = 6$ par. Varje par ger $\lambda = hc/\Delta E$ med $hc = 1240$ eV·nm:

Övergång (eV)	ΔE (eV)	λ (nm)
$1{,}50 \to 0$	$1{,}50$	827
$2{,}80 \to 0$	$2{,}80$	443

Övergång (eV)	ΔE (eV)	λ (nm)
4,20 → 0	4,20	295
2,80 → 1,50	1,30	954
4,20 → 1,50	2,70	459
4,20 → 2,80	1,40	886

Emissionslinjerna är alltså $\boxed{295,\ 443,\ 459,\ 827,\ 886 \text{ och } 954 \text{ nm}}$. Synliga är bara $\boxed{443 \text{ och } 459 \text{ nm}}$ (blått). Linjen på 295 nm är ultraviolett, de övriga infraröda.

b) I kall gas utgår all absorption från grundnivån, så bara de tre övergångarna som börjar där syns:

$$\boxed{295,\ 443 \text{ och } 827 \text{ nm}}$$

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Fluorescens i två steg

Ett fluorescerande ämne absorberar ultraviolett ljus med våglängden 254 nm. Varje exciterad atom återvänder till grundnivån i två steg, och det första steget ger en foton med våglängden 436 nm. Bestäm energin i varje steg och våglängden hos den andra fotonen.

Lösning

Energierna. Med $hc = 1240$ eV·nm:

$$E_{\text{abs}} = \frac{1240}{254} = 4{,}88 \text{ eV} \qquad E_1 = \frac{1240}{436} = \boxed{2{,}84 \text{ eV}}$$

Fysika: Te (hc)

$$E_2 = E_{\text{abs}} - E_1 = 4{,}88 - 2{,}84 = \boxed{2{,}04 \text{ eV}}$$

Våglängden. Direkt med fluorescensformeln:

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{254\ \text{nm}} - \frac{1}{436\ \text{nm}}$$

$$\lambda_2 = \boxed{608\ \text{nm}}$$

Det är orange ljus. Båda de utsända fotonerna har längre våglängd än den absorberade, som det ska vara.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.2 The Nuclear Atom and Atomic Spectra

Bohrs atommodell

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Linjespektrum

Bohr postulerade år 1913 att en atom bara kan ha bestämda energier och inte någon energi däremellan, att den har en lägsta nivå — grundtillståndet — och att den växlar nivå enbart genom att absorbera eller emittera en foton. Det var ett stort konceptuellt genombrott eftersom klassisk fysik gör kretsande elektroner omöjliga: en accelererad laddning strålar konstant, förlorar energi och skulle spiralera in i kärnan. Postulaten gäller fortfarande, även om modellens mekanik senare ersättes av kvantmekaniken.

1. Varför klassisk fysik misslyckas

Rutherfords spridningsförsök visade att atomens positiva laddning och nästan hela dess massa sitter i en liten kärna, med en diameter under 10^{-14} m, medan hela atomen är omkring 10^{-10} m. Den naturliga bilden blev elektroner som kretsar kring kärnan som planeter kring solen. Klassisk fysik ger då tre förutsägelser som alla är fel:

Klassisk förutsägelse	Verkligheten
Elektronen accelererar och strålar hela tiden	Atomen strålar bara när den har exciterats
Energiförlusten får elektronen att spiralera in i kärnan på en bråkdel av en sekund	Atomer är stabila
Banfrekvensen ändras kontinuerligt, så ljuset får ett kontinuerligt spektrum	Ljuset har ett linjespektrum

2. Bohrs postulat

Bohr bröt med klassisk fysik och postulerade följande:

1. **Stationära tillstånd.** Atomen kan bara ha vissa bestämda energier $E_1 < E_2 < E_3 < \ldots$ och strålar inte så länge den befinner sig i ett av dem.
2. **Övergångar via fotoner.** Atomen byter nivå genom att sända ut eller absorbera en foton, vars energi är skillnaden mellan nivåerna: $hf = E_i - E_f$.
3. **Grundtillstånd.** Det finns en lägsta nivå. En atom där kan inte sända ut någon foton, eftersom det inte finns någon lägre nivå att falla till. Därför är atomer stabila.

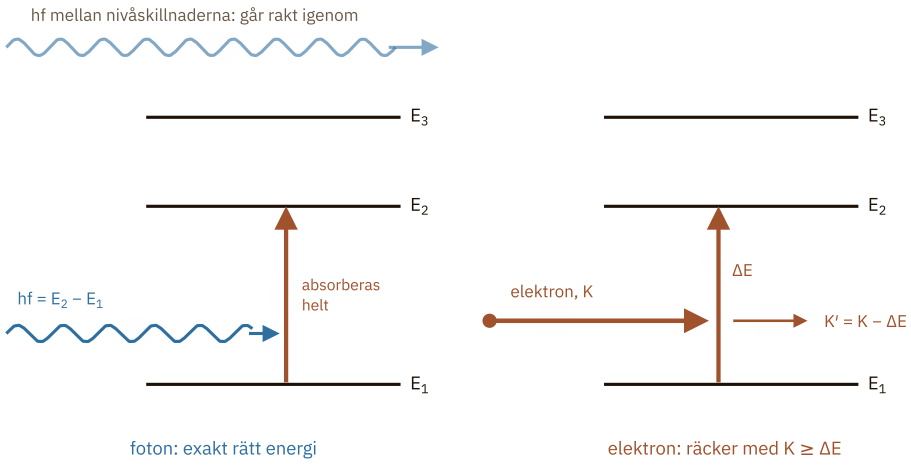
Nivåerna ovanför grundnivån kallas **exciterade**. Alla atomer av samma grundämne har samma uppsättning nivåer, men olika grundämnen har olika uppsättningar, vilket är skälet till att varje ämne har sitt eget spektrum.

---

3. Excitation med fotoner och med elektroner

En atom kan lyftas till en högre nivå på två sätt, och de skiljer sig på en punkt som ofta testas:

- **Foton.** Fotonen absorberas helt eller inte alls, så dess energi måste vara exakt lika med en nivåskillnad.
- **Stöt med en elektron eller en annan atom.** Den inkommande partikeln kan lämna ifrån sig en *del* av sin rörelseenergi och fortsätta med resten. Det räcker att $K \geq \Delta E$.



Vänster: en foton absorberas bara om dess energi är exakt en nivåskillnad, annars går den rakt igenom. Höger: en elektron med $K \geq \Delta E$ kan lyfta atomen och fortsätter med resten, $K' = K - \Delta E$.

Vid en oelastisk stöt där atomen exciteras ger energins bevarande, med atomens rekyl försummad,

$$K = K' + \Delta E$$

$$\boxed{K' = K - \Delta E \qquad (K \geq \Delta E)}$$

Är K mindre än den lägsta excitationsenergin blir stöten elastisk, och elektronen studsar utan att förlora någon nämnvärd energi.

Franck–Hertz-försöket år 1914 visade att nivåerna finns på riktigt. Elektroner som accelererades genom kvicksilverånga fick ångan att sända ut ultraviolett ljus med $\lambda \approx 250$ nm så snart deras rörelseenergi nådde $4{,}9$ eV, och $hc/(4{,}9\ \text{eV})$ är just omkring 250 nm. Kvicksilver har alltså en nivå $4{,}9$ eV ovanför grundnivån.

---

4. Livstid

En exciterad atom stannar inte kvar i sin nivå. Efter en kort tid, typiskt omkring 10^{-8} s, faller den till en lägre nivå och sänder ut en foton. Den korta livstiden gör nivåns energi något oskarp, vilket ger spektrallinjen en naturlig bredd (se Heisenbergs osäkerhetsprincip). För att en gas ska fortsätta lysa måste energi tillföras hela tiden, till exempel genom en elektrisk urladdning.

---

5. Var kommer nivåerna ifrån?

Postulaten säger att nivåerna finns men inte var de ligger. För väte räknade Bohr fram dem genom att kräva att elektronens rörelsemängdsmoment är en heltalsmultipel av $h/2\pi$. Med de Broglies bild betyder kravet att en stående elektronvåg ska gå jämnt upp runt banan, med ett helt antal våglängder på omkretsen:

$$2\pi r_n = n\lambda_n$$

$$2\pi r_n = n\,\frac{h}{m v_n}$$

Fysika: Fd3 (de Broglie-våglängden)

$$m v_n r_n = n\,\frac{h}{2\pi}$$

Radierna och energinivåerna som följer finns i Bohrs modell för väteatomen.

⚠ **Vanliga fel**

- **Fotonen och elektronen behandlas lika.** En foton måste ha exakt rätt energi. En elektron behöver bara ha minst rätt energi och behåller resten.
- **Atomen tvingas ta ett steg i taget.** En övergång kan hoppa över nivåer, till exempel direkt från nivå 3 till grundnivån.

- **Atomen i grundnivån strålar.** Den kan inte sända ut någon foton, eftersom det inte finns någon lägre nivå.
- **Postulaten och vätemodellen blandas ihop.** Postulaten gäller alla atomer. Formeln $E_n = -13{,}6\ \text{eV}/n^2$ gäller bara väte.

6. Lösta exempel

Exempel — Elektroner och fotoner med samma energi

En gas består av atomer med energinivåerna 0 (grundnivå), $3{,}10$ eV och $4{,}70$ eV, och alla atomer är i grundnivån. (a) Gasen bestrålas med elektroner med rörelseenergin $4{,}00$ eV. Vilken nivå kan exciteras, hur stor rörelseenergi har elektronen kvar efter stöten, och vilken våglängd har ljuset som gasen sedan sänder ut? (b) Gasen belyses i stället med fotoner med energin $4{,}00$ eV. Vad händer? (c) Vilka våglängder sänds ut om elektronernas energi höjs till $5{,}00$ eV?

Lösning

a) Bara nivån $3{,}10$ eV ligger under $4{,}00$ eV. Elektronen har kvar

$$K' = K - \Delta E = 4{,}00 - 3{,}10 = \boxed{0{,}90\ \text{eV}}$$

Atomen faller tillbaka till grundnivån och sänder ut

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{3{,}10\ \text{eV}} = \boxed{400\ \text{nm}}$$

Fysika: Fd3 (fotonenergi), Te (hc)

b) En foton måste ha exakt en nivåskillnad, och ingen nivå ligger $4{,}00$ eV ovanför grundnivån. Fotonerna **absorberas inte** utan går rakt igenom gasen.

c) Nu kan båda nivåerna exciteras. Från $4{,}70$ eV kan atomen falla direkt eller via $3{,}10$ eV, så tre linjer är möjliga:

$$\frac{1240}{4{,}70} = 264\ \text{nm} \qquad \frac{1240}{4{,}70 - 3{,}10} = \frac{1240}{1{,}60} = 775\ \text{nm} \qquad \frac{1240}{3{,}10} = 400\ \text{nm}$$

Svaret är $\boxed{264,\ 400 \text{ och } 775 \text{ nm}}$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Nivåer ur ett spektrum

En kall gas av ett okänt ämne ger absorptionslinjer vid 500 nm och 310 nm. När gasen hettas upp syns dessutom en tredje emissionslinje. Anta att bara tre nivåer spelar roll. Bestäm de exciterade nivåernas energier över grundnivån och den tredje linjens våglängd.

Lösning

Nivåerna. I kall gas utgår absorptionen från grundnivån, så varje absorptionslinje ger en nivå direkt:

$$E_2 = \frac{1240}{500} = \boxed{2{,}48 \text{ eV}} \qquad E_3 = \frac{1240}{310} = \boxed{4{,}00 \text{ eV}}$$

Den tredje linjen. Den varma gasen kan också gå från E_3 till E_2:

$$\Delta E = 4{,}00 - 2{,}48 = 1{,}52 \text{ eV}$$

$$\lambda = \frac{1240}{1{,}52} = \boxed{816 \text{ nm}}$$

Linjen ligger i det nära infraröda, och den syns inte i kall gas eftersom nästan inga atomer sitter i nivån E_2.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.3 Energy Levels and the Bohr Model of the Atom

Bohrs modell för väteatomen

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Bohrs atommodell, Rörelsemängdsmoment

---

Bohr antog att elektronen rör sig i stabila banor och att rörelsemängdsmomentet är kvantiserat i enheter av $h/2\pi$. Tillsammans med Coulombkraften som centripetalkraft ger det banradier och hastigheter som bara beror på huvudkvanttalet n — det var därför det kom att kallas kvantmekanik. Minsta radien är Bohrradien $a_0 = 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ m, och därefter följer $r_2 = 4a_0$, $r_3 = 9a_0$ och så vidare. Den totala energin blir $E_n = K_n + U_n = -K_n$, och energin för att ta elektronen från grundtillståndet till $E_\infty = 0$ är vätets joniseringsenergi $13{,}6$ eV.

$$L_n = m v_n r_n = n\frac{h}{2\pi} \qquad E_n = -\frac{1}{\varepsilon_0^2}\frac{me^4}{8n^2h^2} = -\frac{13{,}6\ \text{eV}}{n^2}$$

Fysika: Fd3 (i formen E_n = −E_H Z²/n² med Z = 1), Te (E_H)

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{m v_n r_n}_{\substack{\text{rörelsemängds-}\\ \text{moment } L_n}} = \underbrace{n}_{\substack{\text{heltal}\\ 1,\,2,\,3,\,\dots}} \underbrace{\frac{h}{2\pi}}_{\substack{\text{kvantum}\\ \text{för } L}}$$

$$\underbrace{E_n}_{\substack{\text{energin i}\\ \text{bana } n}} = -\underbrace{\frac{13{,}6\ \text{eV}}{n^2}}_{\substack{\text{bindningen}\\ \text{avtar som } 1/n^2}}$$

Villkoret väljer ut de banor där elektronvågen går jämnt upp runt kärnan. Energin är negativ eftersom elektronen är bunden; ju högre n, desto närmare noll och desto lättare att jonisera atomen.

---

1. Kvantiseringsvillkoret

Klassiskt kan elektronen kretsa på vilket avstånd som helst, och då kan atomen ha vilken energi som helst — i strid med linjespektrumet. Bohr behöll den klassiska cirkelbanan men lade till ett villkor: rörelsemängdsmomentet får bara vara en heltalsmultipel av $h/2\pi$, som i rutan ovan. Heltalet $n = 1, 2, 3, \ldots$ kallas **huvudkvanttalet**. Dessutom postulerade han att elektronen inte strålar så länge den stannar i en tillåten bana; atomen avger eller tar upp energi bara när elektronen byter bana (se Bohrs atommodell).

Villkoret går att läsa som ett vågvillkor. Ger vi elektronen de Broglie-våglängden $\lambda_n = h/(mv_n)$ och kräver att banans omkrets rymmer ett helt antal våglängder, så får vi

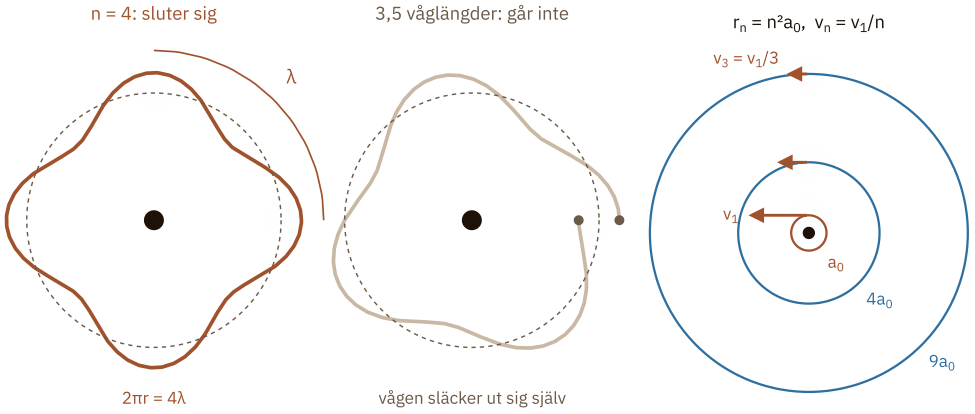
$$2\pi r_n = n\lambda_n$$

$$2\pi r_n = n\frac{h}{mv_n}$$

Fysika: Fd3 (de Broglie-våglängden)

$$mv_n r_n = n\frac{h}{2\pi}$$

vilket är precis Bohrs villkor. Elektronen i en tillåten bana är en stående våg som sluter sig själv.



Vänster: med fyra de Broglie-våglängder på omkretsen möter vågen sig själv i fas och bildar en stående våg. Mitten: 3,5 våglängder går inte jämnt upp. Höger: de tre första banorna i skala, $r_n = n^2a_0$, med farten $v_n = v_1/n$.

---

2. Banradier och hastigheter

Protonen är nästan 2000 gånger tyngre än elektronen, så vi låter den stå still. Coulombkraften mellan protonen och elektronen är den centripetalkraft som håller elektronen i cirkelbanan:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} = \frac{mv_n^2}{r_n}$$

Tillsammans med kvantiseringsvillkoret är det två ekvationer för de två obekanta r_n och v_n.

Härledning av r_n och v_n

Förenkla kraftekvationen. Multiplicera med r_n:

$$mv_n^2 r_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

Dela med kvantiseringsvillkoret. Vänsterledet delat med $mv_n r_n = nh/2\pi$ blir v_n:

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\pi}{nh}$$

$$v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh}$$

Radien. Lös ut r_n ur kvantiseringsvillkoret och sätt in v_n:

$$r_n = \frac{nh}{2\pi m v_n} = \frac{nh}{2\pi m}\cdot\frac{2\varepsilon_0 nh}{e^2}$$

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi m e^2}$$

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi m e^2} = n^2 a_0 \qquad v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh} = \frac{v_1}{n}$$

Fysika: Fd3 (banradie r_n = a₀n²/Z med Z = 1)

Med konstanterna insatta blir

$$a_0 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 5{,}29\cdot 10^{-11}\ \text{m} \qquad v_1 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} = 2{,}19\cdot 10^{6}\ \text{m/s}$$

Fysika: Te (a₀)

- **Radien växer som n^2:** $a_0, 4a_0, 9a_0, \ldots$ Grundtillståndets diameter på ungefär $0{,}1$ nm stämmer med atomstorlekar mätta på andra sätt.

- **Farten avtar som $1/n$.** Även den största farten v_1 är under $1\ \%$ av ljusfarten ($v_1/c \approx 1/137$), så klassisk mekanik räcker.

---

3. Kinetisk, potentiell och total energi

Med r_n och v_n kända kan varje energi skrivas som funktion av n. Den potentiella energin sätts till noll när elektronen är oändligt långt bort, så den är negativ i varje bana:

$$K_n = \frac{1}{2} m v_n^2 = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{m e^4}{8 n^2 h^2}$$

$$U_n = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{m e^4}{4 n^2 h^2}$$

Den potentiella energin är alltså exakt -2 gånger den kinetiska, och summan blir energin i rutan överst:

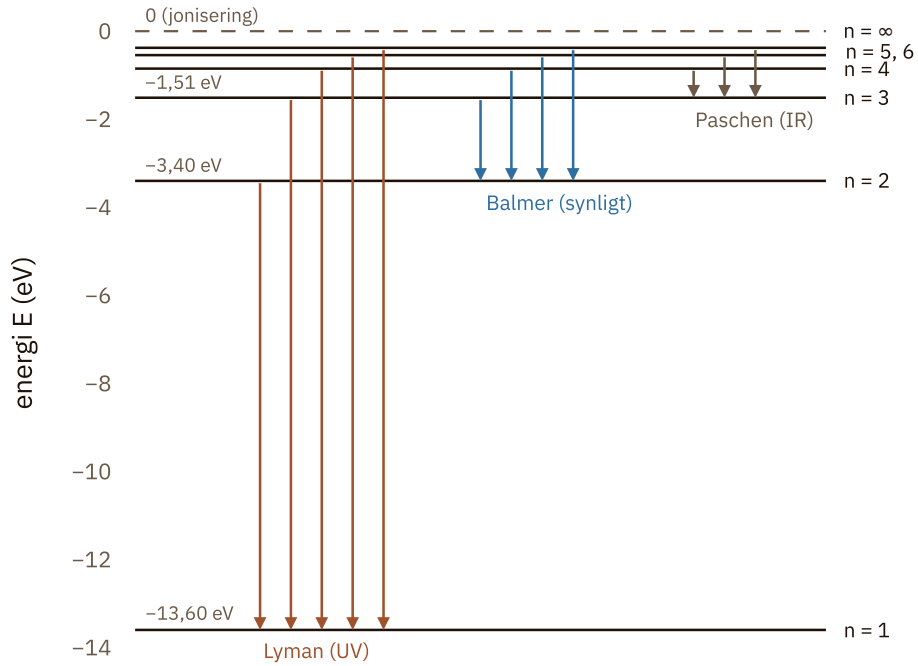
$$\boxed{E_n = K_n + U_n = -K_n = \frac{U_n}{2}}$$

I elektronvolt är $K_n = 13{,}6\ \text{eV}/n^2$, $U_n = -27{,}2\ \text{eV}/n^2$ och $E_n = -13{,}6\ \text{eV}/n^2$. Samma fördelning gäller för satellitbanor, eftersom både gravitationen och Coulombkraften avtar som $1/r^2$.

---

4. Energinivådiagrammet och joniseringsenergin

Nivåerna ligger tätare ju högre upp vi kommer och hopar sig under $E_\infty = 0$. Ovanför noll är elektronen fri och kan ha vilken energi som helst. Varje pil i diagrammet är en övergång $n_U \to n_L$ där en foton med energin $E_{n_U} - E_{n_L}$ sänds ut; våglängderna ges av Rydbergs formel.



Vätets energinivåer $E_n = -13{,}6\ \text{eV}/n^2$. Pilarna är övergångarna i Lyman-, Balmer- och Paschenserien; seriens namn bestäms av den undre nivån.

Joniseringsenergin är den energi som krävs för att lyfta elektronen från nivå n till $E_\infty = 0$:

$$E_{\text{jon},n} = 0 - E_n = \frac{13{,}6\ \text{eV}}{n^2}$$

Från grundtillståndet ger modellen $13{,}606$ eV, mot det uppmätta $13{,}60$ eV. Den lilla skillnaden kommer av att protonen inte står still, se Reducerad massa.

⚠ Vanliga fel

- **Tecknet på E_n.** Energierna är negativa, och en högre nivå har *mindre negativ* energi: $E_3 = -1{,}51$ eV ligger över $E_2 = -3{,}40$ eV.
- **K och E rör sig åt olika håll.** När atomen exciteras ökar E_n, men $K_n = -E_n$ minskar – elektronen går långsammare i den större banan. U_n ökar dubbelt så mycket som E_n.
- **Radien skalar som n^2, inte n.** $r_3 = 9a_0$, inte $3a_0$.
- **Joniseringsenergin från en exciterad nivå** är $13{,}6\ \text{eV}/n^2$, inte $13{,}6$ eV.

5. Lösta exempel

Exempel — Elektronen i n = 2 som stående våg

En väteatom är i sitt första exciterade tillstånd, $n = 2$. Bestäm elektronens banradie, fart och omloppstid enligt Bohrs modell. Beräkna också elektronens de Broglie-våglängd och visa att banans omkrets rymmer precis två våglängder.

Lösning

Radien. $r_n = n^2 a_0$ ger

$$r_2 = 4 \cdot 5{,}29 \cdot 10^{-11}\ \text{m} = \boxed{2{,}12 \cdot 10^{-10}\ \text{m}}$$

Farten. $v_n = v_1/n$ ger

$$v_2 = \frac{2{,}19 \cdot 10^{6}}{2} = \boxed{1{,}09 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}}$$

Omloppstiden.

$$T_2 = \frac{2\pi r_2}{v_2} = \frac{2\pi \cdot 2{,}12 \cdot 10^{-10}}{1{,}09 \cdot 10^{6}} = \boxed{1{,}22 \cdot 10^{-15}\ \text{s}}$$

De Broglie-våglängden.

$$\lambda_2 = \frac{h}{m_e v_2} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}094 \cdot 10^{6}} = \boxed{6{,}65 \cdot 10^{-10}\ \text{m}}$$

Kontroll av omkretsen.

$$2\pi r_2 = 2\pi \cdot 2{,}117 \cdot 10^{-10} = 1{,}33 \cdot 10^{-9}\ \text{m} = 2 \cdot 6{,}65 \cdot 10^{-10}\ \text{m} = 2\lambda_2$$

Omkretsen rymmer exakt $n = 2$ våglängder, som kvantiseringsvillkoret kräver.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Banradien blir nio gånger så stor

En väteatom i grundtillståndet absorberar en foton, och därefter är elektronens banradie nio gånger så stor som förut. Bestäm fotonens våglängd. Hur mycket ändras elektronens kinetiska energi respektive atomens potentiella energi?

Lösning

Slutnivån. $r_n = n^2 a_0 = 9a_0$ ger $n = 3$.

Fotonenergin.

$$E_3 - E_1 = -\frac{13{,}6}{9} - (-13{,}6) = -1{,}51 + 13{,}6 = 12{,}1 \text{ eV}$$

Våglängden.

$$\lambda = \frac{hc}{E_3 - E_1} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{12{,}09 \text{ eV}} = \boxed{103 \text{ nm}}$$

Det är ultraviolett ljus, den andra linjen i Lymanserien.

Kinetiska energin. $K_n = 13{,}6 \text{ eV}/n^2$:

$$\Delta K = 1{,}51 - 13{,}6 = \boxed{-12{,}1 \text{ eV}}$$

Potentiella energin. $U_n = -27{,}2 \text{ eV}/n^2$:

$$\Delta U = -3{,}02 - (-27{,}2) = \boxed{+24{,}2 \text{ eV}}$$

Rimlighetskoll. $\Delta K + \Delta U = -12{,}1 + 24{,}2 = 12{,}1$ eV, vilket är fotonens energi.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.3 Energy Levels and the Bohr Model of the Atom

Rydbergs formel

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #samband

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Bohrs modell för väteatomen

---

Skillnaden mellan två av väteatomens energinivåer ger en våglängd som bara beror på de två kvanttalen. Formeln hittades empiriskt år 1888 och föll sedan ut ur Bohrs modell med en Rydbergkonstant uttryckt i fundamentala konstanter; överensstämmelsen är bättre än $0{,}1\ \%$. Serierna namnges efter den undre nivån: Lyman ($n_L = 1$), Balmer (2), Paschen (3), Brackett (4) och Pfund (5).

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_L^2} - \frac{1}{n_U^2}\right)}$$

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\text{vågtal}} = \underbrace{R}_{\substack{\text{Rydberg-}\\\text{konstanten}}}\left(\underbrace{\frac{1}{n_L^2}}_{\substack{\text{undre nivå}\\\text{(serien)}}} - \underbrace{\frac{1}{n_U^2}}_{\substack{\text{övre}\\\text{nivå}}}\right)$$

Parentesen är energiskillnaden mellan nivåerna i enheter av $hcR = 13{,}6$ eV. Den undre nivån bestämmer serien, och låter vi $n_U \to \infty$ får vi seriegränsen.

---

1. Från energinivåer till våglängder

När atomen går från en övre nivå n_U till en undre n_L bär fotonen bort energiskillnaden, $hc/\lambda = E_{n_U} - E_{n_L}$ (se Linjespektrum). Energierna i Bohrs modell för väteatomen skrivs först om så att en konstant med dimensionen invers längd bryts ut:

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2} \qquad R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$$

Fysika: Fd3 (i formen E_n = −E_H Z²/n² med E_H = hcR)

Sätt in i energivillkoret:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_{n_U} - E_{n_L}$$

Fysika: Fd3 (fotonenergi)

$$\frac{hc}{\lambda} = \left(-\frac{hcR}{n_U^2}\right) - \left(-\frac{hcR}{n_L^2}\right)$$

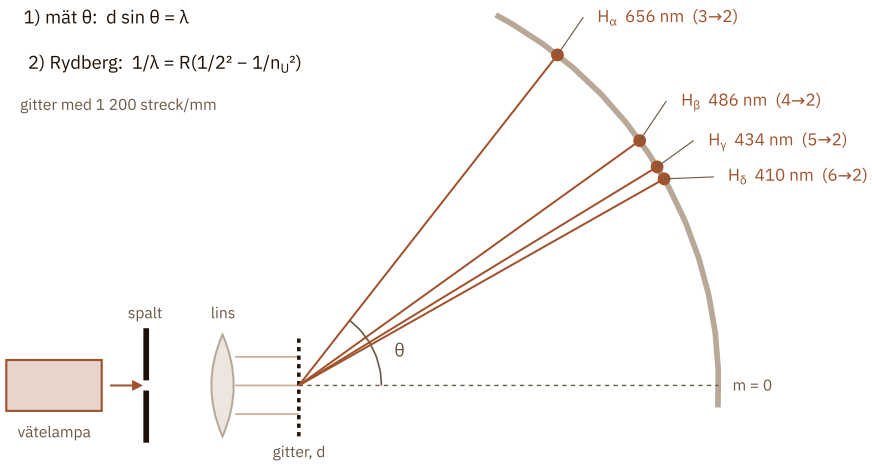
$$\frac{hc}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{n_L^2} - \frac{1}{n_U^2}\right)$$

Division med hc ger formeln i rutan överst. Rydbergkonstanten är alltså inte längre en anpassad parameter utan byggd av m, e, ε_0, h och c:

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1{,}097 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1} \qquad hcR = 13{,}6\ \mathrm{eV}$$

Fysika: Te (R∞ och R_H)

Samma formel gäller för absorption: en foton med just den våglängden kan lyfta atomen från n_L till n_U.



Så mäts linjerna: ljuset från en vätelampa går genom spalt och lins till ett gitter, och varje Balmerlinje hamnar vid sin egen vinkel där $d \sin\theta = \lambda$. Med λ känd ger Rydbergs formel den övre nivån n_U.

---

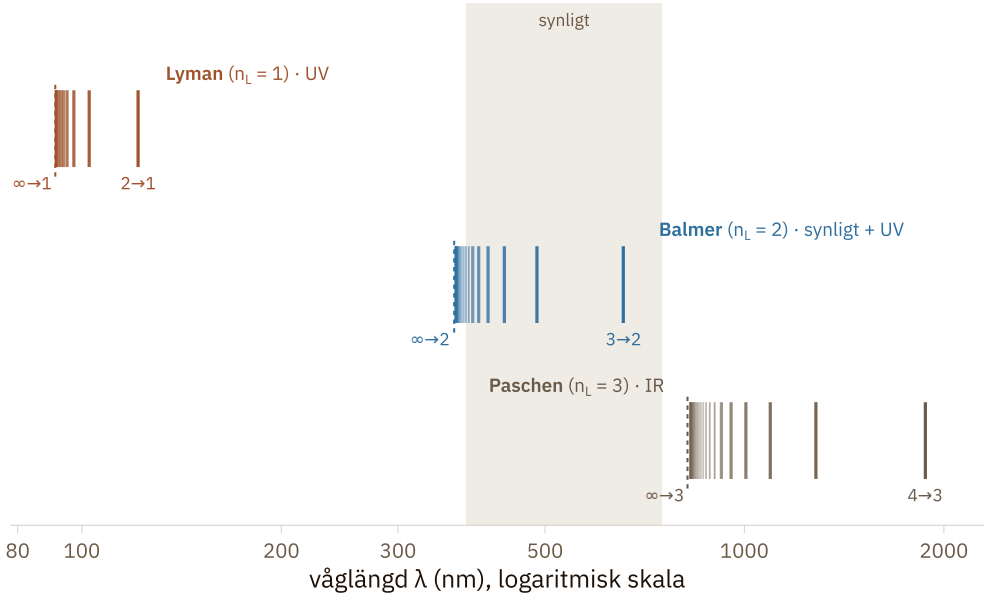
2. Spektralserierna

Håller vi n_L fast och låter $n_U = n_L + 1,\ n_L + 2, \ldots$ får vi en serie. Den längsta våglängden kommer från det minsta hoppet, $n_U = n_L + 1$. När $n_U \to \infty$ går $1/n_U^2 \to 0$, och linjerna hopar sig mot **seriegränsen**, seriens kortaste våglängd:

$$\boxed{\lambda_{\text{gräns}} = \frac{n_L^2}{R}}$$

Serie	n_L	Längsta λ $(n_U = n_L + 1)$	Seriegräns	Område
Lyman	1	122 nm	91,2 nm	ultraviolett
Balmer	2	656 nm	365 nm	synligt och UV
Paschen	3	1,88 µm	820 nm	infrarött
Brackett	4	4,05 µm	1,46 µm	infrarött
Pfund	5	7,46 µm	2,28 µm	infrarött

Bara Balmerserien har linjer i det synliga: $H_\alpha = 656$ nm, $H_\beta = 486$ nm, $H_\gamma = 434$ nm och $H_\delta = 410$ nm. Resten av serien ligger i ultraviolett. Övergångarna finns utritade i energinivådiagrammet i Bohrs modell för väteatomen.



Vätets Lyman-, Balmer- och Paschenserie på en logaritmisk våglängdsaxel: i varje serie ligger den längsta linjen vid $n_U = n_L + 1$, och linjerna tätnar mot den streckade seriegränsen $\infty \to n_L$; bara Balmerserien når in i det synliga.

3. Antal linjer och absorption

En atom i nivå n kan falla tillbaka i ett enda hopp eller i flera steg, och varje par av nivåer ger en egen linje. Ett helt prov av atomer exciterade till nivå n ger därför

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

olika linjer i emission. I absorption är det annorlunda: i en kall gas sitter nästan alla atomer i grundtillståndet, så bara Lymanlinjerna syns som mörka linjer. Balmerlinjer i absorption kräver att många atomer redan är i $n = 2$, alltså en het gas.

⚠ Vanliga fel

- n_L **och** n_U **byts.** Då blir $1/\lambda$ negativt. n_L är alltid den *undre* nivån, både i emission och i absorption.
- **Serien namnges efter fel nivå.** Det är den undre nivån som bestämmer serien: $4 \to 2$ är Balmer, inte Brackett.
- **Seriegränsen tas för den längsta våglängden.** Gränsen n_L^2/R är den *kortaste*; den längsta kommer från $n_U = n_L + 1$.
- **Enheterna.** R har enheten m^{-1}, så $1/\lambda$ kommer ut i m^{-1}. Alternativt räknar vi i eV med $hcR = 13{,}6$ eV och $hc = 1240$ eV·nm.
- **Atomen tros bara kunna hoppa en nivå i taget.** $4 \to 1$ ger en enda foton; nivåer får hoppas över.

---

4. Lösta exempel

Exempel — Vilken övergång ger 434 nm?

I vätets emissionsspektrum syns en violett linje vid 434 nm. Visa att den tillhör Balmerserien och bestäm från vilken nivå övergången sker. Vilken energi har fotonen?

Lösning

Vilken serie? Lymanserien ligger helt under 122 nm och Paschenserien helt över 820 nm, så en linje vid 434 nm måste vara en Balmerlinje, $n_L = 2$.

Övre nivån. Lös ut $1/n_U^2$ ur Rydbergs formel:

$$\frac{1}{n_U^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda R} = 0{,}25 - \frac{1}{434 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}097 \cdot 10^{7}} = 0{,}25 - 0{,}2100 = 0{,}0400$$

$$n_U = \frac{1}{\sqrt{0{,}0400}} = \boxed{5}$$

Linjen är H_γ, övergången $5 \to 2$.

Fotonenergin.

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{434\ \text{nm}} = \boxed{2{,}86\ \text{eV}}$$

Rimlighetskoll. $E_5 - E_2 = 13{,}6\,(1/4 - 1/25) = 2{,}86$ eV.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Vätgas exciterad till n = 4

Vätgas bombarderas med elektroner så att atomerna exciteras till som högst nivå $n = 4$. Hur många olika spektrallinjer kan gasen sända ut? Bestäm den kortaste och den längsta våglängden, och ange vilka linjer som ligger i det synliga området, 400–700 nm.

Lösning

Antal linjer. Varje par av nivåerna 1–4 ger en linje:

$$N = \frac{4 \cdot 3}{2} = \boxed{6}$$

Kortaste våglängden. Största hoppet, $4 \to 1$:

$$\frac{1}{\lambda} = 1{,}097 \cdot 10^7 \left(1 - \frac{1}{16}\right) = 1{,}028 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \boxed{97{,}2\ \text{nm}}$$

Längsta våglängden. Minsta hoppet, $4 \to 3$:

$$\frac{1}{\lambda} = 1{,}097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) = 5{,}333 \cdot 10^5\ \text{m}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \boxed{1{,}88\ \mu\text{m}}$$

Synliga linjer. Bara övergångar ned till $n_L = 2$ kan vara synliga: $3 \to 2$ ger $\boxed{656\ \text{nm}}$ och $4 \to 2$ ger $\boxed{486\ \text{nm}}$. Övriga linjer är 122 nm och 103 nm (Lyman, UV) samt $1{,}88$ µm (Paschen, IR).

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.2 The Nuclear Atom and Atomic Spectra
- 39.3 Energy Levels and the Bohr Model of the Atom

Väteliknande system

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Bohrs modell för väteatomen

---

Bohrs modell fungerar för varje system med en enda elektron — He^{+}, Li^{2+} och så vidare — om e^2 byts mot Ze^2. Den fungerar approximativt också för alkalimetallernas yttersta valenselektron, som ser en effektiv kärnladdning nära ett eftersom de inre elektronerna skärmar kärnan, och bäst av allt för Rydbergatomer i mycket höga n. Här slutar modellen: Bohr blandar partikel- och vågbeskrivning av elektronen, och atomer med fler än en elektron kräver kvantmekanik.

$$\boxed{E_n = -\frac{1}{\varepsilon_0^2}\frac{mZ^2e^4}{8n^2h^2}}$$

Fysika: Fd3 (i formen E_n = −E_H Z²/n²)

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{E_n}_{\text{nivå } n} = \underbrace{-13{,}6\ \text{eV}}_{\substack{\text{vätets}\\ \text{grundnivå}}} \cdot \underbrace{\frac{Z^2}{n^2}}_{\substack{\text{kärnladdning}\\ \text{och kvanttal}}}$$

$$\underbrace{r_n}_{\text{banradie}} = \underbrace{a_0}_{\substack{\text{Bohr-}\\ \text{radien}}} \underbrace{\frac{n^2}{Z}}_{\substack{\text{större } Z\text{:}\\ \text{mindre bana}}}$$

Kärnladdningen Ze gör attraktionen Z gånger starkare. Banan dras in med en faktor Z och bindningen blir Z^2 gånger starkare, medan resten av Bohrs modell är oförändrad.

---

1. En elektron kring Z protoner

Ett väteliknande system har en enda elektron kring en kärna med laddningen Ze. Det enda som ändras i Bohrs modell för väteatomen är Coulombkraften, som blir Z gånger starkare:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r_n^2} = \frac{mv_n^2}{r_n}$$

Kvantiseringsvillkoret $mv_n r_n = nh/2\pi$ är oförändrat. Samma räkning som för väte, med e^2 utbytt mot Ze^2, ger

$$v_n = \frac{Ze^2}{2\varepsilon_0 nh} = Z\,\frac{v_1}{n}$$

$$\boxed{r_n = \frac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi m Z e^2} = \frac{n^2}{Z}\,a_0}$$

Fysika: Fd3 (banradie r_n = a₀n²/Z)

Energin i rutan överst innehåller $e^4 = (e^2)^2$ och växer därför med Z^2. I elektronvolt:

$$E_n = -13{,}6\ \text{eV} \cdot \frac{Z^2}{n^2}$$

Fysika: Te (E_H)

Den större kärnladdningen drar alltså in banan med en faktor Z och gör bindningen Z^2 gånger starkare.

---

2. Spektrum och jämförelse med väte

Eftersom alla nivåer skalas med Z^2 gör även Rydbergkonstanten det, och Rydbergs formel blir

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} = Z^2 R\left(\frac{1}{n_L^2} - \frac{1}{n_U^2}\right)}$$

n	H $(Z=1)$	He^+ $(Z=2)$	Li^{2+} $(Z=3)$
1	−13,6 eV	−54,4 eV	−122 eV
2	−3,40 eV	−13,6 eV	−30,6 eV
3	−1,51 eV	−6,04 eV	−13,6 eV
4	−0,85 eV	−3,40 eV	−7,65 eV

I He^+ har nivå $2n$ samma energi som vätets nivå n, eftersom $Z^2/(2n)^2 = 1/n^2$. Varje övergång mellan två jämna nivåer i He^+ ger därför nästan samma linje som en vätelinje, medan övergångar som berör en udda nivå inte har någon motsvarighet i väte. Den lilla skillnaden, runt $0{,}05\ \%$, kommer av att kärnorna har olika reducerad massa.

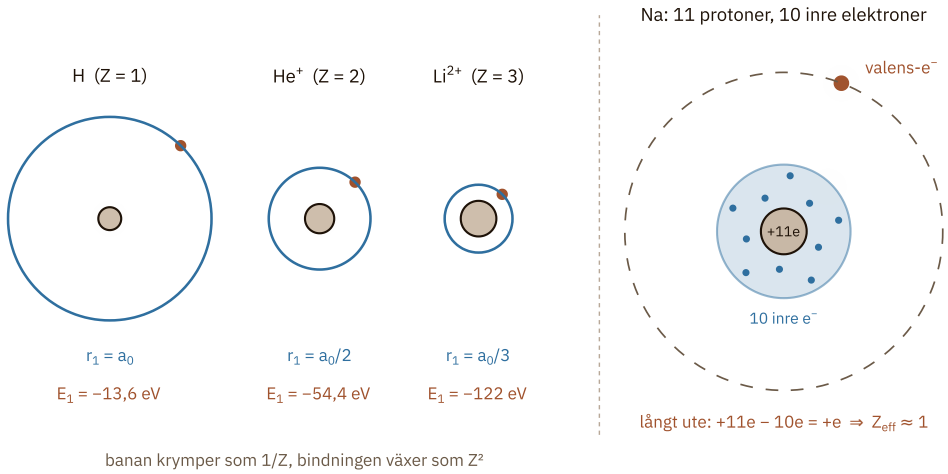
---

3. Alkalimetaller och effektiv kärnladdning

En alkaliatom har en ensam valenselektron utanför en kärna omgiven av fyllda inre skal. Kärnan och de inre elektronerna har tillsammans laddningen $+e$, så långt ute ser valenselektronen nästan en vätekärna. Hur väl det stämmer beskrivs av en **effektiv kärnladdning** Z_{eff}, definierad så att den uppmätta energin följer vätets form:

$$E_n \approx -13{,}6\ \text{eV} \cdot \frac{Z_{\text{eff}}^2}{n^2}$$

I högt exciterade nivåer, där elektronen håller sig långt utanför de inre skalen, är $Z_{\text{eff}} \approx 1$. I de lägsta nivåerna tränger elektronen delvis in genom skalen och känner mer av kärnan, så $Z_{\text{eff}} > 1$. Natrium, med valenselektronen i $n = 3$ och joniseringsenergin $5{,}14$ eV, har till exempel $Z_{\text{eff}} = 3\sqrt{5{,}14/13{,}6} \approx 1{,}84$.



Vänster: grundtillståndet i H, He^+ *och* Li^{2+} *i skala. Banan krymper som* $1/Z$ *och bindningen växer som* Z^2*. Höger: natriums valenselektron ser kärnans* $+11e$ *skärmad av tio inre elektroner, alltså nästan en vätekärna.*

---

4. Rydbergatomer

En atom vars yttersta elektron är exciterad till ett mycket högt n kallas **Rydbergatom**. Elektronen är då så långt ute att den nästan bara ser en punktladdning $+e$, och Bohrs modell fungerar mycket bra. För $n = 1000$:

$$r = n^2 a_0 = 10^6 \cdot 5{,}29 \cdot 10^{-11}\ \text{m} = 5{,}29 \cdot 10^{-5}\ \text{m}$$

Fysika: Te (a₀)

— en atom ungefär lika stor som ett sandkorn. Nivåerna ligger mycket tätt. För stora n är avståndet mellan två grannivåer

$$E_n - E_{n-1} = 13{,}6\ \text{eV}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) \approx \frac{2 \cdot 13{,}6\ \text{eV}}{n^3}$$

vilket för $n = 1000$ blir $2{,}72 \cdot 10^{-8}$ eV. Motsvarande foton har våglängden $hc/\Delta E \approx 45$ m, alltså radiovågor.

---

5. Var modellen tar slut

Trots träffsäkerheten för väte och väteliknande system lämnar Bohrs modell mycket obesvarat:

- **Blandade principer.** Klassiska cirkelbanor kombineras med kvantiseringspostulat som strider mot klassisk elektrodynamik, där en accelererad laddning alltid strålar.
- **Ingenting om själva övergången.** Modellen säger inte vad som händer medan elektronen byter bana, och elektronens omloppsfrekvens är i allmänhet inte frekvensen hos det utsända ljuset.
- **Fler elektroner.** Försök att utvidga modellen till atomer med två eller fler elektroner misslyckades.
- **Magnetiskt moment.** En kretsande elektron är en strömslinga och borde ge ett magnetiskt dipolmoment, men väte i grundtillståndet har inget sådant moment från banrörelsen.

Svaren kräver kvantmekaniken, se Schrödingerekvationen för väteatomen och Atomorbitaler.

⚠ Vanliga fel

- **Fel potens av Z.** Energin skalar som Z^2, radien som $1/Z$ och farten som Z.
- **Formeln används för atomer med flera elektroner.** Neutralt helium har två elektroner och är *inte* väteliknande; $-54{,}4$ eV gäller bara He^+.
- **Z^2 glöms i Rydbergs formel.** För en jon med $Z = 3$ blir alla våglängder nio gånger kortare än motsvarande vätelinjer.
- **Z_{eff} blandas ihop med Z.** För natriums valenselektron är $Z = 11$ men $Z_{\text{eff}} \approx 1{,}8$.

---

6. Lösta exempel

Exempel — Dubbeljoniserat litium

För jonen Li^{2+} ($Z = 3$): bestäm joniseringsenergin från grundtillståndet, radien för banan $n = 1$ och våglängden för fotonen vid övergången $n = 2 \to n = 1$. I vilket område av spektrumet ligger fotonen?

Lösning

Joniseringsenergin.

$$E_{\text{jon}} = 13{,}6\ \text{eV} \cdot \frac{3^2}{1^2} = \boxed{122\ \text{eV}}$$

Radien.

$$r_1 = \frac{a_0}{Z} = \frac{5{,}29 \cdot 10^{-11}}{3} = \boxed{1{,}76 \cdot 10^{-11}\ \text{m}}$$

Fotonenergin.

$$E_2 - E_1 = 122{,}4\ \text{eV}\,(1 - \frac{1}{4}) = 91{,}8\ \text{eV}$$

Våglängden.

$$\lambda = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{91{,}8\ \text{eV}} = \boxed{13{,}5\ \text{nm}}$$

Det är extremt ultraviolett ljus, på gränsen mot mjuk röntgen — nio gånger kortare än vätets Lyman-α vid 122 nm.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Heliumjonen som härmar väte

Vätets linje H_β uppstår vid övergången $4 \to 2$. Vilken övergång i He^+ ger (nästan) samma våglängd? Beräkna våglängden. Bestäm också våglängden för övergången $3 \to 2$ i He^+ och förklara varför den saknar motsvarighet i vätets spektrum.

Lösning

Motsvarande övergång. Nivå $2n$ i He^+ har samma energi som nivå n i väte, så $4 \to 2$ i väte motsvaras av $\boxed{8 \to 4}$ i He^+.

Våglängden.

$$\frac{1}{\lambda} = 2^2 \cdot 1{,}097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{64}\right) = 1{,}097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = 2{,}057 \cdot 10^6 \ \mathrm{m}^{-1}$$

$$\lambda = \boxed{486 \ \mathrm{nm}}$$

Övergången $3 \to 2$**.**

$$E_3 - E_2 = 54{,}4 \ \mathrm{eV}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = 7{,}56 \ \mathrm{eV} \qquad \lambda = \frac{1240}{7{,}56} = \boxed{164 \ \mathrm{nm}}$$

Nivån $n = 3$ i He^+ ligger på $-6{,}04$ eV, och väte har ingen nivå där. Därför finns ingen vätelinje vid 164 nm.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.3 Energy Levels and the Bohr Model of the Atom

Reducerad massa

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #mekanik #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Masscentrum

I ett tvåkropparssystem rör sig båda kropparna kring det gemensamma masscentrumet, och problemet kan skrivas om till en enda kropp med den reducerade massan. För väte är korrektionen liten eftersom protonen är $1836{,}2$ gånger tyngre än elektronen, men den räcker för att skilja väte från deuterium spektroskopiskt — så upptäcktes deuterium år 1932. Samma storhet återkommer i molekylers rotation och vibration.

$$\boxed{m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

Formeln, symbol för symbol

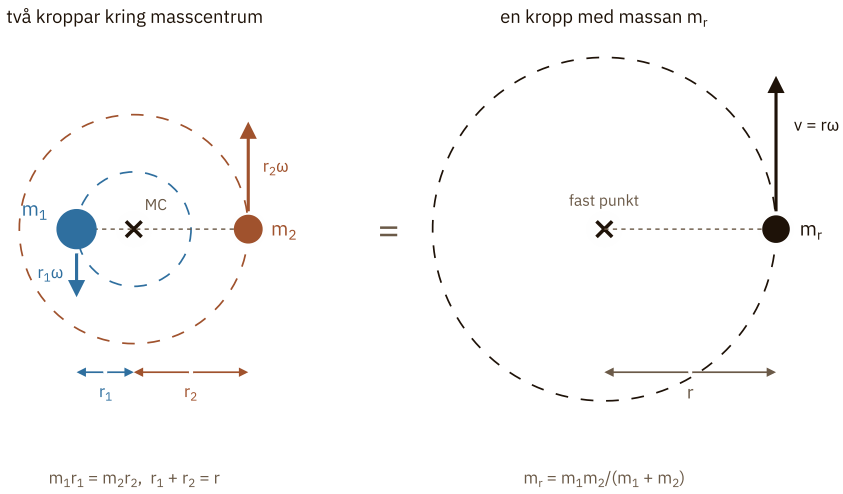
$$\underbrace{m_r}_{\substack{\text{ersättnings-}\\\text{kroppens massa}}} = \underbrace{m_1}_{\substack{\text{ena}\\\text{kroppen}}} \cdot \underbrace{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}_{\substack{\text{en andel,}\\\text{alltid } <1}}$$

Den reducerade massan är den ena massan gånger en faktor som alltid är mindre än ett. Är den andra kroppen mycket tyngre går faktorn mot ett, och vi får tillbaka bilden med en orörlig kärna.

---

1. Två kroppar blir en

Två kroppar som bara påverkar varandra kretsar båda kring sitt gemensamma masscentrum. Låt r vara avståndet mellan dem och r_1, r_2 deras avstånd till masscentrum. Båda har samma vinkelhastighet ω, och den relativa farten är $v = r\omega$. Det visar sig att rörelsen beskrivs exakt som om en enda kropp med massan m_r kretsade på avståndet r kring en fast punkt.



Vänster: två kroppar kretsar kring sitt gemensamma masscentrum med samma vinkelhastighet, och den tyngre går i den mindre cirkeln. Höger: samma rörelse som en enda kropp med massan m_r på det relativa avståndet r kring en fast punkt.

Härledning av enkroppsbilden

Masscentrum. $m_1r_1 = m_2r_2$ och $r_1 + r_2 = r$ ger

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,r \qquad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,r$$

Kraften på kropp 1. Den håller kropp 1 i en cirkel med radien r_1:

$$F = m_1r_1\omega^2 = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\,r\omega^2 = m_r\frac{v^2}{r}$$

Rörelsemängdsmomentet. Summan för båda kropparna:

$$L = m_1r_1^2\omega + m_2r_2^2\omega = \frac{m_1m_2^2 + m_2m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\,r^2\omega$$

$$L = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\,r^2\omega = m_rvr$$

Kinetiska energin. På samma sätt:

$$K = \frac{1}{2}m_1(r_1\omega)^2 + \frac{1}{2}m_2(r_2\omega)^2 = \frac{1}{2}m_r(r\omega)^2 = \frac{1}{2}m_rv^2$$

$$\boxed{F = m_r \frac{v^2}{r} \qquad L = m_r v r \qquad K = \frac{1}{2} m_r v^2}$$

Två gränsfall är värda att komma ihåg:

- **En kropp mycket tyngre**, $m_2 \gg m_1$: $m_r \to m_1$. Den tunga kroppen står i praktiken still.
- **Lika massor**, $m_1 = m_2 = m$: $m_r = m/2$.

Den reducerade massan är alltid mindre än den minsta av de två massorna.

---

2. Korrektionen i Bohrs modell

I Bohrs modell för väteatomen antog vi att protonen står still. Eftersom kraftekvationen, kvantiseringsvillkoret och energin har exakt samma form med m_r och det relativa avståndet r, räcker det att byta m_e mot m_r i alla formler. Energierna och Rydbergkonstanten är proportionella mot massan, banradierna omvänt proportionella:

$$E_n \propto m_r \qquad r_n \propto \frac{1}{m_r}$$

$$\boxed{R_M = R_\infty \frac{m_r}{m_e} = \frac{R_\infty}{1 + m_e/M}}$$

där $R_\infty = 1{,}0974 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$ är värdet för en oändligt tung kärna och M kärnans massa. För väte är $M = 1836{,}2\, m_e$, så

$$m_r = \frac{1836{,}2}{1837{,}2}\, m_e = 0{,}99946\, m_e$$

Fysika: Te (m_p/m_e)

Joniseringsenergin blir då $0{,}99946 \cdot 13{,}606$ eV $= 13{,}599$ eV i stället för $13{,}606$ eV, i överensstämmelse med mätvärdet $13{,}60$ eV. Korrektionen är ungefär $0{,}05\ \%$ — liten, men mycket större än spektroskopins mätosäkerhet.

---

3. Isotopförskjutning: väte och deuterium

Deuteriumkärnan består av en proton och en neutron och är ungefär dubbelt så tung som protonen. Kemiskt är deuterium väte ($Z = 1$), men den reducerade massan skiljer sig:

$$m_{r,\mathrm{H}} = 0{,}99946\, m_e \qquad m_{r,\mathrm{D}} = 0{,}99973\, m_e$$

Alla våglängder är omvänt proportionella mot m_r, så varje deuteriumlinje ligger något kortare än motsvarande vätelinje:

$$\frac{\lambda_{\mathrm{D}}}{\lambda_{\mathrm{H}}} = \frac{m_{r,\mathrm{H}}}{m_{r,\mathrm{D}}} = 0{,}99973$$

Den relativa förskjutningen är $0{,}027\ \%$, eller omkring $0{,}18$ nm för den röda Balmerlinjen. Det var den förskjutningen som avslöjade deuterium år 1932.

---

4. Exotiska tvåkropparssystem

När de två massorna är jämförbara är korrektionen inte längre liten:

- **Positronium** är en elektron bunden till en positron — samma massa, motsatt laddning. Med $m_r = m_e/2$ halveras alla energier, $E_n = -6{,}80\ \mathrm{eV}/n^2$, och avståndet mellan partiklarna dubblas.
- **Myoniskt väte** är en proton med en myon, 207 gånger tyngre än elektronen, i stället för en elektron. Då är $m_r = 186\,m_e$, så grundtillståndets energi blir $-2{,}53$ keV och radien 186 gånger mindre än a_0.

Vanliga fel

- **Massan byts ut på fel ställen.** Bara massan byts mot m_r; laddningarna och Z är desamma.
- **Fel radie i positronium.** Bohrformeln med m_r ger *avståndet mellan partiklarna*, $r = 2a_0$. Varje partikel kretsar på avståndet a_0 från masscentrum.
- **För få värdesiffror.** Isotopeffekten ligger på fjärde decimalen; avrundas λ_{H} och λ_{D} till tre värdesiffror blir de lika. Räkna skillnaden via kvoten $m_{r,\mathrm{H}}/m_{r,\mathrm{D}}$.
- **m_r större än den minsta massan.** Den reducerade massan är alltid mindre än både m_1 och m_2 — en snabb kontroll av räkningen.

---

5. Lösta exempel

Exempel — H-alfa i väte och deuterium

Beräkna våglängden för Balmerlinjen H_α $(3 \to 2)$ i väte och i deuterium med hänsyn till den reducerade massan, och bestäm skillnaden mellan dem. Använd $R_\infty = 1{,}0974 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$, protonens massa $1836{,}2\,m_e$ och deuteronens massa $3670{,}5\,m_e$.

Lösning

Reducerade massor.

$$\frac{m_{r,\mathrm{H}}}{m_e} = \frac{1836{,}2}{1837{,}2} = 0{,}999456 \qquad \frac{m_{r,\mathrm{D}}}{m_e} = \frac{3670{,}5}{3671{,}5} = 0{,}999728$$

Väte. $R_\mathrm{H} = 0{,}999456 \cdot 1{,}0974 \cdot 10^7 = 1{,}09680 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$:

$$\lambda_\mathrm{H} = \frac{1}{R_\mathrm{H}\,(1/4 - 1/9)} = \frac{36}{5 \cdot 1{,}09680 \cdot 10^7} = \boxed{656{,}45\ \mathrm{nm}}$$

Deuterium.

$$\lambda_\mathrm{D} = \lambda_\mathrm{H} \cdot \frac{0{,}999456}{0{,}999728} = \boxed{656{,}27\ \mathrm{nm}}$$

Skillnaden.

$$\Delta\lambda = \lambda_\mathrm{H}\left(1 - \frac{0{,}999456}{0{,}999728}\right) = 656{,}45 \cdot 2{,}72 \cdot 10^{-4} = \boxed{0{,}179\ \mathrm{nm}}$$

Här krävs fem värdesiffror i våglängderna för att skillnaden alls ska synas.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Positronium

Positronium är ett bundet system av en elektron och en positron, som har samma massa som elektronen men positiv laddning. Bestäm med Bohrs modell och reducerad massa joniseringsenergin, avståndet mellan partiklarna i grundtillståndet och våglängden för fotonen vid övergången $2 \to 1$.

Lösning

Reducerad massa.

$$m_r = \frac{m_e m_e}{m_e + m_e} = \frac{m_e}{2}$$

Joniseringsenergin. $E_n \propto m_r$:

$$E_{\text{jon}} = \frac{13{,}6\ \text{eV}}{2} = \boxed{6{,}80\ \text{eV}}$$

Avståndet. $r_n \propto 1/m_r$, och Bohrradien avser nu avståndet mellan partiklarna:

$$r = 2a_0 = 2 \cdot 5{,}29 \cdot 10^{-11}\ \text{m} = \boxed{1{,}06 \cdot 10^{-10}\ \text{m}}$$

Övergången $2 \to 1$**.**

$$\Delta E = 6{,}80\,(1 - \frac{1}{4}) = 5{,}10\ \text{eV} \qquad \lambda = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{5{,}10\ \text{eV}} = \boxed{243\ \text{nm}}$$

Det är dubbelt så lång våglängd som vätets Lyman-α, eftersom alla energier är halverade.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.3 Energy Levels and the Bohr Model of the Atom

De Broglie-våglängd

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #samband

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Fotonen, Bohrs modell för väteatomen

---

Om ljus med våglängden λ bär rörelsemängden $p = h/\lambda$, föreslog de Broglie år 1924 att sambandet kan vändas: varje partikel med rörelsemängden p har en våglängd. För en elektron accelererad genom en spänning blir våglängden av storleksordningen 10^{-10} m, alltså jämförbar med atomavstånd, medan den 1836 gånger tyngre protonen får en motsvarande kortare. Antagandet förklarar också Bohrs kvantiseringsvillkor: en bana måste rymma ett helt antal våglängder, $2\pi r_n = n\lambda$, vilket ger kvantiseringen av L_n utan postulat.

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mK}}}$$

Fysika: Fd3

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\lambda}_{\substack{\text{partikelns}\\ \text{våglängd}}} = \frac{h}{\underbrace{p}_{\substack{\text{rörelse-}\\ \text{mängd}}}} = \frac{h}{\sqrt{2m\,\underbrace{K}_{\substack{\text{rörelse-}\\ \text{energi}}}}}$$

Samma samband som för fotonen, $p = h/\lambda$, men läst baklänges: större rörelsemängd ger kortare våglängd. För en partikel med massa växer p bara som $\sqrt{K}$, så fyra gånger rörelseenergin halverar våglängden.

---

1. Våglängd och frekvens för en partikel

De Broglie gav partikeln samma två samband som fotonen har: våglängden bestäms av rörelsemängden som i rutan ovan, och frekvensen av energin,

$$f = \frac{E}{h}$$

Men de övriga fotonsambanden gäller *inte* för en partikel med massa. Den rör sig inte med ljusfarten, så $f = c/\lambda$ och $E = pc$ är fel. För en icke-relativistisk partikel kopplas rörelsemängden i stället till den kinetiska energin:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$p = \sqrt{2mK}$$

vilket ger den sista formen i rutan, $\lambda = h/\sqrt{2mK}$. Våglängden är alltså omvänt proportionell mot $\sqrt{K}$ för en partikel men mot E för en foton.

---

2. Elektron accelererad genom en spänning

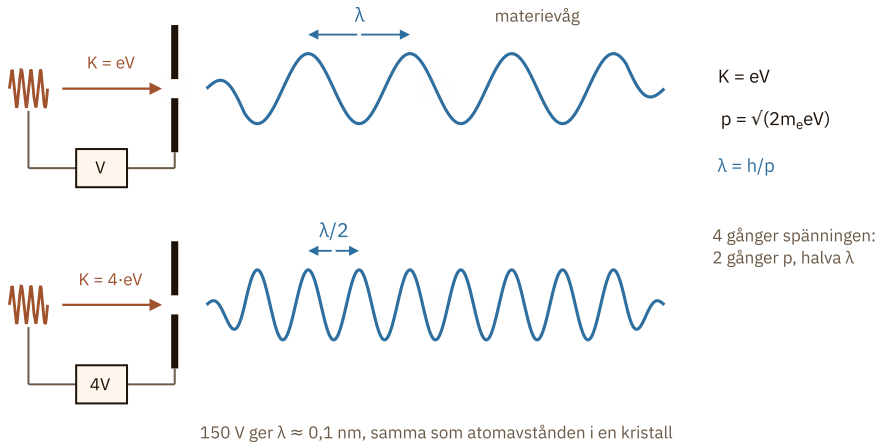
En elektron som startar från vila och accelereras genom spänningen V får den kinetiska energin $K = eV$. Insatt i $\lambda = h/\sqrt{2mK}$:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}}}$$

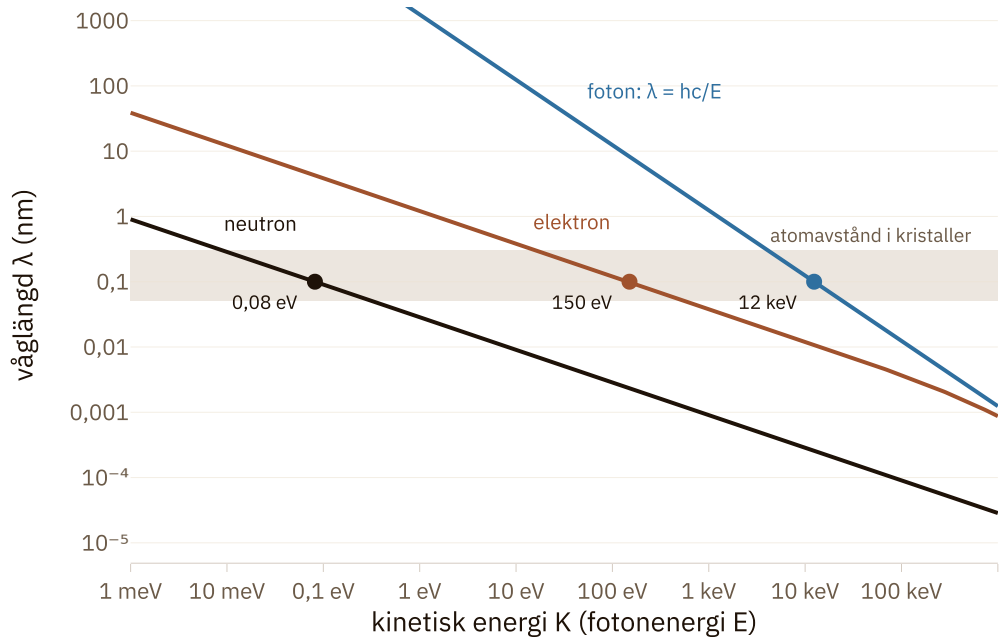
Med konstanterna insatta blir det en praktisk tumregel, med V i volt:

$$\lambda \approx \frac{1{,}226}{\sqrt{V}}\ \text{nm}$$

Redan 150 V ger $\lambda \approx 0{,}100$ nm, samma storlek som avståndet mellan atomerna i en kristall — därför kan elektroner visa diffraktion mot kristaller. Fyra gånger högre spänning halverar våglängden.



En elektronkanon: elektronerna faller genom spänningen V och får $K = eV$, och deras våglängd blir $\lambda = h/\sqrt{2m_e eV}$. Fyra gånger högre spänning dubblar rörelsemängden och halverar våglängden.



Våglängd mot energi för foton, elektron och neutron. För att nå $\lambda = 0{,}1$ nm (skuggat band) behöver fotonen 12 keV, elektronen 150 eV och neutronen bara $0{,}08$ eV. Fotonlinjen har lutningen -1 och partikellinjerna $-1/2$, tills elektronen blir relativistisk och böjer av mot fotonens lutning.

---

3. Relativistiska partiklar

När den kinetiska energin inte längre är liten jämfört med viloenergin mc^2 — för elektroner 511 keV — måste rörelsemängden tas ur det relativistiska sambandet $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ med $E = K + mc^2$:

$$(K + mc^2)^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2$$

$$\boxed{\lambda = \frac{hc}{\sqrt{K^2 + 2Kmc^2}}}$$

- $K \ll mc^2$: K^2 försummas, och vi får tillbaka $\lambda = h/\sqrt{2mK}$.
- $K \gg mc^2$: $\lambda \approx hc/K$, samma som för en foton med energin K.

Den klassiska formeln ger för lång våglängd, och felet är ungefär $K/(4mc^2)$. För elektroner blir det $1\ \%$ vid omkring 20 keV; i elektronmikroskop, med 40–400 kV, måste man räkna relativistiskt.

---

4. Varför vi inte ser materievågor i vardagen

Vågeffekter som diffraktion märks bara när våglängden är jämförbar med hindret eller öppningen. En tennisboll på 57 g med farten 50 m/s har

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{0{,}057 \cdot 50} = 2{,}3 \cdot 10^{-34}\ \text{m}$$

Fysika: Te (h)

— långt under storleken av en atomkärna. Det är Plancks konstants litenhet som gör vardagsföremålens vågnatur omärkbar. För elektroner i atomer är däremot λ lika stor som atomen själv, och där bestämmer vågnaturen allt: Bohrs kvantiseringsvillkor är just kravet att en stående elektronvåg ska få plats runt banan, se Bohrs modell för väteatomen.

⚠ Vanliga fel

- **Fotonformler används för elektroner.** $f = c/\lambda$ och $E = pc$ gäller bara för masslösa partiklar. För en elektron är $p = \sqrt{2mK}$.
- **eV och J blandas.** I $\lambda = h/\sqrt{2mK}$ med SI-enheter ska K vara i joule: $K = eV$ med $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.
- **Fel massa.** En proton eller neutron med samma kinetiska energi som en elektron har ungefär $\sqrt{1836} \approx 43$ gånger kortare våglängd.
- **Klassisk formel vid höga energier.** Över ett tiotal keV för elektroner blir felet märkbart; använd $\lambda = hc/\sqrt{K^2 + 2Kmc^2}$.
- **Samma energi tros ge samma våglängd.** En foton och en elektron med samma energi har mycket olika våglängder, eftersom de har olika samband mellan energi och rörelsemängd.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Elektron och foton med samma energi

En elektron har den kinetiska energin 150 eV, och en foton har energin 150 eV. Bestäm båda våglängderna och kvoten mellan elektronens och fotonens rörelsemängd.

Lösning

Elektronen. $K = 150 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 2{,}403 \cdot 10^{-17}\ \text{J}$, så

$$p_e = \sqrt{2m_eK} = \sqrt{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 2{,}403 \cdot 10^{-17}} = 6{,}62 \cdot 10^{-24}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{6{,}62 \cdot 10^{-24}} = \boxed{0{,}100\ \text{nm}}$$

Fotonen.

$$\lambda_f = \frac{hc}{E} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{150\ \text{eV}} = \boxed{8{,}27\ \text{nm}}$$

Kvoten. Fotonen har $p_f = E/c$, så med $m_e c^2 = 511$ keV:

$$\frac{p_e}{p_f} = \frac{\sqrt{2m_eK}}{K/c} = \sqrt{\frac{2m_ec^2}{K}} = \sqrt{\frac{2\cdot 511\,000}{150}} = \boxed{82{,}5}$$

Samma kvot fås som λ_f/λ_e, eftersom $p = h/\lambda$ för båda. Vid samma energi har elektronen alltså mycket större rörelsemängd och mycket kortare våglängd.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Elektroner i ett elektronmikroskop

I ett transmissionselektronmikroskop accelereras elektroner från vila genom spänningen 100 kV. Bestäm de Broglie-våglängden, dels med den klassiska formeln och dels relativistiskt. Hur stort blir det relativa felet om man räknar klassiskt?

Lösning

Klassiskt. Tumregeln ger

$$\lambda_{\text{kl}} = \frac{1{,}226}{\sqrt{1{,}00\cdot 10^{5}}}\ \text{nm} = 3{,}88\cdot 10^{-3}\ \text{nm} = \boxed{3{,}88\ \text{pm}}$$

Relativistiskt. Med $K = 100$ keV, $mc^2 = 511$ keV och $hc = 1{,}240$ keV·nm:

$$\sqrt{K^2 + 2Kmc^2} = \sqrt{100^2 + 2\cdot 100\cdot 511} = \sqrt{112\,200} = 335\ \text{keV}$$

$$\lambda = \frac{1{,}240\ \text{keV}\cdot\text{nm}}{335\ \text{keV}} = 3{,}70\cdot 10^{-3}\ \text{nm} = \boxed{3{,}70\ \text{pm}}$$

Felet.

$$\frac{3{,}88 - 3{,}70}{3{,}70} \approx \boxed{4{,}8\ \%}$$

Det stämmer med uppskattningen $K/(4mc^2) = 100/2044 \approx 4{,}9\ \%$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.1 Electron Waves

Elektrondiffraktion

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #experiment

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** De Broglie-våglängd, Diffraktion

---

Elektroner som passerar en kristallin metall ger ett diffraktionsmönster — det avslöjade elektronens vågnatur för första gången. Kristallplanens avstånd d spelar samma roll som spaltavståndet i optiken, och samma villkor används för röntgen- och neutrondiffraktion. Alla tre mäter kristallstruktur och ger medelvärdesavstånd: atomstorlekar kring 10^{-10} m och bindningsavstånd kring $2 \cdot 10^{-10}$ m.

$$\boxed{d \sin\theta = m\lambda, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots}$$

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{d}_{\substack{\text{atomradernas}\\ \text{avstånd}}} \quad \underbrace{\sin\theta}_{\substack{\text{vinkel mot}\\ \text{inkommande}}} = \underbrace{m}_{\substack{\text{ordning}\\ 1,\,2,\,3,\,\ldots}} \quad \underbrace{\lambda}_{\substack{\text{elektronens}\\ \text{våglängd}}}$$

Vänstra ledet är vägskillnaden mellan vågorna från två grannatomer, det högra ett helt antal våglängder. Bara vid de vinklar där de stämmer överens förstärker alla atomernas vågor varandra.

---

1. Davisson–Germer: kristallytan som reflektionsgitter

I Davisson och Germers försök år 1927 accelererades elektroner genom en känd spänning och sköts vinkelrätt mot en nickelkristall. En detektor mätte hur många elektroner som studsade ut vid olika vinklar θ från den infallande riktningen. I stället för en jämn fördelning fick de en skarp topp vid en viss vinkel, och toppens läge flyttade sig när spänningen ändrades.

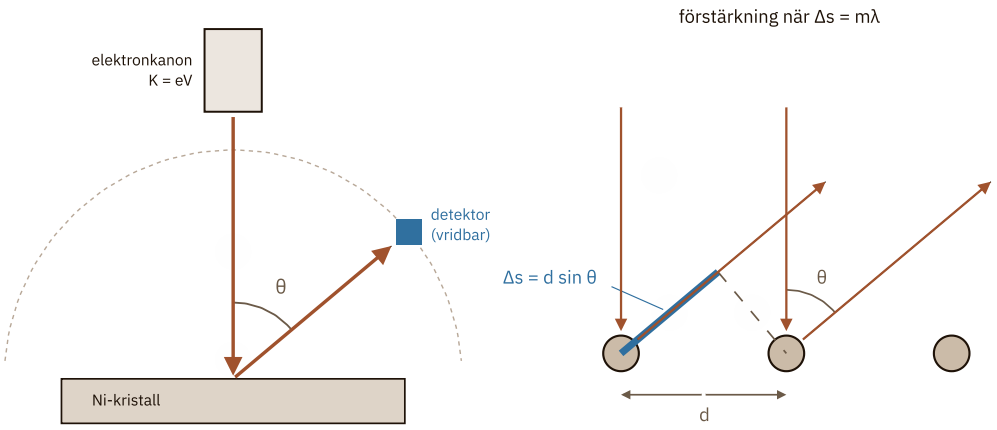
Atomerna i ytan ligger i rader med avståndet d, och varje atom sprider elektronvågen åt alla håll. Två vågor som sprids från grannatomer mot vinkeln θ har vägskillnaden

$$\Delta s = d \sin\theta$$

och de förstärker varandra när vägskillnaden är ett helt antal våglängder:

$$d \sin\theta = m\lambda$$

vilket är villkoret i rutan överst — samma som för ett optiskt reflektionsgitter (se Diffraktion). Eftersom $\sin\theta \le 1$ finns ordning m bara om $m\lambda \le d$.



Vänster: Davisson–Germers uppställning. Elektroner med känd energi faller vinkelrätt mot en nickelkristall, och en vridbar detektor räknar de spridda elektronerna vid vinkeln θ. Höger: vågorna från två grannatomer har vägskillnaden $d \sin\theta$ och förstärker varandra när den är ett helt antal våglängder.

---

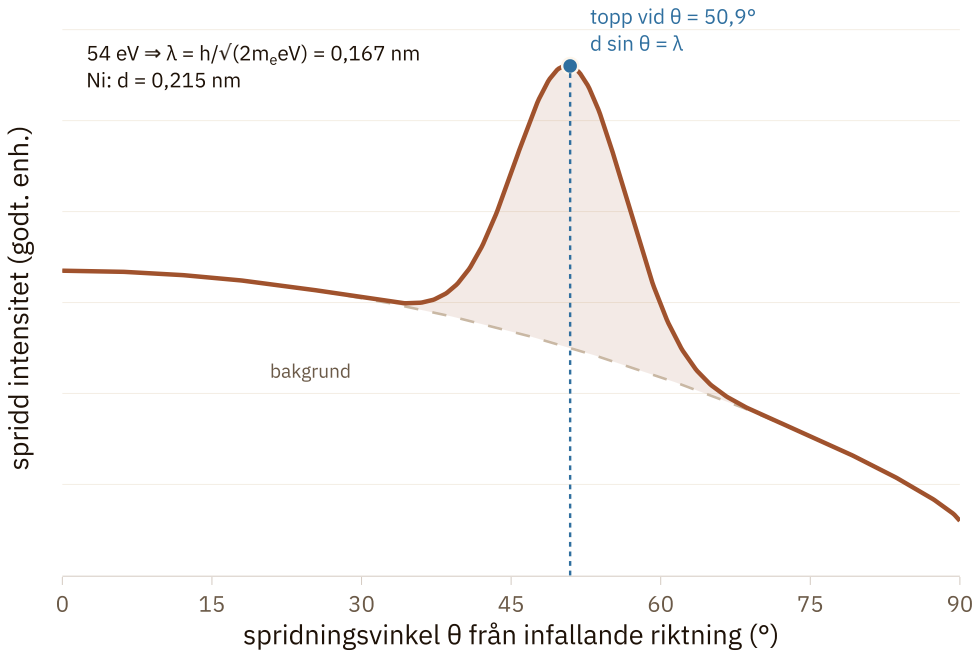
2. Vinkeln beror på spänningen

Elektronens våglängd bestäms av accelerationsspänningen V genom de Broglie-sambandet, $\lambda = h/\sqrt{2m_e eV}$. Insatt i gittervillkoret:

$$\boxed{\sin\theta_m = \frac{m\lambda}{d} = \frac{mh}{d\sqrt{2m_e eV}}}$$

Fysika: Fd3 (de Broglie-våglängden)

Högre spänning ger kortare våglängd och därmed mindre vinkel. Det var precis det beroendet Davisson och Germer såg, och vinklarna stämde med de Broglies formel — det första direkta beviset för elektronens vågnatur. Det ger också en lägsta spänning för varje ordning: ordning m syns först när $\lambda \le d/m$.



Davisson–Germer (schematiskt): 54 eV-elektroner mot nickel ger $\lambda = 0{,}167$ nm, och den spridda intensiteten får en topp över den jämna bakgrunden vid $\theta \approx 51^\circ$, där $d \sin\theta = \lambda$.

---

3. Braggs lag: reflektion mot kristallplan

Tränger strålningen in i kristallen, som röntgen, neutroner och snabba elektroner gör, sprids den mot många parallella atomplan med avståndet d. Vinkeln θ mäts nu från *planet*, inte från normalen (glansvinkel). En våg som reflekteras mot nästa plan går en extra sträcka $d \sin\theta$ på vägen in och lika mycket på vägen ut:

$$\Delta s = 2d \sin\theta$$

$$\boxed{2d \sin\theta = m\lambda}$$

Den totala avböjningen från den infallande riktningen är 2θ. Samma lag används för röntgendiffraktion mot kristallgitter.

G. P. Thomson sköt år 1928 elektroner genom en tunn folie av många små, slumpvis orienterade kristaller. Varje kristall som råkar ha rätt vinkel ger en stråle, och tillsammans bildar de koner kring den infallande strålen. På en skärm syns de som koncentriska ringar — samma mönster som röntgen ger genom samma folie.

---

4. Röntgen, elektroner och neutroner

Alla tre kan mäta kristallstruktur, eftersom alla kan få en våglängd kring $0{,}1$ nm. Energin som krävs skiljer sig däremot kraftigt, eftersom sambandet mellan energi och våglängd är olika:

Strålning	Energi för $\lambda = 0{,}100$ nm	Samband
Röntgenfoton	12,4 keV	$E = hc/\lambda$
Elektron	150 eV	$K = h^2/(2m_e\lambda^2)$
Neutron	0,0818 eV	$K = h^2/(2m_n\lambda^2)$

Neutronens energi är jämförbar med den termiska energin vid rumstemperatur, $k_B T \approx 0{,}026$ eV, och neutroner med sådana energier kallas **termiska neutroner**. Elektroner är laddade och växelverkar starkt med materia, så de passar för ytor och tunna folier; oladdade neutroner tränger djupt in. Kurvorna finns i figuren i De Broglie-våglängd.

⚠ **Vanliga fel**

- **Två olika vinklar.** I ytgittret ($d \sin\theta = m\lambda$) mäts θ från den infallande strålen; i Braggs lag ($2d \sin\theta = m\lambda$) mäts θ från kristallplanet, och avböjningen är 2θ.
- **Våglängden räknas inte ut först.** Vinkeln bestäms av λ, och λ av spänningen genom $h/\sqrt{2m_e eV}$ — inte av $hc/(eV)$, som gäller fotoner.
- **Ordningar som inte finns.** Ger räkningen $\sin\theta > 1$ existerar den ordningen inte.
- m **betyder två saker.** Skriv elektronens massa m_e så att den inte förväxlas med ordningstalet m.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Elektroner mot en kristallyta

Elektroner accelereras från vila genom 100 V och faller vinkelrätt in mot en kristallyta där atomraderna ligger på avståndet $d = 0{,}250$ nm. Vid vilka vinklar θ från den infallande riktningen får vi intensitetsmaxima? Vilken är den lägsta accelerationsspänning som ger ett maximum av andra ordningen?

Lösning

Våglängden.

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 100}} = 0{,}123\ \text{nm}$$

Fysika: Te (h, m_e, e)

Ordningarna. $\sin\theta_m = m\lambda/d$:

$$\sin\theta_1 = \frac{0{,}1226}{0{,}250} = 0{,}491 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \boxed{29{,}4^\circ}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{2 \cdot 0{,}1226}{0{,}250} = 0{,}9811 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \boxed{78{,}9^\circ}$$

För $m = 3$ blir $\sin\theta_3 = 1{,}47 > 1$, så det finns bara två maxima.

Lägsta spänningen för andra ordningen. Kräver $2\lambda \le d$, alltså $\lambda \le 0{,}125$ nm:

$$V = \frac{h^2}{2m_e e\lambda^2} = \frac{(6{,}626 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot (0{,}125 \cdot 10^{-9})^2} = \boxed{96{,}3\ \text{V}}$$

Vid 100 V är vi alltså just över gränsen, vilket förklarar att andra ordningen hamnar nära 90°.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Braggreflektion av neutroner

Neutroner med den kinetiska energin $0{,}0500$ eV riktas mot en kristall med planavståndet $d = 0{,}200$ nm. Bestäm neutronernas fart och de Broglie-våglängd, och alla glansvinklar θ där Braggreflektion sker. Neutronens massa är $1{,}675 \cdot 10^{-27}$ kg.

Lösning

Farten. $K = 0{,}0500 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 8{,}01 \cdot 10^{-21}\ \text{J}$:

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m_n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}01 \cdot 10^{-21}}{1{,}675 \cdot 10^{-27}}} = \boxed{3{,}09 \cdot 10^{3}\ \text{m/s}}$$

Våglängden.

$$\lambda = \frac{h}{m_n v} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{1{,}675 \cdot 10^{-27} \cdot 3{,}093 \cdot 10^{3}} = \boxed{0{,}128\ \text{nm}}$$

Glansvinklarna. $\sin\theta_m = m\lambda/(2d) = m \cdot 0{,}1279/0{,}400 = 0{,}3198\,m$:

$\theta_1 = \arcsin 0{,}3198 = \boxed{18{,}6^\circ}$ $\theta_2 = \arcsin 0{,}6395 = \boxed{39{,}8^\circ}$ $\theta_3 = \arcsin 0{,}9593$

För $m = 4$ blir $\sin\theta = 1{,}28 > 1$, så det finns tre reflexer.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.1 Electron Waves

Elektronmikroskop

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #metod

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** De Broglie-våglängd, Elektrondiffraktion

---

Upplösningen hos ett mikroskop begränsas av våglängden, och elektronens de Broglie-våglängd är omkring 10^{-10} m mot synligt ljus $5 \cdot 10^{-7}$ m — tusentals gånger bättre. Transmissionselektronmikroskopet (TEM) skickar elektroner genom ett 10–100 nm tunt prov och når $0{,}1$ nm upplösning. Svepelektronmikroskopet (SEM) slår i stället loss sekundärelektroner från ytan och mäter variationen i ström; det ger 10 nm upplösning, ser bara ytan men ger en bra tredimensionell bild.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\lambda}_{\text{elektronens våglängd}} = \frac{h}{\underbrace{\sqrt{2 m_e \, eV}}_{\text{rörelsemängden efter spänningen } V}}$$

$$\underbrace{\lambda}_{\text{i nm}} \approx \frac{1{,}23}{\sqrt{\underbrace{V}_{\text{i volt}}}}$$

Spänningen ger elektronen rörelseenergi, rörelseenergin ger rörelsemängd, och större rörelsemängd betyder kortare våglängd — men bara som $1/\sqrt{V}$. Det är den korta våglängden, inte förstoringen, som gör elektronmikroskopet skarpare än ljusmikroskopet.

---

1. Upplösningen bestäms av våglängden

Ett mikroskop kan inte skilja åt detaljer som är mycket mindre än våglängden på det som belyser provet, eftersom diffraktionen suddar ut varje punkt till en fläck av ungefär den storleken. Med synligt ljus kring 500 nm stannar gränsen därför på några hundra nanometer, hur bra linserna än är.

En elektronstråle kan avbildas på samma sätt som en ljusstråle: elektriska och magnetiska fält böjer elektronbanorna så som linser bryter ljus. Själva förstoringen kräver alltså inga vågegenskaper — banorna kan räknas ut klassiskt. Vågnaturen kommer in först i upplösningen, och där vinner elektronen stort eftersom dess de Broglie-våglängd är tusentals gånger kortare än ljusets.

---

2. Elektronens våglängd vid spänningen V

Elektronerna lämnar en glödkatod med försumbar fart och accelereras genom spänningen V. Fältet uträttar arbetet eV, så

$$K = eV$$

Klassiskt är $K = p^2/2m_e$, alltså

$$p = \sqrt{2m_eK} = \sqrt{2m_eeV}$$

och de Broglies samband $\lambda = h/p$ ger

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_eeV}}}$$

Fysika: Fd3 (de Broglie-våglängden, i formen $\lambda = h/\sqrt{2mK}$ med $K = eV$)

Sätter vi in konstanterna blir $\lambda \approx 1{,}23\ \text{nm}/\sqrt{V}$ med V i volt: 100 V ger $0{,}123$ nm, alltså ungefär ett atomavstånd, och 10 kV ger $0{,}0123$ nm. Våglängden avtar bara som $1/\sqrt{V}$, så hundra gånger högre spänning ger tio gånger kortare våglängd.

---

3. Relativistisk korrektion

Ett transmissionselektronmikroskop arbetar med 40–400 kV. Elektronens viloenergi är $m_ec^2 = 511$ keV, så vid några hundra kV är K inte längre litet jämfört med m_ec^2 och den klassiska formeln ger för lång våglängd. Relativistiskt blir

$$\boxed{\lambda = \frac{hc}{\sqrt{K^2 + 2Km_ec^2}}}$$

Härledning av den relativistiska våglängden

Den totala energin är viloenergin plus den kinetiska energin, se Relativitetsteori:

$$E = K + m_ec^2$$

Energi och rörelsemängd hänger ihop via

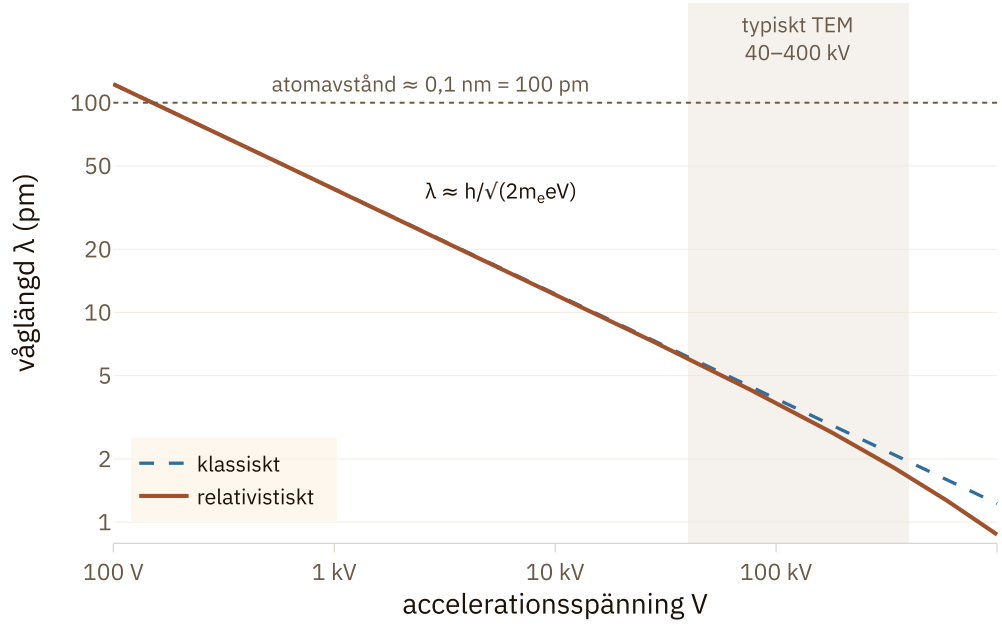
$$E^2 = (pc)^2 + (m_e c^2)^2$$

Sätt in E och utveckla kvadraten:

$$(pc)^2 = (K + m_e c^2)^2 - (m_e c^2)^2 = K^2 + 2Km_e c^2$$

Med $\lambda = h/p = hc/(pc)$ följer formeln i rutan. För $K \ll m_e c^2$ kan K^2 strykas mot $2Km_e c^2$, och då blir $pc = \sqrt{2Km_e c^2}$ och $\lambda = h/\sqrt{2m_e K}$ — den klassiska formeln.

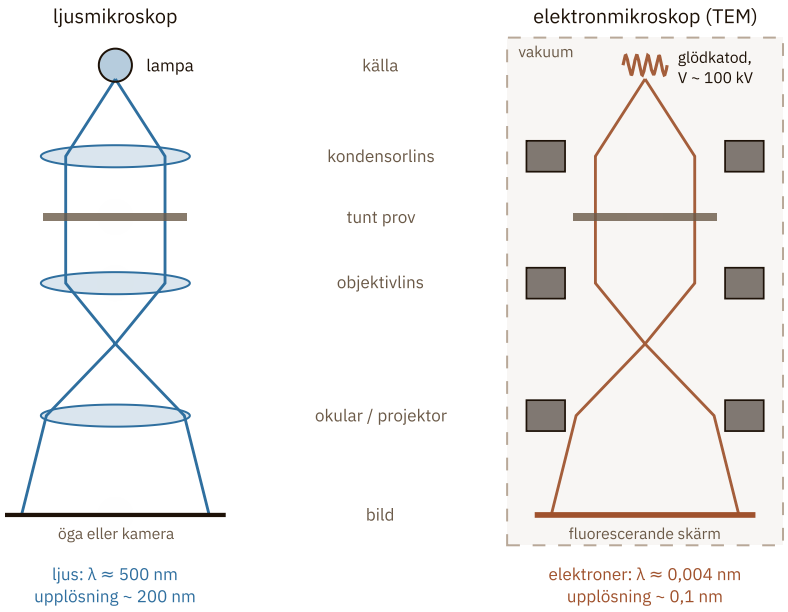
Räkna gärna med $hc = 1240$ eV·nm och $m_e c^2 = 511$ keV; då behöver inga joule användas alls. Skillnaden är $0{,}5\,\%$ vid 10 kV, $2\,\%$ vid 40 kV och $5\,\%$ vid 100 kV.



Elektronens de Broglie-våglängd mot accelerationsspänningen, i logaritmisk skala. Under ungefär 10 kV sammanfaller den klassiska och den relativistiska kurvan; i det skuggade området där TEM arbetar ger den klassiska formeln några till knappt $20\,\%$ för lång våglängd.

4. TEM och SEM

I ett **transmissionselektronmikroskop** (TEM) går strålen rakt genom provet. En kondensorlins av magnetfält gör strålen parallell, en objektivlins ger en mellanbild och en projektionslins en slutlig reell bild på en fluorescerande skärm eller en detektor — samma roller som objektiv och okular i ett optiskt mikroskop. Allt sitter i vakuum, annars sprids elektronerna mot luftmolekylerna.



Ljusmikroskopet och TEM sida vid sida: samma roller för källa, kondensor, prov, objektiv och projektor, men glaslinserna är utbytta mot magnetspolar och ljuset mot elektroner i vakuum. Det som ändras är våglängden, och därmed upplösningen.

Upplösningen blir sällan bättre än $0{,}1$ nm, trots att våglängden kan vara en hundradel av det. En orsak är att den magnetiska linsens brännvidd beror på elektronens fart, och alla elektroner i strålen har inte exakt samma fart.

I ett **svepelektronmikroskop** (SEM) fokuseras strålen till en fin punkt som sveper över provet. Där strålen träffar slås sekundärelektroner loss, och en anod några hundra volt positiv relativt provet samlar upp dem. Strömmen varierar med ytans lutning, och den variationen blir bilden.

	TEM	SEM
Strålen	går genom provet	sveper över ytan
Provet	10–100 nm tunt	får vara tjockt
Det som mäts	transmitterade elektroner	sekundärelektroner från ytan
Upplösning	ca $0{,}1$ nm	ca 10 nm
Bilden	tvärsnitt, inre struktur	ytan, tydligt tredimensionell

⚠ Vanliga fel

- **Fotonformeln används för elektronen.** $\lambda = hc/E$ gäller bara masslösa fotoner. För elektronen är $\lambda = h/p$ med $p = \sqrt{2m_eK}$, eller den relativistiska formeln.

- **Spänning och energi blandas.** En elektron accelererad genom V volt får $K = eV$, alltså V elektronvolt — men i SI-enheter ska K i joule in, eV med $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.
- **Den klassiska formeln används vid hundratals kV.** Jämför alltid K med $m_e c^2 = 511$ keV. Redan vid 100 kV är felet $5\,\%$.
- **Upplösningen sätts lika med våglängden.** Våglängden är en nedre gräns; linsfel gör att TEM i praktiken stannar vid ungefär $0{,}1$ nm.

---

5. Lösta exempel

Exempel — TEM vid 200 kV

Ett transmissionselektronmikroskop accelererar elektroner från vila genom 200 kV. Bestäm elektronernas de Broglie-våglängd, dels med den klassiska formeln och dels relativistiskt. Hur stort blir felet med den klassiska formeln, och hur många gånger kortare är våglängden än grönt ljus med 550 nm?

Lösning

Energierna. $K = eV = 200$ keV och $m_e c^2 = 511$ keV. Kvoten $K/m_e c^2 \approx 0{,}39$ är inte liten, så den relativistiska formeln behövs.

Klassiskt.

$$pc = \sqrt{2 K m_e c^2} = \sqrt{2 \cdot 200 \cdot 511}\ \text{keV} = 452\ \text{keV}$$

$$\lambda_{\text{kl}} = \frac{hc}{pc} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{452 \cdot 10^3\ \text{eV}} = \boxed{2{,}74\ \text{pm}}$$

Fysika: Te ($m_e c^2$, hc)

Relativistiskt.

$$pc = \sqrt{K^2 + 2 K m_e c^2} = \sqrt{200^2 + 2 \cdot 200 \cdot 511}\ \text{keV} = 494\ \text{keV}$$

$$\lambda = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{494 \cdot 10^3\ \text{eV}} = \boxed{2{,}51\ \text{pm}}$$

Felet. Den klassiska formeln ger

$$\frac{2{,}742 - 2{,}508}{2{,}508} \approx \boxed{9{,}3\,\%}$$

för lång våglängd.

Jämförelse med ljus.

$$\frac{550\ \text{nm}}{2{,}51 \cdot 10^{-3}\ \text{nm}} \approx \boxed{2{,}19 \cdot 10^{5}}$$

Att upplösningen ändå bara blir omkring $0{,}1$ nm beror på linsfelen, inte på våglängden.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Elektron eller proton

En elektron och en proton accelereras var för sig från vila genom $1{,}00$ kV. Bestäm de Broglie-våglängden för båda och kvoten mellan dem.

Lösning

Klassiskt räcker. Båda får $K = 1{,}00$ keV, vilket är litet jämfört med både 511 keV och protonens viloenergi 938 MeV.

Elektronen.

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2 m_e e V}} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}00 \cdot 10^{3}}} = \boxed{3{,}88 \cdot 10^{-11}\ \text{m}}$$

Protonen. Samma formel med $m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg:

$$\lambda_p = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}00 \cdot 10^{3}}} = \boxed{9{,}05 \cdot 10^{-13}\ \text{m}}$$

Kvoten. Laddning och spänning är desamma, så bara massan skiljer:

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = \sqrt{1836} \approx \boxed{42{,}9}$$

Protonen ger alltså kortare våglängd vid samma spänning. Elektronerna används ändå, bland annat för att de är lätta att producera med en glödkatod och böjs lätt av magnetiska linser.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.1 Electron Waves

Stimulerad emission

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Fotonen, Bohrs atommodell

---

En atom växlar mellan energinivåer på tre sätt. Vid absorption tar den upp en foton vars energi matchar en energiövergång i atomen. Vid spontan emission faller den tillbaka av sig själv och sänder ut en foton med samma frekvens men slumpmässig riktning och fas. Vid stimulerad emission träffar en foton en redan exciterad atom och två fotoner går ut — varje ingående foton genererar alltså en extra. Resonansen mellan foton och atom gör att de två får samma riktning, fas och polarisation: de är koherenta. Det är en oväntad kvanteffekt och hela grunden för ljusförstärkning.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\frac{dN}{dt}}_{\substack{\text{fotonernas}\\ \text{tillväxt}}} \propto \underbrace{(n_{ex} - n_g)}_{\substack{\text{övervikt i det}\\ \text{övre tillståndet}}} \underbrace{N}_{\substack{\text{fotoner}\\ \text{i strålen}}}$$

Varje foton i strålen kan antingen stimulera en exciterad atom eller absorberas av en atom i grundtillståndet, och det som avgör vilket som vinner är bara vilket tillstånd som har flest atomer. Eftersom tillväxten dessutom är proportionell mot N självt växer en förstärkt stråle som en lavin.

---

1. Resonansvillkoret

Betrakta en atom med ett grundtillstånd E_g och ett exciterat tillstånd E_{ex}. En foton kan bara växelverka med just den övergången om dess energi passar energiskillnaden, samma villkor som ger linjespektrumet:

$$hf = E_{ex} - E_g$$

Fotoner med andra energier går förbi utan att påverka övergången. Alla tre processerna nedan handlar om fotoner med exakt den här energin.

---

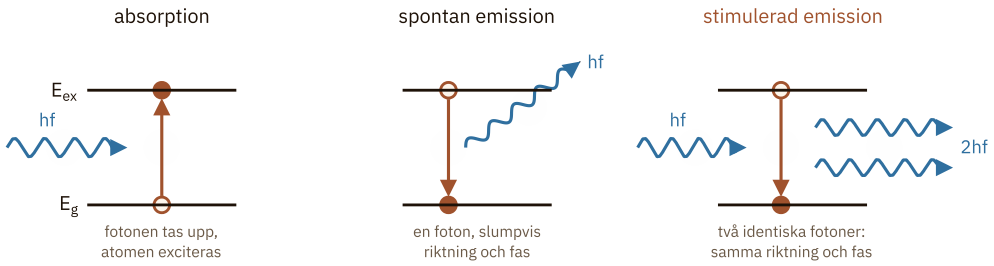
2. Tre processer

Absorption. En atom i grundtillståndet tar upp fotonen och hamnar i E_{ex}. Fotonen försvinner.

Spontan emission. En exciterad atom faller av sig själv tillbaka till E_g, typiskt inom 10^{-8} s, och sänder ut en foton med samma frekvens. Riktning och fas är slumpmässiga — varje atom strålar oberoende av de andra.

Stimulerad emission. En foton träffar en atom som redan är exciterad. Atomen faller till E_g och sänder ut en andra foton som är en kopia av den första: samma frekvens, riktning, fas och polarisation. Den inkommande fotonen fortsätter oförändrad. Energin i den nya fotonen kommer från atomen:

$$\underbrace{hf}_{\text{in}} + \underbrace{(E_{ex} - E_g)}_{\text{från atomen}} = \underbrace{2hf}_{\text{ut}}$$



De tre processerna som nivåscheman. Ofylld ring: atomens tillstånd före, fylld prick: efter. Vid absorption försvinner fotonen, vid spontan emission går en foton ut åt ett slumpvis håll, och vid stimulerad emission går två identiska fotoner ut åt samma håll.

	Före	Efter	Utgående fotoner
Absorption	foton + atom i E_g	atom i E_{ex}	inga
Spontan emission	atom i E_{ex}	foton + atom i E_g	en, slumpmässig riktning och fas
Stimulerad emission	foton + atom i E_{ex}	två fotoner + atom i E_g	två, identiska och koherenta

Varje stimulerad emission fördubblar alltså antalet fotoner i just det tillståndet. Upprepas processen längs strålen växer en enda foton till en lavin av koherenta fotoner — det är förstärkningen i en laser.

3. Förstärkning eller dämpning

En foton som färdas genom en gas kan antingen absorberas av en atom i E_g eller stimulera en atom i E_{ex}. För en övergång mellan två enkla tillstånd är de två processerna lika sannolika per atom. Takterna blir därför proportionella mot hur många atomer som finns i respektive tillstånd:

$$R_{\text{abs}} \propto n_g \qquad R_{\text{stim}} \propto n_{ex}$$

Varje absorption tar bort en foton och varje stimulerad emission lägger till en, så nettoförändringen av antalet fotoner N i strålen är

$$\boxed{\frac{dN}{dt} \propto (n_{ex} - n_g)\, N}$$

Är $n_{ex} < n_g$ dämpas strålen, är $n_{ex} > n_g$ förstärks den. I termisk jämvikt är nästan alla atomer i grundtillståndet, så ljuset absorberas. För förstärkning krävs populationsinversion.

⚠ Vanliga fel

- **Den inkommande fotonen absorberas.** Den gör det inte — den går vidare oförändrad, och en ny, identisk foton tillkommer.
- **Stimulerad emission skapar energi.** Den extra fotonens energi $E_{ex} - E_g$ tas från atomen, som hamnar i det lägre tillståndet.
- **Vilken foton som helst kan stimulera.** Fotonens energi måste stämma med övergången, $hf = E_{ex} - E_g$.
- **Spontan emission är koherent.** Spontant utsända fotoner har slumpmässig riktning och fas; bara stimulerad emission ger koherent ljus.
- **Stimulerad emission räcker för förstärkning.** Den konkurrerar med absorptionen, och vinner bara om $n_{ex} > n_g$.

---

4. Lösta exempel

Exempel — Neonövergången

Neonövergången som ger rött ljus har våglängden $632{,}8$ nm.

1. Hur stor är energiskillnaden mellan nivåerna, i eV?
2. En foton med våglängden $632{,}8$ nm träffar en neonatom i den övre nivån. Vad lämnar atomen, och hur stor är fotonernas sammanlagda energi efteråt?
3. Vad händer om i stället en foton med våglängden 500 nm träffar atomen, räknat bara med den här övergången?

Lösning

1. Energiskillnaden.

$$E_{ex} - E_g = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{632{,}8\ \text{nm}} = \boxed{1{,}96\ \text{eV}}$$

Fysika: Te (hc)

2. Stimulerad emission. Fotonen har rätt energi, så atomen sänder ut en andra foton med samma frekvens

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{2{,}998 \cdot 10^{8}}{632{,}8 \cdot 10^{-9}} = 4{,}74 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

och samma riktning, fas och polarisation. Två fotoner lämnar atomen, med sammanlagt

$$2hf = 2 \cdot 1{,}96\ \text{eV} = \boxed{3{,}92\ \text{eV}}$$

Den extra energin $1{,}96$ eV kommer från atomen, som hamnar i den lägre nivån.

3. Fel energi. En foton med 500 nm har

$$hf = \frac{1240}{500}\ \text{eV} = 2{,}48\ \text{eV} \neq 1{,}96\ \text{eV}$$

Den passar inte övergången och kan därför varken stimulera emission eller absorberas i den. Fotonen passerar.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Stimulerad emission mot absorption i jämvikt

En gas med övergången $1{,}96$ eV är i termisk jämvikt. Absorption och stimulerad emission antas vara lika sannolika per atom. Bestäm kvoten mellan takten för stimulerad emission och takten för absorption vid 300 K och vid 3000 K.

Lösning

Kvoten är populationskvoten. Eftersom takterna är proportionella mot n_{ex} respektive n_g och Boltzmannfaktorn ger populationerna, se Populationsinversion:

$$\frac{R_{\text{stim}}}{R_{\text{abs}}} = \frac{n_{ex}}{n_g} = e^{-(E_{ex}-E_g)/k_BT}$$

Vid 300 **K.** $k_BT = 8{,}617 \cdot 10^{-5} \cdot 300 = 0{,}0259$ eV, så

$$\frac{E_{ex}-E_g}{k_BT} = \frac{1{,}96}{0{,}0259} = 75{,}8 \qquad \frac{R_{\text{stim}}}{R_{\text{abs}}} = e^{-75{,}8} \approx \boxed{1{,}2 \cdot 10^{-33}}$$

Vid 3000 **K.** $k_BT = 0{,}259$ eV, så

$$\frac{E_{ex}-E_g}{k_BT} = 7{,}58 \qquad \frac{R_{\text{stim}}}{R_{\text{abs}}} = e^{-7{,}58} \approx \boxed{5{,}1 \cdot 10^{-4}}$$

Även vid glödtrådstemperatur absorberas ljuset nästan två tusen gånger oftare än det förstärks.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.4 The Laser

Populationsinversion

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #princip

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Stimulerad emission

I termisk jämvikt är nästan alla atomer i grundtillståndet. Maxwell-Boltzmannfördelningen ger kvoten mellan exciterade och icke-exciterade atomer till $0{,}00044$ för en övergång på 2 eV vid 3000 K — en försvinnande liten andel, så absorption är långt mer sannolik än stimulerad emission även vid hög temperatur. För att förstärka ljus måste jämvikten brytas så att den övre nivån är mer befolkad än den undre. Det kräver ett metastabilt tillstånd med livstid kring 10^{-3} s i stället för normala 10^{-8} s.

$$\boxed{\frac{n_{ex}}{n_g} = e^{-(E_{ex}-E_g)/kT}}$$

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\frac{n_{ex}}{n_g}}_{\substack{\text{atomer uppe per}\\ \text{atom nere}}} = \exp\left(-\frac{\overbrace{E_{ex}-E_g}^{\text{energisteget}}}{\underbrace{kT}_{\substack{\text{termisk}\\ \text{energi}}}}\right)$$

Kvoten avgörs av hur stort energisteget är jämfört med den termiska energin kT. Exponenten är negativ vid varje temperatur, så i jämvikt är det övre tillståndet alltid glesare befolkat — en inversion kräver att jämvikten bryts.

---

1. Nivåer och tillstånd

En energinivå kan ofta nås på flera sätt, och varje sätt är ett eget **tillstånd**. Väteatomens grundnivå $-13{,}6$ eV har två tillstånd och första exciterade nivån $-3{,}40$ eV har åtta. Maxwell–Boltzmannfördelningen gäller per tillstånd: i jämvikt vid temperaturen T är antalet atomer i ett tillstånd med energin E_i

$$n_i = A\, e^{-E_i/k_B T}$$

där A bestäms av det totala antalet atomer. Kvoten mellan två tillstånd ger formeln i rutan överst — konstanten A tar ut sig. Jämför vi i stället två *nivåer* med g_{ex} och g_g tillstånd var, räknas varje tillstånd för sig:

$$\boxed{\frac{N_{ex}}{N_g} = \frac{g_{ex}}{g_g}\, e^{-(E_{ex}-E_g)/k_B T}}$$

---

2. Termisk jämvikt ger aldrig inversion

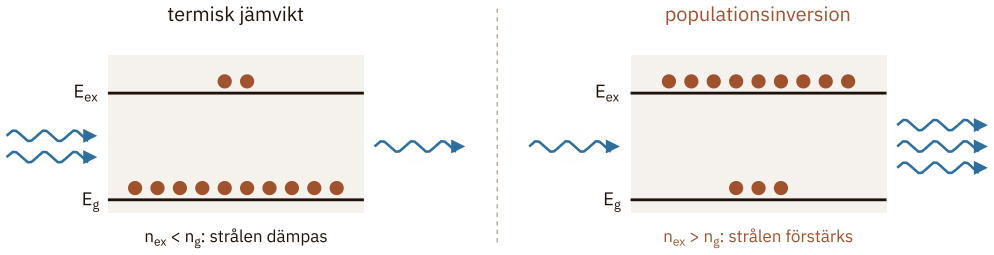
Exponenten är negativ för varje $T > 0$, så ett högre tillstånd är alltid glesare befolkat än ett lägre. För en övergång på $2{,}0$ eV:

T	$k_B T$	n_{ex}/n_g
300 K	0,026 eV	$2{,}5 \cdot 10^{-34}$
3000 K	0,26 eV	$4{,}4 \cdot 10^{-4}$
10 000 K	0,86 eV	0,098

Först när $T \to \infty$ närmar sig kvoten 1 — den blir aldrig större. Eftersom stimulerad emission och absorption är lika sannolika per atom, se Stimulerad emission, absorberar en gas i jämvikt alltid mer än den förstärker.

Att lysa in ljus med just övergångens frekvens hjälper inte heller. Så länge $n_g \gg n_{ex}$ går nästan all energi åt till absorption, och även med enormt intensivt ljus når man i bästa fall $n_{ex} = n_g$: där tar absorption och stimulerad emission ut varandra och gasen blir genomskinlig för strålningen.

Populationsinversion är det icke-jämviktsläge där ett högre tillstånd har fler atomer än ett lägre. Sätter vi in $n_{ex}/n_g > 1$ i Boltzmannfaktorn och löser ut T blir temperaturen negativ — ett formellt sätt att säga att inget termiskt jämviktsläge kan ge inversion.



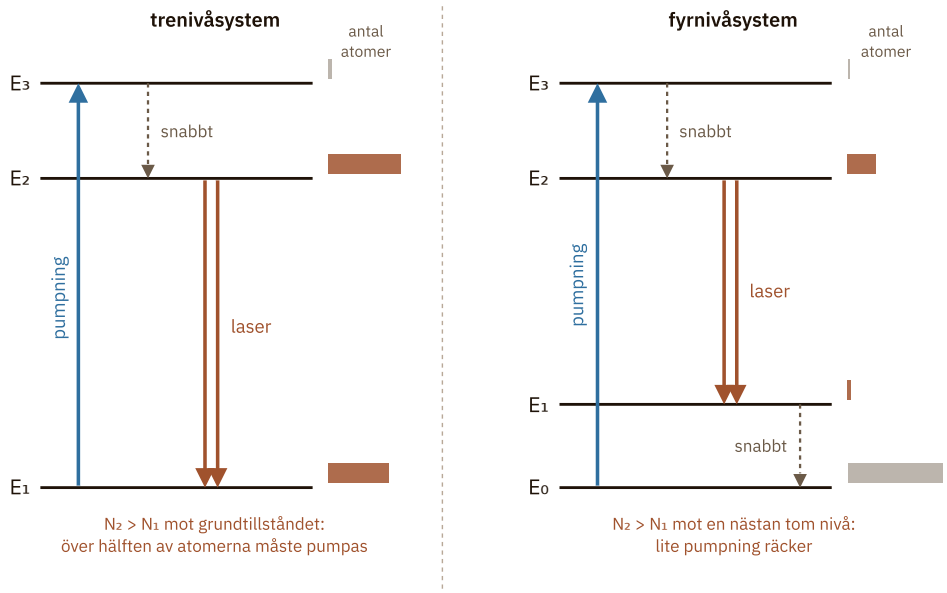
Varje prick är en atom. I jämvikt ligger de flesta i grundtillståndet, så fotonerna i en stråle absorberas oftare än de stimulerar emission och strålen dämpas. Vid inversion är det tvärtom: de flesta atomerna väntar i det övre tillståndet, och strålen förstärks.

---

3. Metastabilt tillstånd och pumpning

Inversionen byggs i stället upp med atomer som har ett **metastabilt** tillstånd. Vanliga exciterade tillstånd töms genom spontan emission på omkring 10^{-8} s, medan ett metastabilt tillstånd lever omkring 10^{-3} s, ungefär 10^{5} gånger längre. Det kan inträffa när bevarandet av rörelsemängdsmoment försvårar övergången nedåt.

Atomerna **pumpas** upp ur grundtillståndet, i en gas till exempel med en elektrisk urladdning där elektroner och joner exciterar atomerna genom kollisioner. De kortlivade tillstånden töms på 10^{-8} s, men atomerna samlas i det metastabila tillståndet. Det har fortfarande färre atomer än grundtillståndet, men många fler än ett nästan tomt tillstånd strax ovanför grundtillståndet. Inversionen gäller mellan de två — det är så lasern arbetar.



Tre- och fyrnivåsystem jämförda: i båda pumpas atomerna till E_3 och faller snabbt till den metastabila E_2, men i trenivåsystemet måste E_2 inverteras mot grundtillståndet, medan fyrnivåsystemets undre lasernivå E_1 töms snabbt och nästan är tom (staplarna visar antal atomer).

⚠ Vanliga fel

- **Hög temperatur ger inversion.** Den gör det aldrig: $e^{-\Delta E/k_B T} < 1$ för alla positiva T.
- **Inversionen måste gälla mot grundtillståndet.** Det räcker att den övre lasernivån har fler atomer än den *undre lasernivån*, som gärna ligger strax ovanför grundtillståndet och töms snabbt.

- **Nivåer och tillstånd blandas.** Boltzmannfaktorn gäller per tillstånd. Jämförs två nivåer måste antalet tillstånd g i varje nivå tas med.
- $k_B T$ **i fel enhet.** Räkna antingen i eV med $k_B = 8{,}617 \cdot 10^{-5}$ eV/K eller i J med $k_B = 1{,}381 \cdot 10^{-23}$ J/K — exponenten måste bli dimensionslös.
- **Metastabil betyder stabil.** Tillståndet har en ändlig livstid kring 10^{-3} s; det är bara ovanligt långlivat.

4. Lösta exempel

Exempel — Exciterat väte på solytan

Solens yta har temperaturen 5800 K. Väteatomens grundnivå har 2 tillstånd och första exciterade nivån 8 tillstånd, och energiskillnaden mellan nivåerna är $10{,}2$ eV. Hur många väteatomer finns i den första exciterade nivån per atom i grundnivån?

Lösning

Termisk energi.

$$k_B T = 8{,}617 \cdot 10^{-5}\ \text{eV/K} \cdot 5800\ \text{K} = 0{,}500\ \text{eV}$$

Fysika: Te (k)

Exponenten.

$$\frac{E_{ex} - E_g}{k_B T} = \frac{10{,}2}{0{,}500} = 20{,}4 \qquad e^{-20{,}4} = 1{,}37 \cdot 10^{-9}$$

Med tillståndsfaktorn. $g_{ex}/g_g = 8/2 = 4$, så

$$\frac{N_{ex}}{N_g} = 4 \cdot 1{,}37 \cdot 10^{-9} = \boxed{5{,}48 \cdot 10^{-9}}$$

Ungefär fem atomer på en miljard är exciterade — ändå är de många nog att ge solspektrumets väteabsorption i Balmerserien, eftersom solen innehåller så enormt mycket väte.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Termisk pumpning räcker inte

Två enkla tillstånd skiljer sig med $1{,}17$ eV.

1. Vid vilken temperatur är $n_{ex}/n_g = 0{,}100$?
2. Vilken temperatur skulle formellt krävas för att $n_{ex}/n_g = 2{,}00$?

Lösning

Lös ut temperaturen. Logaritmera Boltzmannfaktorn:

$$\ln \frac{n_{ex}}{n_g} = -\frac{\Delta E}{k_B T}$$

$$T = -\frac{\Delta E}{k_B \ln(n_{ex}/n_g)}$$

1. Med $\ln 0{,}100 = -2{,}303$:

$$T = \frac{1{,}17 \text{ eV}}{8{,}617 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K} \cdot 2{,}303} = \boxed{5{,}90 \cdot 10^{3} \text{ K}}$$

2. Med $\ln 2{,}00 = 0{,}693$:

$$T = -\frac{1{,}17}{8{,}617 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}693} \text{ K} = \boxed{-1{,}96 \cdot 10^{4} \text{ K}}$$

Temperaturen blir negativ: ingen jämvikt, hur varm som helst, ger inversion. Den måste skapas genom pumpning.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.4 The Laser

Laser

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#fysik #optik #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Populationsinversion, Stimulerad emission

---

Lasern kombinerar populationsinversion med en resonator: speglar låter ljuset passera det aktiva mediet många gånger, så att varje foton hinner utlösa allt fler stimulerade emissioner. I fyra-nivålasern skapas inversionen genom excitationspumpning — elektriska urladdningar genom en gas ger elektroner och joner som exciterar atomer via krockar — och den sker mellan två exciterade nivåer, så den undre behöver inte vara grundtillståndet. Halvledarlasern ger i stället kontinuerlig drift och sitter i laserpekare, dvd och Blu-ray.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{hf}_{\substack{\text{laserfotonens}\\ \text{energi}}} = \underbrace{E_2}_{\substack{\text{övre laser-}\\ \text{nivån}}} - \underbrace{E_1}_{\substack{\text{undre laser-}\\ \text{nivån}}}$$

$$\underbrace{\eta_{\max}}_{\substack{\text{största}\\ \text{verkningsgrad}}} = \frac{\overbrace{E_2 - E_1}^{\text{ut per foton}}}{\underbrace{E_3}_{\text{in per atom}}}$$

Pumpen betalar hela vägen upp till E_3, men laserfotonen tar bara med sig steget $E_2 - E_1$. Resten blir värme i de snabba övergångarna, och därför har laserljuset alltid längre våglängd än pumpljuset.

---

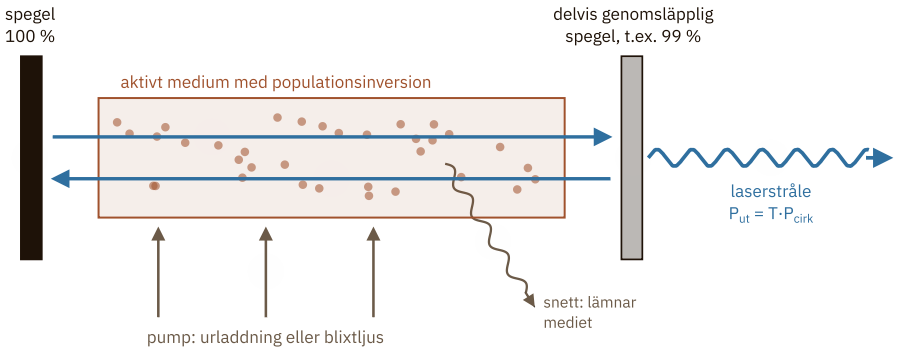
1. Tre ingredienser

Namnet är en förkortning av *light amplification by stimulated emission of radiation*, och en laser behöver tre delar:

1. **Ett aktivt medium** — en gas, ett fast ämne eller en halvledare med lämpliga energinivåer, där stimulerad emission kan förstärka ljuset.

2. **En pump** som tillför energi och håller uppe en populationsinversion, annars absorberar mediet mer än det förstärker.
3. **En resonator** — två speglar som skickar ljuset fram och tillbaka genom mediet, så att varje foton hinner stimulera många atomer.

Resultatet är en stråle som är nästan monokromatisk, parallell och koherent över hela tvärsnittet.



De tre delarna i en bild. Pumpen håller uppe inversionen i det aktiva mediet, och speglarna skickar ljuset längs axeln fram och tillbaka så att det förstärks vid varje passage. Fotoner som går snett lämnar mediet, och en liten andel av det cirkulerande ljuset släpps ut genom den delvis genomsläppliga spegeln.

---

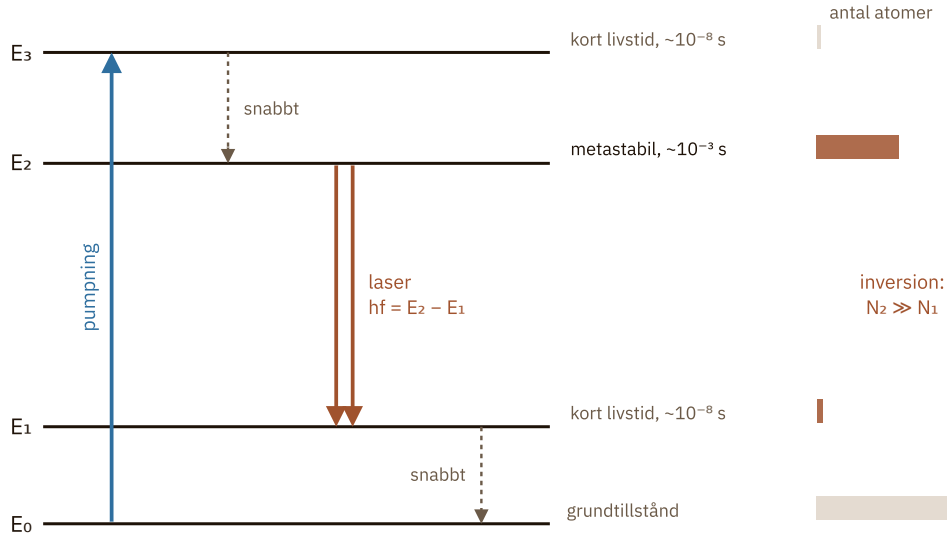
2. Fyra-nivålasern

Atomen har grundtillståndet $E_0 = 0$ och tre exciterade tillstånd $E_1 < E_2 < E_3$. E_1 och E_3 har vanliga livstider kring 10^{-8} s, medan E_2 är metastabilt med livstid kring 10^{-3} s.

1. **Före pumpning** är alla atomer i grundtillståndet.
2. **Pumpningen** lyfter atomer till E_1, E_2 och E_3.
3. **Efter ungefär 10^{-8} s** har E_3 tömts, delvis ned till E_2, och E_1 har tömts till grundtillståndet. Atomerna har samlats i E_2, som nu har fler atomer än det nästan tomma E_1.
4. **Laserövergången** $E_2 \rightarrow E_1$ startar med några spontana fotoner. Speglarna skickar tillbaka dem genom mediet, och de stimulerar allt fler atomer i E_2.

Laserfotonens energi är energiskillnaden i övergången, som i ett linjespektrum:

$$hf = E_2 - E_1$$



Fyra-nivålasern. Pumpningen lyfter atomer till E_3, som snabbt faller till det metastabila E_2. Laserövergången går till E_1, som i sin tur töms snabbt till grundtillståndet. Staplarna till höger visar populationerna strax efter pumpningen, schematiskt: E_2 har fler atomer än E_1 trots att grundtillståndet har flest.

Båda hjälpnivåerna fyller en funktion. E_3 matar E_2 med atomer, och E_1 gör inversionen lätt: eftersom den undre lasernivån töms snabbt räcker det med ett fåtal atomer i E_2 för att den ska ha fler än E_1. Vore den undre lasernivån grundtillståndet skulle mer än hälften av alla atomer behöva pumpas upp.

Varje pumpning kostar minst E_3 per atom och varje laserfoton bär $E_2 - E_1$, så högst andelen

$$\boxed{\eta_{\max} = \frac{E_2 - E_1}{E_3}}$$

av pumpenergin kan komma ut som laserljus. Resten blir värme i de snabba övergångarna.

---

3. Resonatorn

Den ena spegeln reflekterar $100\,\%$, den andra kanske 95–$99\,\%$. Fotoner som går snett ut ur mediet försvinner, medan de som går längs axeln passerar många gånger och tar över. Det är därför strålen blir parallell.

Den delvis genomsläppliga spegeln släpper ut en andel T av den effekt som cirkulerar i resonatorn:

$$P_{\text{ut}} = T\,P_{\text{cirk}}$$

Antalet fotoner per sekund i strålen följer ur effekten och fotonenergin, se Fotonen.

---

4. Pulsad och kontinuerlig drift

En **pulsad laser** ger en blixt varje gång atomerna pumpas: inversionen byggs upp, töms genom stimulerad emission och byggs upp igen. I en **kontinuerlig laser** pumpas atomerna hela tiden. Då måste pumpningen vara så stark att lika många atomer per sekund förs upp till E_2 som lämnar E_2 genom emission, annars bryts inversionen.

Bara vissa material har rätt nivåstruktur. Gaslasrar och fasta lasrar med till exempel neodymglas använder atomernas nivåer. Den vanligaste typen, halvledarlasern i laserpekare, laserskrivare och dvd- och Blu-rayspelare, använder i stället energiband för elektroner som rör sig fritt i en halvledare.

Ett neonrör i en reklamskylt lyser med samma röda linje som en helium–neonlaser, men där sker bara spontan emission: det finns varken inversion eller speglar.

⚠ Vanliga fel

- **Laserfotonen får pumpenergin.** Den får $E_2 - E_1$, som är mindre än pumpenergin E_3. Laserljuset har därför längre våglängd än pumpljuset.
- **Inversionen gäller mot grundtillståndet.** I fyra-nivålasern räcker det att E_2 har fler atomer än E_1.
- **Båda speglarna reflekterar allt.** Då kommer ingen stråle ut; den ena måste släppa igenom en liten andel.
- **Kontinuerlig drift utan jämvikt i takterna.** Pumptakten in i E_2 måste vara minst lika stor som takten ut ur E_2, annars upphör inversionen.
- **Halvledarlasern använder atomnivåer.** Den använder energiband i halvledaren.

---

5. Lösta exempel

Exempel — En fyra-nivålaser

En fyra-nivålaser har nivåerna $E_1 = 0{,}25$ eV, $E_2 = 1{,}42$ eV och $E_3 = 1{,}80$ eV över grundtillståndet.

1. Vilken våglängd har laserljuset, och vilken våglängd måste pumpljuset ha för att lyfta atomer från grundtillståndet till E_3?
2. Hur stor andel av pumpenergin kan som mest komma ut som laserljus?
3. En puls tömmer $2{,}00 \cdot 10^{18}$ atomer i E_2 genom stimulerad emission under $10{,}0$ ns. Bestäm pulsens energi och medeleffekt.

Lösning

1. Våglängderna. Laserövergången har $E_2 - E_1 = 1{,}17$ eV, så

$$\lambda_{\text{laser}} = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{1{,}17\ \text{eV}} = \boxed{1060\ \text{nm}}$$

Fysika: Te (hc) Pumpningen kräver $1{,}80$ eV:

$$\lambda_{\text{pump}} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{1{,}80\ \text{eV}} = \boxed{689\ \text{nm}}$$

Laserljuset är infrarött, pumpljuset rött.

2. Största verkningsgraden.

$$\eta_{\max} = \frac{E_2 - E_1}{E_3} = \frac{1{,}17}{1{,}80} = \boxed{65{,}0\,\%}$$

3. Pulsen. Varje atom ger en foton med $1{,}17$ eV:

$$E = 2{,}00\cdot 10^{18}\cdot 1{,}17\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\ \text{J} = \boxed{0{,}375\ \text{J}}$$

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{0{,}375\ \text{J}}{10{,}0\cdot 10^{-9}\ \text{s}} = \boxed{3{,}75\cdot 10^{7}\ \text{W}}$$

En måttlig energi blir en mycket hög effekt när den kommer ut på några nanosekunder.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Helium–neonlaser i kontinuerlig drift

En helium–neonlaser ger $1{,}00$ mW kontinuerligt vid $632{,}8$ nm. Utgångsspegeln släpper igenom $1{,}0\,\%$ och reflekterar resten.

1. Hur många fotoner per sekund lämnar lasern?
2. Hur stor effekt cirkulerar i resonatorn?

3. Hur många atomer per sekund måste minst pumpas upp till den övre lasernivån?

Lösning

1. Fotontakten. Fotonenergin är

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}}{632{,}8 \cdot 10^{-9}} = 3{,}14 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

så

$$\frac{dN}{dt} = \frac{P}{hf} = \frac{1{,}00 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 10^{-19}} = \boxed{3{,}19 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1}}$$

2. Cirkulerande effekt. Ur $P_{\text{ut}} = T\,P_{\text{cirk}}$:

$$P_{\text{cirk}} = \frac{P_{\text{ut}}}{T} = \frac{1{,}00\ \text{mW}}{0{,}010} = \boxed{100\ \text{mW}}$$

3. Pumptakten. I kontinuerlig drift är antalet fotoner i resonatorn konstant. Varje foton som lämnar lasern ersätts av en stimulerad emission, och varje sådan tömmer en atom i den övre nivån. Pumpen måste därför föra upp minst

$$\boxed{3{,}19 \cdot 10^{15}\ \text{atomer/s}}$$

I verkligheten krävs mer, eftersom en del atomer faller spontant och en del fotoner går förlorade i speglarna.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.4 The Laser

Svartkroppsstrålning

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Temperatur och värme, Linjespektrum

---

Vätskor och fasta ämnen strålar med kontinuerligt spektrum i stället för det linjespektrum en gas ger. Idealfallet är svartkroppen, som absorberar och emitterar vid alla våglängder. Experimenten ger fyra resultat: den totala intensiteten I i $\mathrm{W/m^2}$ varierar med temperaturen, spektralemittansen $I(\lambda)$ i $\mathrm{W/m^3}$ varierar med våglängden och har ett maximum, läget $\lambda_{\max}$ förskjuts mot kortare våglängder när T ökar, och alla kurvor har samma form — de faller på varandra om axlarna skalas om.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{I}_{\substack{\text{total intensitet}\\ \text{i W/m}^2}} = \int_0^{\infty} \underbrace{I(\lambda)}_{\substack{\text{spektralemittans}\\ \text{i W/m}^3}} \underbrace{d\lambda}_{\substack{\text{smalt}\\ \text{våglängdsband}}}$$

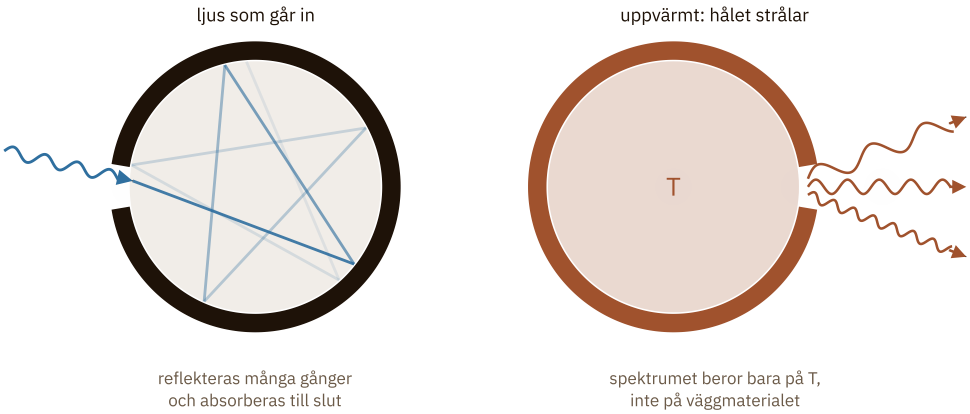
$I(\lambda)$ är kurvans höjd — hur mycket som strålas ut per meter våglängd — och I är arean under hela kurvan, alltså allt som strålas ut per kvadratmeter yta.

---

1. Svartkroppen som idealisering

En svartkropp absorberar all strålning som faller in, vid alla våglängder, och reflekterar ingenting. Kall ser den därför helt svart ut. Samma yta är också den bästa tänkbara strålaren. En kropp i termisk jämvikt med omgivningen måste nämligen stråla ut lika mycket som den absorberar vid varje våglängd, annars skulle den av sig själv bli varmare eller kallare än omgivningen.

En perfekt svartkropp finns inte, men ett **hålrum med ett litet hål** kommer nära. Ljus som går in genom hålet reflekteras många gånger mot insidan och absorberas till slut. När hålrummet värms upp blir strålningen som kommer ut genom hålet nästan ideal svartkroppsstrålning. Spektrumet beror då bara på temperaturen och inte på vilket material väggarna är gjorda av.



Hålrummet som svartkropp. Vänster: ljus som går in genom hålet studsar mot väggarna och försvagas vid varje reflektion, så nästan inget kommer ut igen. Höger: värms hålrummet upp strålar hålet ut svartkroppsstrålning med ett spektrum som bara beror på T.

---

2. Intensitet och spektralemittans

Spektralemittansen $I(\lambda)$ är intensiteten per våglängdsintervall. $I(\lambda)\,d\lambda$ är alltså den intensitet som strålas ut i intervallet mellan λ och $\lambda + d\lambda$. Den totala intensiteten får vi genom att summera över alla våglängder, och den är arean under kurvan:

$$\boxed{I = \int_0^\infty I(\lambda)\,d\lambda}$$

Fysika: Fd4 (i Stefan-Boltzmanns lag, som $I(T) = \int_0^\infty I(\lambda, T)\,d\lambda$)

Storhet	Betydelse	Enhet
I	effekt per ytenhet, alla våglängder	$\mathrm{W/m^2}$
$I(\lambda)$	effekt per ytenhet och per våglängdsintervall	$\mathrm{W/m^3}$

För ett smalt intervall $\Delta\lambda$ räcker det att multiplicera höjden med bredden:

$$\Delta I \approx I(\lambda)\,\Delta\lambda$$

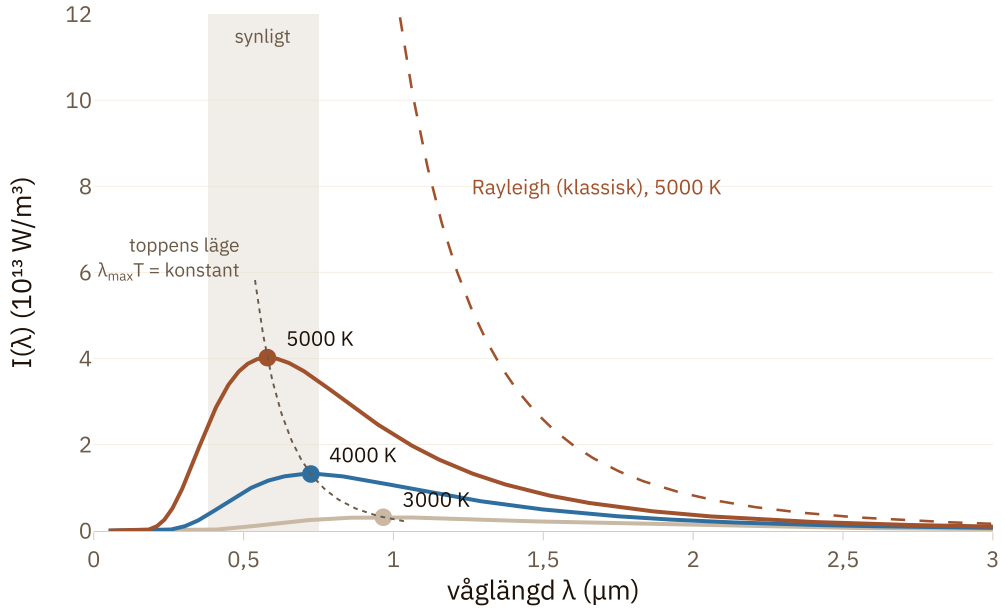
---

3. De experimentella lagarna

De fyra observationerna i ingressen motsvarar var sin lag:

Observation	Lag	Not
Totala intensiteten växer kraftigt med T	$I = \sigma T^4$	Stefan-Boltzmanns lag
Toppen flyttas mot kortare våglängder när T ökar	$\lambda_{\max} T = \text{konstant}$	Wiens förskjutningslag
Kurvorna har samma form vid alla temperaturer	hela $I(\lambda)$	Plancks strålningslag

Stefan-Boltzmanns och Wiens lagar hittades först empiriskt. Båda följer ur Plancks lag, den första genom integration och den andra genom derivering.



Spektralemittansen vid tre temperaturer. Toppen blir högre och flyttas mot kortare våglängder när temperaturen ökar (prickat). Streckat: Rayleighs klassiska förutsägelse vid 5000 K, som stämmer vid långa våglängder men växer utan gräns vid korta.

---

4. Den klassiska fysikens misslyckande

Rayleigh behandlade strålningen i hålrummet som stående elektromagnetiska vågor, alltså svängningsmoder. Enligt ekvipartitionsprincipen skulle varje mod få medelenergin $k_B T$. När han räknade antalet moder per våglängdsintervall fick han

$$I(\lambda) = \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4}$$

Vid långa våglängder stämmer uttrycket med mätningarna. Vid korta våglängder går det däremot mot oändligheten, medan de uppmätta kurvorna går mot noll. Integralen över alla våglängder blir dessutom oändlig. Det kallades den **ultravioletta katastrofen**.

Planck löste problemet genom att låta svängarna i väggarna bara ha energierna $0,\ hf,\ 2hf, \ldots$ En svängare med hög frekvens behöver ta emot ett stort energikvantum hf för att alls bli exciterad. Andelen svängare i första exciterade nivån är Boltzmannfaktorn $e^{-hf/k_B T}$ (se Populationsinversion). När $hf \gg k_B T$ är nästan inga svängare exciterade, och då strålar de nästan inget vid korta våglängder. Vid rumstemperatur är $k_B T \approx 0{,}026$ eV, medan en foton av synligt ljus har 2–3 eV.

⚠ Vanliga fel

- **I och $I(\lambda)$ blandas ihop.** I mäts i $\mathrm{W/m^2}$ och är arean under kurvan. $I(\lambda)$ mäts i $\mathrm{W/m^3}$ och är kurvans höjd.
- **Temperaturen anges i Celsius.** Alla strålningslagar kräver absolut temperatur i kelvin.
- **“Svart” tolkas som “strålar inte”.** Svartkroppen strålar mer än någon annan kropp vid samma temperatur. Vid rumstemperatur ligger strålningen i det infraröda, och därför ser vi den inte.
- **Spektrumet tros bara finnas nära toppen.** En svartkropp strålar vid alla våglängder. Långt från $\lambda_{\max}$ är intensiteten bara mycket liten.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Hur stor är den ultravioletta katastrofen?

En svartkropp har temperaturen 2500 K. Beräkna kvoten mellan Rayleighs klassiska spektralemittans och Plancks spektralemittans vid våglängderna $10{,}0$ µm, $1{,}00$ µm och 400 nm.

Lösning

Kvoten allmänt. Sätt $x = hc/(\lambda k_B T)$. Då är

$$\frac{I_{\text{Rayleigh}}}{I_{\text{Planck}}} = \frac{2\pi c k_B T/\lambda^4}{2\pi hc^2/(\lambda^5(e^x-1))} = \frac{\lambda k_B T}{hc}(e^x - 1) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Exponenten. Med $hc/k_B = 1{,}439 \cdot 10^{-2}$ m·K blir

$$x = \frac{1{,}439 \cdot 10^{-2}}{\lambda \cdot 2500}$$

vilket ger $x = 0{,}5755,\ 5{,}755$ och $14{,}39$ för de tre våglängderna.

Kvoterna.

$$10{,}0\ \mu\text{m}: \quad \frac{e^{0{,}5755}-1}{0{,}5755} \approx \boxed{1{,}35}$$

$$1{,}00\ \mu\text{m}: \quad \frac{e^{5{,}755}-1}{5{,}755} \approx \boxed{54{,}7}$$

$$400\ \text{nm}: \quad \frac{e^{14{,}39}-1}{14{,}39} \approx \boxed{1{,}23 \cdot 10^{5}}$$

Långt ute i det infraröda ligger den klassiska formeln bara $35\,\%$ för högt. I det synliga är den fel med en faktor hundratusen.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Strålning ur ett hål i en ugn

En ugn håller temperaturen $1000\ ^\circ\text{C}$. I luckan finns ett runt hål med diametern $5{,}00$ mm, och hålet strålar som en svartkropp. Beräkna effekten som strålar ut genom hålet och den våglängd där spektralemittansen är störst.

Lösning

Temperatur och area. $T = 1000 + 273 = 1273$ K och

$$A = \pi r^2 = \pi\,(2{,}50 \cdot 10^{-3})^2 = 1{,}963 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^2$$

Effekten. Stefan-Boltzmanns lag ger intensiteten, och effekten är intensitet gånger area:

$$I = \sigma T^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 1273^4 = 1{,}49 \cdot 10^{5}\ \text{W/m}^2$$

Fysika: Fd4 (Stefan-Boltzmanns lag), Te (σ)

$$P = IA = \sigma T^4 A = 5{,}670 \cdot 10^{-8} \cdot 1273^4 \cdot 1{,}963 \cdot 10^{-5} \approx \boxed{2{,}92\ \text{W}}$$

Toppens läge. Wiens förskjutningslag ger

$$\lambda_{\max} = \frac{2{,}90 \cdot 10^{-3}}{1273} \approx \boxed{2{,}28\ \mu\text{m}}$$

Fysika: Fd4 (Wiens förskjutningslag) Toppen ligger i det infraröda. Bara den kortvågiga svansen når det synliga området, och därför glöder ugnen svagt röd.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.5 Continuous Spectra

Stefan-Boltzmanns lag

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #samband

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Svartkroppsstrålning

Den totala intensiteten från en svartkropp — effekten per kvadratmeter yta, summerad över alla våglängder — växer med fjärde potensen av temperaturen, med $\sigma = 5{,}6704 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2K^4)}$. Lagen fås genom att integrera Plancks strålningslag över alla våglängder.

$$\boxed{I = \sigma T^4}$$

Fysika: Fd4 (Stefan-Boltzmanns lag)

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{I}_{\substack{\text{utstrålad effekt}\\ \text{per m}^2}} = \underbrace{\sigma}_{\substack{\text{Stefan-Boltzmanns}\\ \text{konstant}}} \underbrace{T^4}_{\substack{\text{absolut temp.}\\ \text{upphöjd till 4}}}$$

$$\underbrace{P}_{\text{effekt}} = \underbrace{e}_{\substack{\text{emissivitet}\\ 0 \le e \le 1}}\ \sigma\ \underbrace{A}_{\substack{\text{strålande}\\ \text{yta}}}\ T^4$$

Fjärde potensen gör temperaturen helt dominerande: en dubbelt så varm kropp strålar sexton gånger mer. Arean och emissiviteten skalar bara resultatet rakt proportionellt.

---

1. Från intensitet till effekt

I är effekt per kvadratmeter. En svartkropp med ytan A strålar därför ut effekten $\sigma A T^4$. En verklig yta strålar mindre, och det beskrivs med emissiviteten e, där $0 \le e \le 1$ och $e = 1$ gäller för en svartkropp:

$$\boxed{P = e\sigma A T^4}$$

En kropp tar också emot strålning från omgivningen. Den nettoeffekt som strålar ut beror därför på båda temperaturerna, se Värmetransport:

$$P_{\text{netto}} = e\sigma A\,(T^4 - T_{\text{omg}}^4)$$

---

2. Härledning ur Plancks lag

Den totala intensiteten är arean under Plancks kurva. Integralen ger T^4-beroendet och uttrycker samtidigt σ i naturkonstanter.

Härledning av Stefan-Boltzmanns lag

Integralen.

$$I = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\,(e^{hc/\lambda k_B T} - 1)}\,d\lambda$$

Fysika: Fd4 (Plancks strålningslag, med $c_1 = 2\pi hc^2$ och $c_2 = hc/k$)

Variabelbyte. Sätt $x = hc/(\lambda k_B T)$. Då gäller

$$\lambda = \frac{hc}{xk_BT} \qquad d\lambda = -\frac{hc}{x^2 k_B T}\,dx \qquad \frac{1}{\lambda^5} = \left(\frac{xk_BT}{hc}\right)^5$$

och gränserna $\lambda : 0 \to \infty$ blir $x : \infty \to 0$. Minustecknet vänder tillbaka gränserna.

Sätt in.

$$I = 2\pi hc^2 \int_0^\infty \left(\frac{xk_BT}{hc}\right)^5 \frac{1}{e^x - 1} \cdot \frac{hc}{x^2 k_B T}\,dx$$

$$I = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx$$

Standardintegralen. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx = \frac{\pi^4}{15} \approx 6{,}494$, så

$$I = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3}\,T^4$$

Jämför vi med $I = \sigma T^4$ ser vi att Stefan-Boltzmanns konstant är en kombination av naturkonstanter:

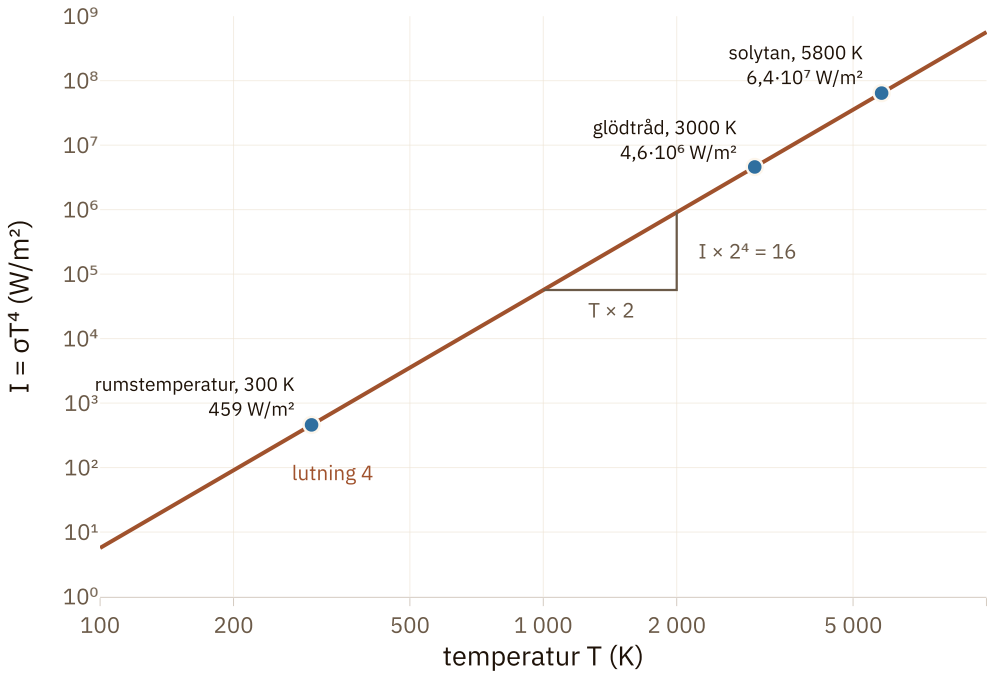
$$\boxed{\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3} = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2K^4)}}$$

Fysika: Te (σ, i formen $\pi^2k^4/(60\hbar^3c^2)$)

3. Fjärde potensen

Eftersom intensiteten växer som T^4 får små temperaturändringar stor effekt:

- Dubblas T blir I $2^4 = 16$ gånger större.
- Ökar T med $10\,\%$ ökar I med $1{,}1^4 - 1 \approx 46\,\%$.
- För små ändringar gäller $\dfrac{\Delta I}{I} \approx 4\,\dfrac{\Delta T}{T}$.



$I = \sigma T^4$ i log-log-skala blir en rät linje med lutningen 4: en fördubbling av T ger 16 gånger större intensitet, och från rumstemperatur till solytan växer intensiteten med över fem tiopotenser.

⚠ Vanliga fel

- **Temperaturen anges i Celsius.** T^4 förstärker felet enormt. Räkna alltid i kelvin.
- **Fel area.** En kula strålar från hela ytan $4\pi r^2$, inte från tvärsnittet πr^2.
- **Omgivningen glöms bort.** Frågas det efter den effekt som måste tillföras för att hålla temperaturen är det nettoeffekten som gäller.
- T_{omg} **dras av före upphöjningen.** $T^4 - T_{\mathrm{omg}}^4$ är inte samma sak som $(T - T_{\mathrm{omg}})^4$.

4. Lösta exempel

Exempel — Svart kula i ett rum

En svart kula med radien $3{,}00$ cm hålls vid temperaturen 800 K i ett rum där väggarna har temperaturen $20\ ^\circ$C. Beräkna den effekt kulan strålar ut, den effekt den tar emot från väggarna och den effekt som måste tillföras för att hålla temperaturen konstant.

Lösning

Arean.

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 0{,}0300^2 = 1{,}131 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^2$$

Utstrålad effekt. Med $e = 1$:

$$P_{\mathrm{ut}} = \sigma A T^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 1{,}131 \cdot 10^{-2} \cdot 800^4 \approx \boxed{263\ \mathrm{W}}$$

Mottagen effekt. En svartkropp absorberar allt, och väggarna har $T_{\mathrm{omg}} = 293$ K:

$$P_{\mathrm{in}} = \sigma A T_{\mathrm{omg}}^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 1{,}131 \cdot 10^{-2} \cdot 293^4 \approx \boxed{4{,}73\ \mathrm{W}}$$

Nettoeffekt.

$$P_{\mathrm{netto}} = 263 - 4{,}73 \approx \boxed{258\ \mathrm{W}}$$

Omgivningen betyder bara ett par procent, eftersom $(293/800)^4 \approx 0{,}018$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Två stjärnor med samma effekt

Två stjärnor strålar som svartkroppar och sänder ut samma totala effekt. Stjärna A har sin spektrala topp vid 400 nm och stjärna B vid 800 nm. Hur många gånger större är B:s radie än A:s?

Lösning

Temperaturerna. Wiens förskjutningslag ger

$$T_A = \frac{2{,}90 \cdot 10^{-3}}{400 \cdot 10^{-9}} = 7250\ \text{K} \qquad T_B = \frac{2{,}90 \cdot 10^{-3}}{800 \cdot 10^{-9}} = 3625\ \text{K}$$

Fysika: Fd4 (Wiens förskjutningslag)

Lika effekt. Med $P = \sigma \cdot 4\pi R^2 \cdot T^4$ för båda:

$$R_A^2 T_A^4 = R_B^2 T_B^4$$

$$\frac{R_B}{R_A} = \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = 2^2 = \boxed{4}$$

Den kallare, röda stjärnan måste vara fyra gånger större för att stråla lika mycket.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.5 Continuous Spectra

Wiens förskjutningslag

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #samband

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Svartkroppsstrålning

Våglängden där spektralemittansen är som störst är omvänt proportionell mot temperaturen: en varmare kropp lyser blåare. Lagen fås genom att derivera Plancks strålningslag och söka maximum.

$$\boxed{\lambda_{\max} T = 2{,}90 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}$$

Fysika: Fd4 (Wiens förskjutningslag, som $\lambda_m T = b$ med $b = 2{,}8978 \cdot 10^{-3}$ m·K)

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\lambda_{\max}}_{\substack{\text{toppens}\\ \text{våglängd}}} \underbrace{T}_{\substack{\text{absolut}\\ \text{temperatur}}} = \underbrace{b}_{\substack{\text{Wiens konstant}\\ 2{,}90\cdot10^{-3}\ \text{m·K}}}$$

$$\underbrace{\frac{hc}{\lambda_{\max}}}_{\substack{\text{fotonenergin}\\ \text{vid toppen}}} = 4{,}965\ \underbrace{k_B T}_{\substack{\text{termisk}\\ \text{energi}}}$$

Toppen ligger där fotonerna har ungefär fem gånger den termiska energin $k_B T$. Dubblas temperaturen dubblas den typiska fotonenergin, och våglängden halveras.

---

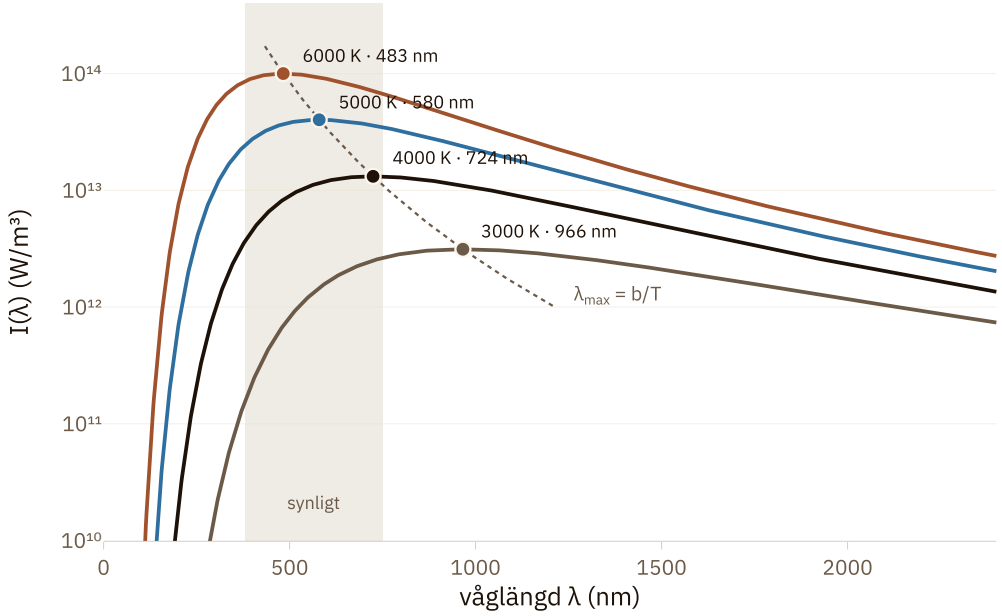
1. Vad lagen säger

$\lambda_{\max}$ är omvänt proportionell mot T. Dubblas temperaturen halveras alltså våglängden för toppen. Några typiska värden:

Kropp	T	$\lambda_{\max}$	Område
Människokropp	310 K	9,35 µm	infrarött

Kropp	T	$\lambda_{\max}$	Område
Glödande järn	1000 K	2,90 µm	infrarött
Glödtråd	2800 K	1,04 µm	nära infrarött
Het stjärna	6000 K	483 nm	synligt
Mycket het stjärna	10 000 K	290 nm	ultraviolett

Kurvorna för olika temperaturer korsar aldrig varandra, så en varmare kropp strålar mer vid *varje* våglängd. När kroppen värms upp går färgen från mörkröd över gul och vit mot blåvit. Lagen gör det också möjligt att mäta temperaturen på avstånd, eftersom det räcker att veta var i spektrumet toppen ligger. Det gäller till exempel för stjärnor och för smält metall.



Plancks kurvor för 3000–6000 K med logaritmisk intensitetsaxel: toppen (punkterna) flyttas mot kortare våglängd längs den streckade kurvan $\lambda_{\max} = b/T$, från nära infrarött in i det synliga, och en varmare kurva ligger över en kallare vid varje våglängd.

---

2. Härledning ur Plancks lag

Toppen ligger där derivatan av Plancks spektralemittans är noll. Konstanten i lagen visar sig då bestå av naturkonstanter.

Härledning av Wiens förskjutningslag

Förenkla. Skriv $I(\lambda) = a\,\lambda^{-5}\,(e^{b/\lambda} - 1)^{-1}$ med $a = 2\pi hc^2$ och $b = hc/(k_B T)$.

Derivera. Med produkt- och kedjeregeln:

$$\frac{dI}{d\lambda} = a\left[-5\lambda^{-6}\left(e^{b/\lambda}-1\right)^{-1} + \lambda^{-5}\left(e^{b/\lambda}-1\right)^{-2} e^{b/\lambda}\frac{b}{\lambda^2}\right]$$

Sätt lika med noll och multiplicera med $\lambda^6\left(e^{b/\lambda}-1\right)^2/a$:

$$-5\left(e^{b/\lambda}-1\right) + \frac{b}{\lambda}e^{b/\lambda} = 0$$

Dimensionslös form. Med $x = b/\lambda = hc/(\lambda k_B T)$ blir det

$$xe^x = 5\left(e^x - 1\right)$$

$$5 - x = 5e^{-x}$$

Lös numeriskt. Iterera $x_{k+1} = 5\left(1 - e^{-x_k}\right)$ från $x_0 = 5$. Det ger $4{,}966$ och sedan $4{,}965$, så $x = 4{,}965$.

Toppen ligger alltså vid $hc/(\lambda_{\max} k_B T) = 4{,}965$:

$$\boxed{\lambda_{\max} = \frac{hc}{4{,}965\, k_B T}}$$

$$\frac{hc}{4{,}965\, k_B} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}}{4{,}965 \cdot 1{,}381 \cdot 10^{-23}} = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}$$

Fysika: Te (h, c, k)

Det stämmer med det uppmätta värdet i rutan överst.

⚠ Vanliga fel

- **Temperaturen anges i Celsius.** Lagen gäller för absolut temperatur.
- **Fel enhet på svaret.** Konstanten är i m·K, så $\lambda_{\max}$ kommer ut i meter. Räkna om till µm eller nm först i sista steget.
- **$c/\lambda_{\max}$ tas för frekvensen där strålningen är störst.** Ritar man spektrumet per frekvensintervall hamnar toppen i stället vid $hf = 2{,}821\, k_B T$, alltså inte vid $c/\lambda_{\max}$. Frågas det om $\lambda_{\max}$ är det lagen ovan som gäller.
- **Kroppen tros bara stråla vid $\lambda_{\max}$.** Spektrumet är brett. $\lambda_{\max}$ är bara läget för toppen.

3. Lösta exempel

Exempel — Värmekamera och glödlampa

Huden har temperaturen $34{,}0\ ^\circ\text{C}$ och en glödtråd 2700 K. Behandla båda som svartkroppar, beräkna $\lambda_{\max}$ och avgör i vilken del av spektrumet toppen ligger.

Lösning

Huden. $T = 34{,}0 + 273{,}15 = 307{,}15$ K:

$$\lambda_{\max} = \frac{2{,}90 \cdot 10^{-3}}{307{,}15} = 9{,}44 \cdot 10^{-6}\ \text{m} = \boxed{9{,}44\ \mu\text{m}}$$

Det är långvågigt infrarött, och därför är värmekameror byggda för våglängder runt 10 µm.

Glödtråden.

$$\lambda_{\max} = \frac{2{,}90 \cdot 10^{-3}}{2700} = 1{,}07 \cdot 10^{-6}\ \text{m} = \boxed{1{,}07\ \mu\text{m}}$$

Toppen ligger i det nära infraröda, strax utanför det synliga. Det mesta av glödlampans effekt blir därför värme och inte ljus.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Kosmisk bakgrundsstrålning

Universum är fyllt av svartkroppsstrålning med temperaturen $2{,}725$ K. Bestäm $\lambda_{\max}$ och fotonenergin vid den våglängden.

Lösning

Toppens läge.

$$\lambda_{\max} = \frac{2{,}90 \cdot 10^{-3}}{2{,}725} = 1{,}06 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = \boxed{1{,}06\ \text{mm}}$$

Det ligger i mikrovågsområdet.

Fotonenergin. Med $hc = 1240$ eV·nm och $\lambda = 1{,}06 \cdot 10^{6}$ nm:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{1{,}06 \cdot 10^{6}\ \text{nm}} \approx \boxed{1{,}17 \cdot 10^{-3}\ \text{eV}}$$

Det är ungefär tusen gånger mindre än energin hos en foton av synligt ljus.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.5 Continuous Spectra

Plancks strålningslag

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #samband

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Svartkroppsstrålning, Fotonen

---

Klassisk fysik kunde varken förklara varför det finns ett $\lambda_{\max}$ eller kurvornas form. Planck löste det år 1900 genom att anta att energin utbyts i kvanta hf — *an act of desperation*, som han själv kallade det, och första gången Plancks konstant dyker upp. Einstein använde samma hypotes fem år senare för att förklara fotoelektriska effekten. Derivering av lagen ger Wiens förskjutningslag, integration ger Stefan-Boltzmanns lag.

$$\boxed{I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\,(e^{hc/\lambda kT} - 1)}}$$

Fysika: Fd4 (Plancks strålningslag, i formen $I(\lambda, T) = c_1/(\lambda^5(e^{c_2/\lambda T} - 1))$)

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{I(\lambda)}_{\substack{\text{spektral-}\\\text{emittans}}} = \underbrace{\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}}_{\substack{\text{växer mot}\\\text{korta } \lambda}} \cdot \underbrace{\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}}_{\substack{\text{kvantspärren: dör}\\\text{ut vid korta } \lambda}}$$

$$\frac{hc}{\lambda kT} = \frac{\overbrace{hf}^{\text{ett kvantum}}}{\underbrace{kT}_{\substack{\text{termisk}\\\text{energi}}}}$$

Den första faktorn växer utan gräns mot korta våglängder, precis som den klassiska förutsägelsen. Den andra är Plancks bidrag: när ett kvantum hf är mycket större än kT blir den exponentiellt liten, och den ultravioletta katastrofen uteblir.

---

1. Kvanthypotesen

Rayleigh lät varje svängningsmod i hålrummet ha medelenergin $k_B T$, oberoende av frekvensen, och fick den ultravioletta katastrofen (se Svartkroppsstrålning). Planck antog i stället att svängarna i väggarna bara kan ha energierna

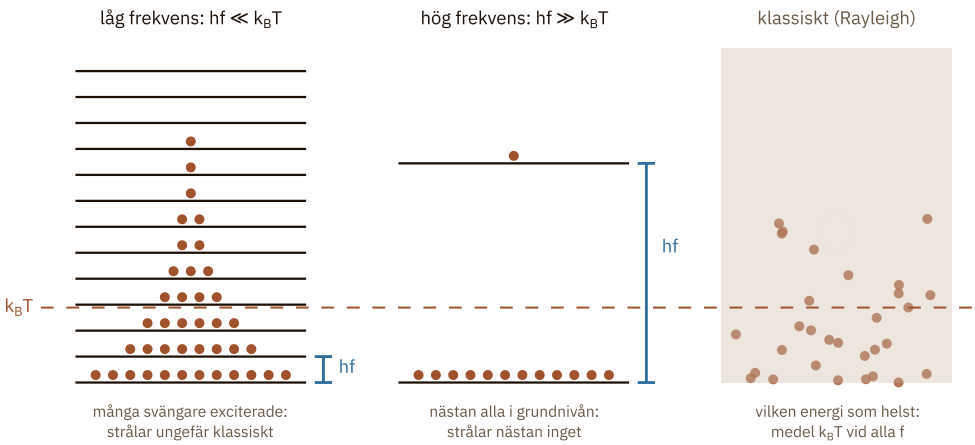
$$E_n = nhf \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Nivåerna ligger på avståndet hf från varandra, och energi kan bara tas upp och avges i hela kvanta hf. I jämvikt vid temperaturen T är andelen svängare i första exciterade nivån jämfört med grundnivån Boltzmannfaktorn

$$\frac{n_1}{n_0} = e^{-hf/k_B T}$$

- **Låg frekvens, $hf \ll k_B T$:** många svängare är exciterade, och strålningen blir ungefär som Rayleigh förutsade.
- **Hög frekvens, $hf \gg k_B T$:** nästan alla svängare ligger i grundnivån och kan inte stråla. Därför dör spektrumet ut vid korta våglängder.

Gränsen går där $hf \approx k_B T$, alltså vid $\lambda \approx hc/(k_B T)$. Vid 3000 K är det ungefär $4{,}8$ µm.



Plancks svängare som energitrappor med stegen hf, där varje prick är en svängare i jämvikt. Vid låg frekvens är stegen små mot $k_B T$ och många svängare är exciterade; vid hög frekvens är redan första steget för högt och nästan alla ligger kvar i grundnivån. Klassiskt finns inga steg, och varje mod får medelenergin $k_B T$ oavsett frekvens.

---

2. Gränsfallen

Det är lättast att se hur lagen beter sig med den dimensionslösa exponenten

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$$

Långa våglängder, $x \ll 1$**.** Då är $e^x \approx 1 + x$, så

$$e^x - 1 \approx \frac{hc}{\lambda k_B T}$$

$$I(\lambda) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{\lambda k_B T}{hc} = \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4}$$

Det är Rayleighs uttryck. h har försvunnit, vilket betyder att kvanteffekterna inte spelar någon roll när fotonenergin är liten jämfört med $k_B T$.

Korta våglängder, $x \gg 1$**.** Då är $e^x - 1 \approx e^x$, så

$$I(\lambda) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda k_B T}$$

Exponentialfaktorn trycker ner kurvan mot noll mycket snabbare än λ^{-5} växer, och den ultravioletta katastrofen försvinner. Figuren i Svartkroppsstrålning visar båda gränsfallen.

---

3. Följder av lagen

- **Derivering** ger toppens läge $\lambda_{\max} = hc/(4{,}965\, k_B T)$, alltså Wiens förskjutningslag.
- **Integration** över alla våglängder ger $I = \sigma T^4$ med $\sigma = 2\pi^5 k_B^4/(15 c^2 h^3)$, alltså Stefan-Boltzmanns lag.
- **Samma form vid alla temperaturer.** $I(\lambda)$ beror på λ och T bara genom kombinationen λT, bortsett från en skalfaktor. Därför kan kurvorna läggas på varandra om axlarna skalas om.

---

4. Att räkna med lagen

Räkna först ut exponenten x och sedan resten. Konstanterna

$$2\pi hc^2 = 3{,}742 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{W \cdot m^2} \qquad \frac{hc}{k_B} = 1{,}439 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m \cdot K}$$

Fysika: Te ($c_1 = 2\pi hc^2$, $c_2 = hc/k$)

sparar mycket räknande. Intensiteten i ett smalt intervall är $I(\lambda)\,\Delta\lambda$. Kvoten mellan två våglängder vid samma temperatur blir

$$\frac{I(\lambda_1)}{I(\lambda_2)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 \frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_1} - 1}$$

där konstanterna framför har tagit ut varandra.

⚠ Vanliga fel

- **Blandade enheter i exponenten.** λ ska vara i meter om h, c och k_B är i SI. Med λ i nm blir exponenten fel med en faktor 10^9.
- $I(\lambda)$ **tolkas som en intensitet.** $I(\lambda)$ har enheten $\mathrm{W/m^3}$. Multiplicera med $\Delta\lambda$ i meter för att få $\mathrm{W/m^2}$.
- k **blandas ihop med vågtalet.** I lagen är $k = k_B$ Boltzmanns konstant.
- **Ettan i nämnaren stryks alltid.** Approximationen $e^x - 1 \approx e^x$ gäller bara när $x \gg 1$. Vid långa våglängder ger den helt fel svar.

5. Lösta exempel

Exempel — Spektrumet från en glödtråd

En glödtråd strålar som en svartkropp vid 2800 K. a) Beräkna spektralemittansen vid 500 nm och vid $1{,}00$ µm. b) Beräkna ungefär den intensitet som strålas ut mellan 995 och 1005 nm, och jämför med den totala intensiteten.

Lösning

Exponenterna.

$$x_{500} = \frac{1{,}439 \cdot 10^{-2}}{500 \cdot 10^{-9} \cdot 2800} = 10{,}28 \qquad x_{1000} = \frac{1{,}439 \cdot 10^{-2}}{1{,}00 \cdot 10^{-6} \cdot 2800} = 5{,}138$$

a) Vid 500 nm:

$$I = \frac{3{,}742 \cdot 10^{-16}}{(500 \cdot 10^{-9})^5 \, (e^{10{,}28} - 1)} = \frac{3{,}742 \cdot 10^{-16}}{3{,}125 \cdot 10^{-32} \cdot 2{,}905 \cdot 10^{4}} \approx \boxed{4{,}12 \cdot 10^{11}\ \mathrm{W/m^3}}$$

Vid $1{,}00$ µm:

$$I = \frac{3{,}742 \cdot 10^{-16}}{(1{,}00 \cdot 10^{-6})^5 \, (e^{5{,}138} - 1)} = \frac{3{,}742 \cdot 10^{-16}}{1{,}00 \cdot 10^{-30} \cdot 169{,}5} \approx \boxed{2{,}21 \cdot 10^{12}\ \mathrm{W/m^3}}$$

Spektralemittansen är drygt fem gånger större i det nära infraröda än i det gröna.

b) Intervallet är smalt, $\Delta\lambda = 10{,}0$ nm, så

$$\Delta I \approx I(\lambda)\,\Delta\lambda = 2{,}21 \cdot 10^{12} \cdot 10{,}0 \cdot 10^{-9} \approx \boxed{2{,}21 \cdot 10^{4}\ \mathrm{W/m^2}}$$

Den totala intensiteten är

$$I = \sigma T^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 2800^4 = 3{,}49 \cdot 10^{6}\ \mathrm{W/m^2}$$

Fysika: Fd4 (Stefan-Boltzmanns lag), Te (σ) så andelen är $2{,}21 \cdot 10^4 / 3{,}49 \cdot 10^6 \approx \boxed{0{,}63\,\%}$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Lika stark vid två våglängder

Vid vilken temperatur har en svartkropp samma spektralemittans vid 500 nm som vid 1000 nm?

Lösning

Sätt upp villkoret. Låt $a = hc/(\lambda_2 k_B T)$ med $\lambda_2 = 1000$ nm. Eftersom $\lambda_1 = \lambda_2/2$ är exponenten vid λ_1 lika med $2a$. Villkoret $I(\lambda_1) = I(\lambda_2)$ blir

$$\frac{1}{\lambda_1^5\,(e^{2a}-1)} = \frac{1}{\lambda_2^5\,(e^{a}-1)}$$

$$e^{2a} - 1 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 (e^a - 1) = 32\,(e^a - 1)$$

Faktorisera. $e^{2a} - 1 = (e^a - 1)(e^a + 1)$, och $e^a - 1 \neq 0$, så

$$e^a + 1 = 32 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \ln 31 = 3{,}434$$

Temperaturen.

$$T = \frac{hc}{\lambda_2 k_B a} = \frac{1{,}439 \cdot 10^{-2}}{1{,}00 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}434} \approx \boxed{4190\ \mathrm{K}}$$

Rimlighetskoll. Wiens lag ger $\lambda_{\max} = 2{,}90 \cdot 10^{-3}/4190 = 692$ nm, alltså mellan de två våglängderna, som sig bör.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.5 Continuous Spectra

Schrödingerekvationen

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #samband

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** De Broglie-våglängd, Differentialekvationer

---

Newtons lagar fungerar inte för små partiklar med vågkaraktär, så vi behöver en ekvation som beskriver vågen i stället. Den tidsoberoende Schrödingerekvationen gör det för tillstånd vars egenskaper inte ändras med tiden — stationära tillstånd — och skrivs kompakt som egenvärdesekvationen $\hat{H}\psi = E\psi$. Arbetsgången är alltid densamma: formulera ekvationen med rätt potential U, konstruera en lämplig ψ, bestäm ψ och E ur randvillkoren, normera.

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\,\psi(x) = E\,\psi(x)}$$

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}}_{\substack{\text{rörelseenergi}\\(\text{krökningen})}} + \underbrace{U(x)\,\psi}_{\substack{\text{potentiell}\\\text{energi}}} = \underbrace{E\,\psi}_{\substack{\text{total}\\\text{energi}}}$$

$$\underbrace{\hat{H}}_{\substack{\text{Hamilton-}\\\text{operatorn}}}\psi = \underbrace{E}_{\text{egenvärdet}}\psi$$

Ekvationen är energins bevarande, $K + U = E$, skriven för en våg: rörelseenergin sitter i hur mycket ψ kröker sig. Stor $E - U$ ger snabb svängning och kort våglängd, och där $E < U$ kröker sig ψ bort från axeln i stället för att svänga.

---

1. Varför en ny vågekvation?

För en våg på en sträng gäller $\omega = vk$: vinkelfrekvensen är proportionell mot vågtalet. För en fri partikel med $U = 0$ ger de Broglies samband $E = \hbar\omega$ och $p = \hbar k$ (se De Broglie-våglängd) tillsammans med $E = p^2/2m$ något annat:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Här är ω proportionell mot k^2. Den vanliga vågekvationen, med andraderivator i både x och t, kan inte ge det sambandet. Materievågens ekvation behöver en andraderivata i rummet men bara en förstaderivata i tiden.

---

2. Den tidsberoende Schrödingerekvationen

Den allmänna endimensionella ekvationen för en partikel med massan m i potentialen $U(x)$ är

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\,\Psi(x,t) = i\hbar\,\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}}$$

Ekvationen kan inte härledas ur något mer grundläggande. Den motiveras av att den ger rätt samband för en fri partikel, och den accepteras för att dess förutsägelser stämmer med experimenten.

Motivering: varför i måste finnas med

Ansats. Pröva en sinusvåg för en fri partikel, $\Psi = A\cos(kx-\omega t) + B\sin(kx-\omega t)$, i en ekvation av formen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = C\hbar\,\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

med en okänd konstant C.

Vänsterledet. Två derivator i x ger faktorn $-k^2$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\left[A\cos(kx-\omega t) + B\sin(kx-\omega t)\right]$$

Högerledet. En derivata i t:

$$C\hbar\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} = C\hbar\omega\left[A\sin(kx-\omega t) - B\cos(kx-\omega t)\right]$$

Jämför. Med $\hbar\omega = \hbar^2k^2/2m$ tar faktorerna framför ut varandra, och koefficienterna framför cosinus respektive sinus måste vara lika:

$$A = -CB \qquad B = CA$$

$$A = -C^2 A \qquad \Longrightarrow \qquad C^2 = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad C = i$$

Lösningen. $B = iA$ ger, med Eulers formel,

$$\Psi(x,t) = A\left[\cos(kx - \omega t) + i\sin(kx - \omega t)\right] = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

Med potential. För denna våg är $-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi = K\Psi$ och $i\hbar\,\partial_t\Psi = E\Psi$. Lägger vi till termen $U\Psi$ säger ekvationen alltså $K + U = E$, gånger Ψ.

Eftersom i står i ekvationen är lösningarna i allmänhet komplexa (se Komplexa tal). Det är bara $|\Psi|^2$ som går att mäta, se Vågfunktion.

---

3. Stationära tillstånd

Ett tillstånd med bestämd energi E kan skrivas som en rumsdel gånger en ren tidsfas:

$$\boxed{\Psi(x,t) = \psi(x)\,e^{-iEt/\hbar}}$$

Sätter vi in det i den tidsberoende ekvationen ger tidsderivatan faktorn $-iE/\hbar$:

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\psi(x)e^{-iEt/\hbar}\right] = i\hbar\left(-\frac{iE}{\hbar}\right)\psi(x)e^{-iEt/\hbar} = E\,\psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

Faktorn $e^{-iEt/\hbar}$ finns i alla termer och kan förkortas bort. Kvar blir den tidsoberoende ekvationen i rutan överst. Sannolikhetstätheten beror inte på tiden, eftersom

$$|\Psi|^2 = \psi^* e^{+iEt/\hbar}\,\psi\,e^{-iEt/\hbar} = |\psi|^2$$

Det är därför tillståndet kallas *stationärt*. Det är fördelningen som står still, inte partikeln.

---

4. Lösningarnas form

Skriver vi den tidsoberoende ekvationen som

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m\,(E-U)}{\hbar^2}\,\psi$$

ser vi direkt hur lösningen beter sig i ett område där U är konstant:

Område	Lösning	Konstant
$E > U$, klassiskt tillåtet	$\psi = A\sin kx + B\cos kx$, svänger	$k = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$
$E < U$, klassiskt förbjudet	$\psi = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}$, växer eller avtar	$\kappa = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}$

Det förbjudna området behandlas i Partikel i potentialbrunn och Kvantmekanisk tunnling. För en fri partikel är $\psi = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}$ med $E = \hbar^2 k^2/2m$. Det är två vågor som går åt var sitt håll, och med lika stora amplituder blir de tillsammans en stående våg.

Lösningarna måste också uppfylla några krav:

- ψ är kontinuerlig överallt.
- $d\psi/dx$ är kontinuerlig överallt där U är ändlig.
- $\psi = 0$ där $U = \infty$.
- ψ går att normera, alltså $\psi \to 0$ när $x \to \pm\infty$.

Kraven väljer ut vilka energier som är tillåtna. Ekvationen är dessutom linjär, så en summa av lösningar är också en lösning.

⚠ **Vanliga fel**

- **ψ tolkas som en förskjutning eller en bana.** Vågfunktionen svänger inte i rummet som en sträng. Bara $|\psi|^2$ har en fysikalisk tolkning.
- **Fel tecken på $E - U$.** Där $E < U$ blir lösningen exponentiell, inte en sinus. Kontrollera alltid tecknet innan du väljer ansats.
- **“Stationärt” tolkas som “i vila”.** Ett stationärt tillstånd har bestämd energi och en tidsoberoende $|\Psi|^2$. Partikeln har ändå rörelseenergi.
- **h och $\hbar$ blandas.** $E = \hbar^2 k^2/2m$ med $k = 2\pi/\lambda$ ger $E = h^2/(2m\lambda^2)$. Skriver man h i stället för $\hbar$ blir svaret fel med en faktor $4\pi^2$.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Fri elektron som stående våg

Visa att $\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$ löser den tidsoberoende Schrödingerekvationen med $U = 0$, och bestäm energin. Beräkna energin i eV för en elektron med våglängden $0{,}400$ nm.

Lösning

Derivera två gånger.

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2 A\sin kx - k^2 B\cos kx = -k^2\psi$$

Sätt in. Med $U = 0$ blir vänsterledet

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-k^2\psi) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi$$

Det är en konstant gånger ψ, så funktionen är en lösning med

$$\boxed{E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}}$$

Siffror.

$$E = \frac{(6{,}626\cdot 10^{-34})^2}{2\cdot 9{,}109\cdot 10^{-31}\cdot (0{,}400\cdot 10^{-9})^2} = 1{,}51\cdot 10^{-18}\ \text{J} \approx \boxed{9{,}40\ \text{eV}}$$

Fysika: Te (h, m_e)

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Elektron i ett klassiskt förbjudet område

En elektron med energin $2{,}00$ eV kommer in i ett område där $U = 5{,}00$ eV. a) Visa att $\psi(x) = De^{-\kappa x}$ löser den tidsoberoende Schrödingerekvationen där, och bestäm κ. b) Hur långt in i området har $|\psi|^2$ sjunkit till $1{,}00\,\%$ av värdet vid gränsen?

Lösning

a) Två derivator ger $\psi'' = \kappa^2\psi$. Insatt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\kappa^2\psi + U\psi = E\psi$$

$$\kappa^2 = \frac{2m\,(U-E)}{\hbar^2}$$

Med $U - E = 3{,}00\ \text{eV} = 4{,}806 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$:

$$\kappa = \frac{\sqrt{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 4{,}806 \cdot 10^{-19}}}{1{,}055 \cdot 10^{-34}} \approx \boxed{8{,}87 \cdot 10^{9}\ \text{m}^{-1}}$$

b) $|\psi|^2 \propto e^{-2\kappa x}$, så

$$e^{-2\kappa x} = 0{,}0100$$

$$x = \frac{\ln 100}{2\kappa} = \frac{4{,}605}{2 \cdot 8{,}874 \cdot 10^{9}} \approx \boxed{0{,}259\ \text{nm}}$$

Partikeln tränger alltså in ungefär en atomdiameter i ett område som den klassiskt aldrig kan nå.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 40.1 Wave Functions and the One-Dimensional Schrödinger Equation

Vågfunktion

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Schrödingerekvationen

Vågfunktionen $\psi(x)$ beskriver partikelns fördelning i rummet, men är inte själv mätbar. Max Born gav år 1926 tolkningen att $|\psi(x)|^2\,dx$ är sannolikheten att hitta partikeln nära x. Eftersom partikeln måste finnas någonstans ger det ett randvillkor utöver de rumsliga: integralen över hela området ska vara ett, vilket är det som bestämmer amplitudkonstanten. ψ måste dessutom vara kontinuerlig och ändlig överallt.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx = 1}$$

Formeln, symbol för symbol

$$\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}^{\text{summera överallt}} \underbrace{|\psi(x)|^2\,dx}_{\text{sannolikheten att hitta den nära } x} = \underbrace{1}_{\text{partikeln finns någonstans}}$$

$$\underbrace{|\psi|^2}_{\text{sannolikhets-täthet, 1/m}} = \underbrace{\psi^*\psi}_{\text{alltid reell och } \geq 0}$$

Vågfunktionen själv mäts aldrig; det är $|\psi|^2$ som säger var partikeln brukar hittas. Upprepar man en lägesmätning många gånger hamnar resultaten tätt där $|\psi|^2$ är stor, och sannolikheterna över hela axeln måste summera till ett.

---

1. Komplex vågfunktion och sannolikhetstäthet

Lösningarna till Schrödingerekvationen är i allmänhet komplexa, så ψ själv kan inte vara en mätbar storhet. Det som har en fysikalisk tolkning är absolutbeloppet i kvadrat,

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

som alltid är reellt och aldrig negativt. $|\psi(x)|^2$ kallas **sannolikhetstäthet**. I en dimension har den enheten m^{-1}, och det är först produkten $|\psi|^2\,dx$ som är en sannolikhet.

För en fri partikel med bestämd rörelsemängd, $\Psi = Ae^{i(kx-\omega t)}$, blir

$$|\Psi|^2 = A^* e^{-i(kx-\omega t)}\, Ae^{i(kx-\omega t)} = |A|^2$$

Tätheten är densamma överallt, så partikeln kan finnas var som helst. Det stämmer med Heisenbergs osäkerhetsprincip: $\Delta p_x = 0$ kräver $\Delta x = \infty$. En sådan våg kan inte normeras. En lokaliserad partikel beskrivs i stället av ett **vågpaket**, en överlagring av många vågor med olika k. Ju fler k-värden som ingår, desto smalare blir paketet.

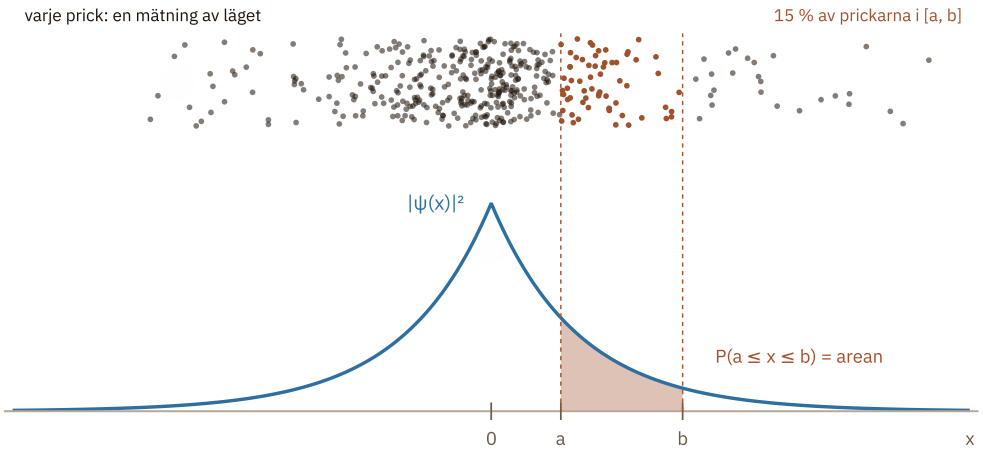
---

2. Sannolikhet i ett intervall

Sannolikheten att hitta partikeln mellan a och b är arean under $|\psi|^2$ över intervallet:

$$\boxed{P(a \le x \le b) = \int_a^b |\psi(x)|^2\,dx}$$

Normeringsvillkoret i rutan överst är specialfallet där intervallet är hela x-axeln, och sannolikheten då är 1.



Borns tolkning i bild. Överst: många lägesmätningar på identiskt preparerade partiklar, en prick per mätning. Nederst: $|\psi|^2$ för $\psi \propto e^{-|x|}$. Prickarna ligger tätt där $|\psi|^2$ är stor, och andelen prickar mellan a och b närmar sig den skuggade arean.

---

3. Normering

Ofta är vågfunktionens form känd men inte konstanten framför, till exempel $\psi = C\sin(n\pi x/L)$ i Partikel i låda. Konstanten bestäms i tre steg:

1. Skriv $|\psi|^2$ med konstanten okänd.
2. Integrera över hela området där $\psi \neq 0$.
3. Sätt integralen lika med 1 och lös ut konstanten.

För ett stationärt tillstånd är $|\Psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2$, så en normerad vågfunktion förblir normerad vid alla tider. Konstanten kan väljas reell och positiv. En gemensam fasfaktor $e^{i\alpha}$ ändrar inte $|\psi|^2$ och har ingen fysikalisk betydelse.

---

4. Krav på en godtagbar vågfunktion

- **Normerbar:** $\int |\psi|^2\,dx$ är ändlig, alltså $\psi \to 0$ när $x \to \pm\infty$.
- **Kontinuerlig:** annars vore andraderivatan i Schrödingerekvationen oändlig.
- **Kontinuerlig derivata** överallt där potentialen är ändlig.
- **Noll där $U = \infty$:** partikeln kan inte finnas där.

Funktioner som löser ekvationen men bryter mot något krav stryks. Det är så de tillåtna energierna väljs ut.

> ⚠ **Vanliga fel**
>
> - $|\psi|^2$ **tas för en sannolikhet.** Det är en täthet med enheten m^{-1}, och den kan vara större än 1. Sannolikheten fås först efter integration över ett intervall.
> - ψ^2 **i stället för** $|\psi|^2$**.** För en komplex vågfunktion är $|\psi|^2 = \psi^*\psi$. Kvadraten ψ^2 är i allmänhet komplex och saknar tolkning.
> - **Man integrerar** ψ **i stället för** $|\psi|^2$**.** Både normering och sannolikhet bygger på kvadraten.
> - **Fel integrationsområde.** Är $\psi = 0$ utanför ett område räcker det att integrera över området. Är ψ symmetrisk kan man integrera över halva och multiplicera med två.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Normering av en exponentiell vågfunktion

En partikel beskrivs av $\psi(x) = Ae^{-|x|/a}$, där $a > 0$. Normera vågfunktionen och beräkna sannolikheten att partikeln finns i intervallet $-a \le x \le a$.

Lösning

Normering. Funktionen är jämn, så vi integrerar över $x \ge 0$ och multiplicerar med två:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-2|x|/a}\,dx = 2A^2 \int_0^{\infty} e^{-2x/a}\,dx = 2A^2 \cdot \frac{a}{2} = A^2 a$$

$$A^2 a = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{a}}}$$

Sannolikheten.

$$P = 2\int_0^{a} \frac{1}{a} e^{-2x/a}\,dx = 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{2}\left[1 - e^{-2}\right] = 1 - e^{-2} \approx \boxed{0{,}865}$$

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Parabel som vågfunktion i en låda

I en låda $0 \le x \le L$ approximeras grundtillståndet med $\psi(x) = Ax(L - x)$, och $\psi = 0$ utanför lådan. Normera funktionen och beräkna sannolikheten att partikeln finns i $0 \le x \le L/4$. Jämför med den exakta sinusfunktionen, som ger $1/4 - 1/(2\pi) \approx 0{,}0908$.

Lösning

Normering. Med $u = x/L$ är $x^2(L - x)^2 = L^4 u^2 (1 - u)^2$ och $dx = L\,du$:

$$A^2 L^5 \int_0^{1} u^2 (1 - u)^2\,du = A^2 L^5 \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{2} + \frac{u^5}{5}\right]_0^{1} = \frac{A^2 L^5}{30}$$

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{30}{L^5}}}$$

Sannolikheten. Samma primitiva funktion, nu till $u = 1/4$:

$$P = 30\left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{2} + \frac{u^5}{5}\right]_0^{1/4} = 30\left(\frac{1}{192} - \frac{1}{512} + \frac{1}{5120}\right) = \frac{53}{512} \approx \boxed{0{,}104}$$

Parabeln ger $0{,}104$ mot sinusfunktionens $0{,}0908$. Den lägger lite för mycket sannolikhet nära väggarna men fångar huvuddragen: partikeln finns oftast i mitten.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 40.1 Wave Functions and the One-Dimensional Schrödinger Equation

Partikel i låda

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #modell

Kurs: F0005T **Förkunskaper:** Schrödingerekvationen, Vågfunktion, Stående våg

---

Den enklaste bundna kvantmekaniska modellen: en partikel instängd mellan 0 och L med $U = 0$ inuti och oändligt utanför, användbar som modell för en elektron i en linjär molekyl eller i en tunn metalltråd. Randvillkoren $\psi(0) = \psi(L) = 0$ tvingar lösningen att bli en sinus med ett helt antal halva våglängder i lådan — precis som en stående våg på en sträng — och ur det följer kvantiserade energinivåer. Nivån $n = 1$ har inte energin noll trots att $U = 0$ i lådan, och antalet bukar i ψ ger kvanttalet n direkt.

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

Fysika: Fd3 (fri partikel i endimensionell låda, med a för lådans storlek)

Formeln, symbol för symbol

$$\psi_n(x) = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{L}}}_{\text{normering}} \sin \underbrace{\frac{n\pi x}{L}}_{\substack{n \text{ halva våg-} \\ \text{längder i lådan}}}$$

$$E_n = \underbrace{n^2}_{\substack{\text{kvanttalet} \\ \text{i kvadrat}}} \cdot \underbrace{\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}}_{E_1\text{, grundnivån}}$$

Randvillkoren låter bara ett helt antal halva våglängder få plats, så $\lambda_n = 2L/n$. Kortare våglängd betyder större rörelsemängd, och eftersom all energi är kinetisk växer den som n^2 — och blir större ju trängre lådan är.

---

1. Potentialen och randvillkoren

Potentialen är

$$U(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

Där $U = \infty$ måste $\psi = 0$, annars blir termen $U\psi$ i Schrödingerekvationen oändlig. Eftersom ψ ska vara kontinuerlig ger det randvillkoren

$$\psi(0) = 0 \qquad \psi(L) = 0$$

Klassiskt studsar partikeln fram och tillbaka med konstant fart. Den kan ha vilken energi som helst, även noll, och den är lika sannolik att finnas överallt i lådan.

---

2. Lösningen

Inne i lådan är $U = 0$, så ekvationen är densamma som för en fri partikel. Randvillkoren väljer ut vilka lösningar som är tillåtna.

Härledning av vågfunktioner och energinivåer

Ekvationen i lådan.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

Allmän lösning. Två motriktade vågor med $E = \hbar^2 k^2/2m$. Med Eulers formel:

$$\psi(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx} = (A_1 + A_2)\cos kx + i\,(A_1 - A_2)\sin kx$$

Vänster vägg. $\psi(0) = A_1 + A_2 = 0$ ger $A_2 = -A_1$. Då försvinner cosinustermen:

$$\psi(x) = 2iA_1 \sin kx = C \sin kx$$

Höger vägg. $\psi(L) = C \sin kL = 0$ med $C \neq 0$ kräver

$$kL = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$n = 0$ ger $\psi \equiv 0$, alltså ingen partikel, och negativa n ger samma tillstånd med omvänt tecken.

Våglängd och rörelsemängd.

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n} \qquad p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2L}$$

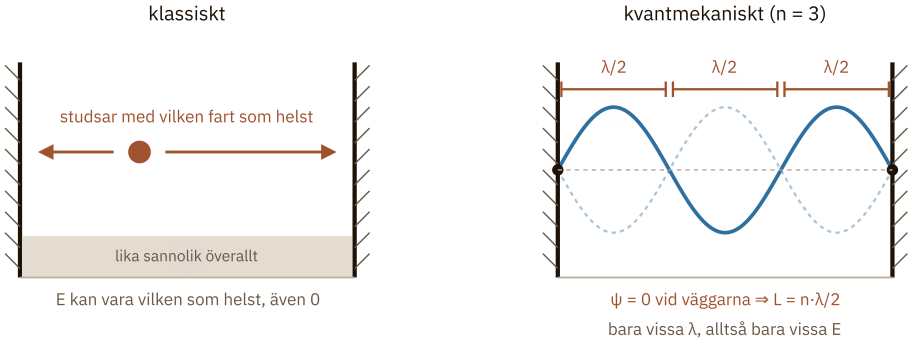
Fysika: Fd3 (de Broglie-våglängden)

Energin. All energi är kinetisk:

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{8mL^2} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Lådan rymmer alltså ett helt antal halva våglängder, precis som en stående våg på en sträng som sitter fast i båda ändar:

$$\boxed{L = n\frac{\lambda_n}{2}}$$



Klassiskt kan partikeln studsa mellan väggarna med vilken fart som helst och är lika sannolik överallt. Kvantmekaniskt måste ψ vara noll vid båda väggarna, så bara ett helt antal halva våglängder ryms — här $n = 3$ — och därmed bara vissa energier.

---

3. Normering

Konstanten C bestäms av normeringsvillkoret i Vågfunktion. Med $\sin^2 u = (1 - \cos 2u)/2$:

$$\int_0^L C^2 \sin^2\frac{n\pi x}{L}\,dx = C^2\left[\frac{x}{2} - \frac{L}{4n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{L}\right]_0^L = C^2\frac{L}{2}$$

$$C^2\frac{L}{2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad C = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

vilket är amplituden i rutan överst. Till skillnad från en sträng, där amplituden beror på hur man satte igång svängningen, är C här helt bestämd.

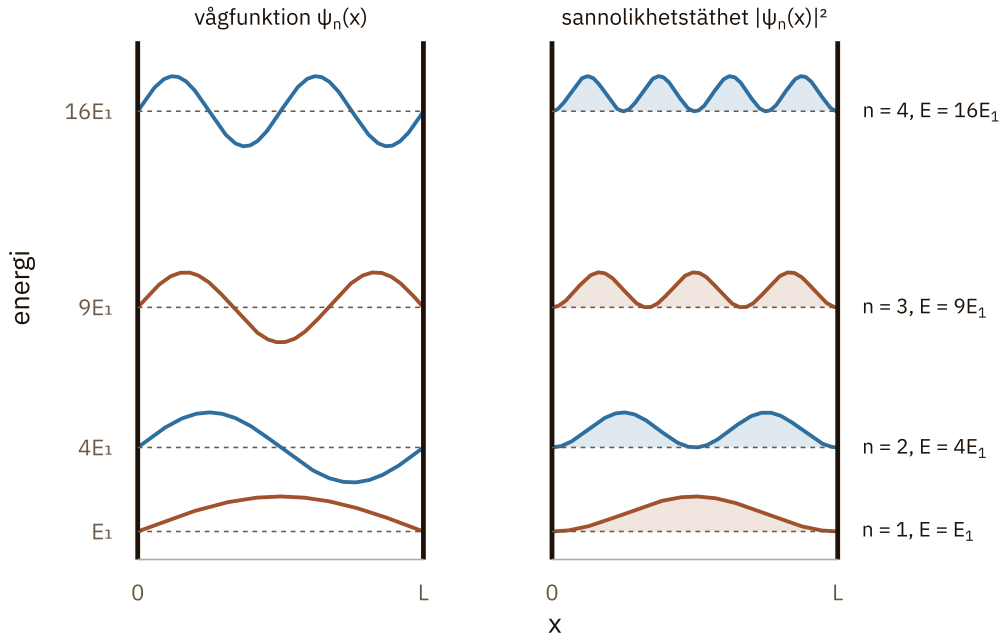
---

4. Energinivåerna

Med grundnivån $E_1 = h^2/(8mL^2)$ är $E_n = n^2 E_1$. Nivåerna glesnar alltså uppåt:

$$E_{n+1} - E_n = (2n+1)\,E_1$$

- **Energin är aldrig noll.** Den lägsta energin är $E_1 > 0$. Partikeln är instängd på sträckan L, så $\Delta x \le L$, och då kan inte rörelsemängden vara exakt noll enligt Heisenbergs osäkerhetsprincip.
- **Mindre låda ger högre energier.** $E_n \propto 1/L^2$. Därför lyser små halvledarkristaller blåare än stora.
- **Tyngre partikel ger tätare nivåer.** $E_n \propto 1/m$. För makroskopiska föremål ligger nivåerna så tätt att kvantiseringen inte märks.
- **Fotoner.** Vid ett hopp från n_i till n_f sänds en foton ut med $hc/\lambda = E_{n_i} - E_{n_f} = (n_i^2 - n_f^2)E_1$.



De fyra lägsta tillstånden, ritade på sina energinivåer. Vänster: ψ_n har n bukar och $n-1$ noder inne i lådan. Höger: sannolikhetstätheten $|\psi_n|^2$ är noll vid väggarna och i noderna.

---

5. Sannolikhetsfördelningen

Sannolikhetstätheten $|\psi_n|^2 = (2/L)\sin^2(n\pi x/L)$ är inte jämn som i det klassiska fallet. I grundtillståndet är partikeln oftast nära mitten. I $n = 2$ är tätheten noll just i mitten. Sannolikheten för ett intervall får vi genom att integrera som i avsnitt 3:

$$\boxed{P(a \le x \le b) = \left[\frac{x}{L} - \frac{1}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{L}\right]_a^b}$$

För stora n svänger tätheten så snabbt att medelvärdet över ett intervall går mot det klassiska $1/L$. Så övergår kvantmekaniken i klassisk mekanik.

Den fullständiga tidsberoende vågfunktionen är $\Psi_n(x,t) = \psi_n(x)\,e^{-iE_n t/\hbar}$. Tidsfaktorn försvinner i $|\Psi_n|^2$, så tillstånden är stationära.

⚠ Vanliga fel

- $n = 0$ **tas med.** Den lägsta nivån är $n = 1$. $n = 0$ ger $\psi \equiv 0$ och ingen partikel alls.
- **Nivåerna tros ligga på jämnt avstånd.** $E_n \propto n^2$, så $E_2 = 4E_1$, inte $2E_1$.
- **Fel antal noder.** ψ_n har n bukar och $n-1$ noder *inne i* lådan, plus noderna vid väggarna.
- h **och** $\hbar$ **blandas.** $E_n = n^2h^2/(8mL^2) = n^2\pi^2\hbar^2/(2mL^2)$. En blandning ger fel med en faktor $4\pi^2$.
- **Energi i joule jämförs med eV.** Räkna om med $1\ \text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J innan fotonvåglängden beräknas med $hc = 1240$ eV·nm.

---

6. Lösta exempel

Exempel — Elektron i en 1,00 nm lång molekyl

En elektron kan röra sig fritt längs en rak molekyl med längden $1{,}00$ nm och modelleras som en partikel i en låda. a) Beräkna de tre lägsta energinivåerna i eV. b) Beräkna våglängden hos fotonen som sänds ut vid övergången $n = 3 \to 1$ och vid $n = 2 \to 1$.

Lösning

a) Grundnivån:

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6{,}626 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}00 \cdot 10^{-9})^2} = 6{,}02 \cdot 10^{-20}\ \text{J} = \boxed{0{,}376\ \text{eV}}$$

Fysika: Te (h, m_e)

$$E_2 = 4E_1 = \boxed{1{,}50\ \text{eV}} \qquad E_3 = 9E_1 = \boxed{3{,}38\ \text{eV}}$$

b) Övergången $3 \to 1$ har $\Delta E = 8E_1 = 3{,}008$ eV:

$$\lambda_{31} = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{3{,}008 \text{ eV}} \approx \boxed{412 \text{ nm}}$$

Övergången $2 \to 1$ har $\Delta E = 3E_1 = 1{,}128$ eV:

$$\lambda_{21} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{1{,}128 \text{ eV}} \approx \boxed{1{,}10 \text{ µm}}$$

Den första ligger i det violetta, den andra i det infraröda.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Mittersta tredjedelen av lådan

En partikel i en låda med bredden L är i tillståndet $n = 1$ respektive $n = 2$. Beräkna i båda fallen sannolikheten att hitta partikeln i den mittersta tredjedelen, $L/3 \le x \le 2L/3$, och jämför med det klassiska värdet.

Lösning

Formeln. Med $P = [x/L - \sin(2n\pi x/L)/(2n\pi)]_{L/3}^{2L/3}$ blir första termen alltid $1/3$.

$n = 1$. $\sin(4\pi/3) = -\sqrt{3}/2$ och $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$:

$$P_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx \boxed{0{,}609}$$

$n = 2$. $\sin(8\pi/3) = \sqrt{3}/2$ och $\sin(4\pi/3) = -\sqrt{3}/2$:

$$P_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx \boxed{0{,}196}$$

Jämförelse. Klassiskt är sannolikheten $1/3 \approx 0{,}333$. Grundtillståndet samlar partikeln i mitten, medan $n = 2$ har en nod där och trycker ut partikeln mot sidorna.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 40.2 Particle in a Box

Partikel i tvådimensionell låda

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Partikel i låda

Utvidgningen till två dimensioner separeras genom ansatsen $\psi = \psi_x \psi_y$, så att randvillkoren i x- och y-led kan behandlas var för sig. Varje riktning ger sitt eget kvanttal ur sitt eget randvillkor, och den totala energin blir summan av bidragen, $E = E_x + E_y$. Med olika sidlängder L_x och L_y ligger nivåerna oregelbundet, så vilket tillstånd som är närmast under ett givet måste avgöras genom att räkna på kandidaterna.

$$\boxed{E_{n_x,n_y} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right)}$$

Fysika: Fd3 (i formen för en endimensionell låda, $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2$; här en sådan term per riktning)

Formeln, symbol för symbol

$$E_{n_x,n_y} = \underbrace{\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}}_{\text{samma för båda leden}}\left(\underbrace{\frac{n_x^2}{L_x^2}}_{\text{rörelsen i } x\text{-led}} + \underbrace{\frac{n_y^2}{L_y^2}}_{\text{rörelsen i } y\text{-led}}\right)$$

Varje riktning är en egen endimensionell låda med sitt eget kvanttal, och energierna adderas: $E = E_x + E_y$. En kort sida ger stora energisteg i sin riktning, eftersom sidlängden står i nämnaren.

---

1. Separation av variabler

Lådan är en rektangel $0 < x < L_x$, $0 < y < L_y$ med $U = 0$ inuti och oändligt utanför. Precis som i den endimensionella lådan måste ψ vara noll på hela randen. Inuti lyder Schrödingerekvationen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = E\psi$$

Poängen med ansatsen $\psi(x,y) = X(x)\,Y(y)$ är att en partiell differentialekvation i två variabler delas upp i två vanliga ekvationer, en per riktning.

Härledning av vågfunktionerna

Sätt in ansatsen. Derivatan med avseende på x verkar bara på X, och den med avseende på y bara på Y:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(X''Y + XY''\right) = EXY$$

Dela med XY.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{X''}{X} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{Y''}{Y} = E$$

Första termen beror bara på x och andra bara på y. Summan är konstant för alla x och y, så varje term måste vara konstant för sig:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}X'' = E_x X \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}Y'' = E_y Y \qquad E = E_x + E_y$$

Randvillkoren. $\psi = 0$ på $x = 0$ och $x = L_x$ för alla y kräver $X(0) = X(L_x) = 0$, och på samma sätt $Y(0) = Y(L_y) = 0$. Varje ekvation är alltså en endimensionell låda:

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{L_x}}\sin\frac{n_x \pi x}{L_x} \qquad E_x = \frac{n_x^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL_x^2}$$

$$Y(y) = \sqrt{\frac{2}{L_y}}\sin\frac{n_y \pi y}{L_y} \qquad E_y = \frac{n_y^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL_y^2}$$

Normering. Integralen av $|\psi|^2$ över rektangeln delas upp i en x-integral gånger en y-integral, och var och en är redan 1. Produkten är därför normerad.

Resultatet är ett tillstånd per talpar (n_x, n_y) med $n_x, n_y = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\boxed{\psi_{n_x,n_y}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}}\sin\frac{n_x \pi x}{L_x}\sin\frac{n_y \pi y}{L_y}}$$

Fysika: Fd3 (i formen $\psi_n(x) = \sqrt{2/a}\,\sin(n\pi x/a)$; här en sådan faktor per riktning)

Energin $E = E_x + E_y$ är formeln i rutan överst. Två dimensioner kräver två kvanttal, ett per riktning.

---

2. Kvadratisk låda och degeneration

Med $L_x = L_y = L$ blir energin ett heltal gånger en grundenhet:

$$E_{n_x,n_y} = E_0\,(n_x^2 + n_y^2) \qquad E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Grundtillståndet är $(1,1)$ med $E = 2E_0$, alltså inte E_0. De lägsta nivåerna:

$n_x^2 + n_y^2$	tillstånd	degenerationsgrad
2	$(1,1)$	1
5	$(1,2)$, $(2,1)$	2
8	$(2,2)$	1
10	$(1,3)$, $(3,1)$	2
13	$(2,3)$, $(3,2)$	2
17	$(1,4)$, $(4,1)$	2

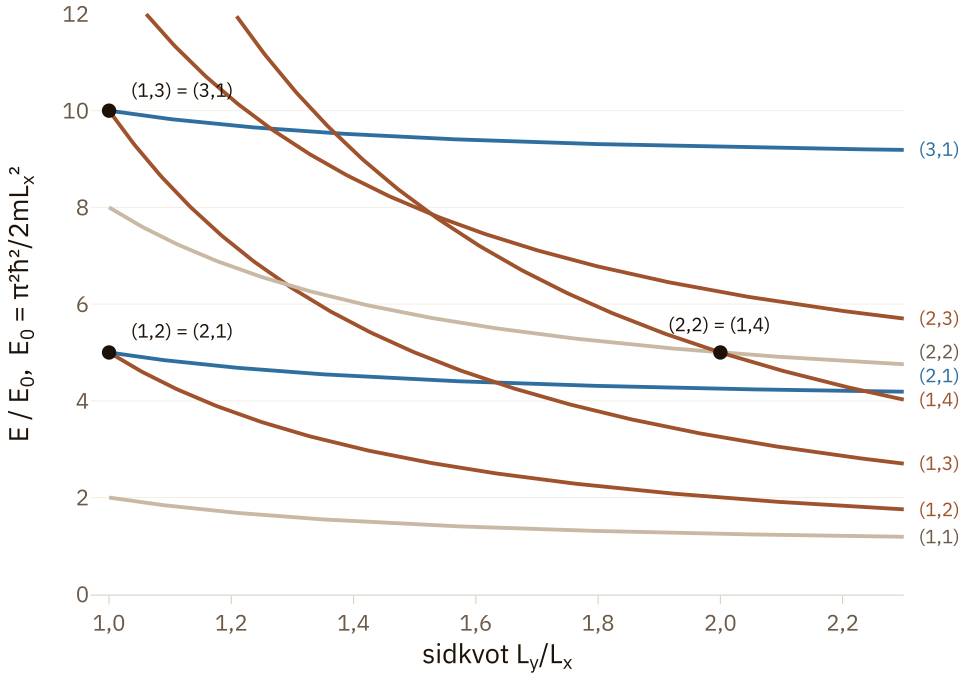
Tillstånden $(1,2)$ och $(2,1)$ är olika vågfunktioner med samma energi. En nivå med flera oberoende tillstånd kallas **degenererad**, och antalet tillstånd är nivåns **degenerationsgrad**. Här kommer degenerationen från symmetrin: att vrida kvadraten $90°$ byter x mot y och därmed (n_x, n_y) mot (n_y, n_x).

Det finns också **tillfällig** degeneration, som inte följer av någon symmetri. Talet 50 kan skrivas både som $1^2 + 7^2$ och som $5^2 + 5^2$, så nivån $50E_0$ har de tre tillstånden $(1,7)$, $(7,1)$ och $(5,5)$.

---

3. Rektangulär låda

Med $L_x \neq L_y$ är symmetrin borta, och $(1,2)$ och $(2,1)$ får olika energi: degenerationen **hävs**. Figuren visar hur nivåerna delar sig när lådan dras ut i y-led.



Energinivåerna i enheter av $E_0 = \pi^2\hbar^2/2mL_x^2$ när L_y växer från L_x till $2{,}3L_x$. Vid kvadraten sammanfaller $(1,2)$ och $(2,1)$, och $(1,3)$ och $(3,1)$. Tillstånd med stort n_y sjunker snabbast. Vid $L_y = 2L_x$ korsas $(2,2)$ och $(1,4)$, och ger en ny, tillfällig degeneration.

Två följder:

- **Ordningen måste räknas fram.** Det lägsta exciterade tillståndet är det med $n = 2$ längs den **längsta** sidan, eftersom n^2/L^2 ökar minst där. Nivåerna högre upp hamnar i en ordning som inte går att gissa.
- **Heltalskvoter ger nya sammanfall.** Om $L_y = 2L_x$ blir $E \propto 4n_x^2 + n_y^2$, och då ger till exempel $(2,2)$ och $(1,4)$ båda 20.

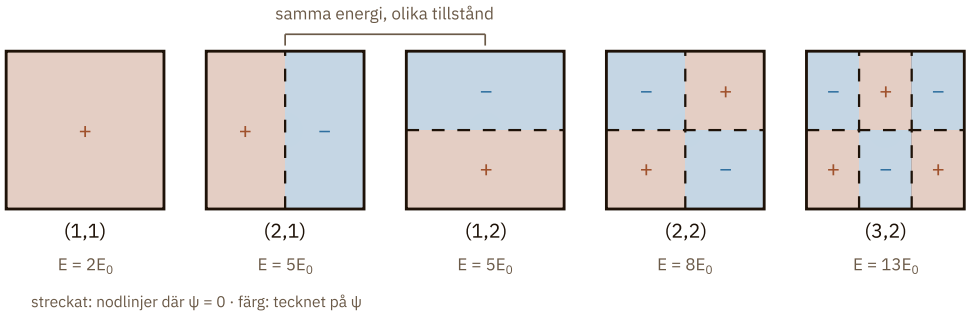
---

4. Sannolikhetstäthet och nodlinjer

Sannolikhetstätheten är en produkt av två endimensionella tätheter:

$$|\psi_{n_x,n_y}|^2 = \frac{4}{L_xL_y}\sin^2\frac{n_x\pi x}{L_x}\,\sin^2\frac{n_y\pi y}{L_y}$$

Där $|\psi|^2 = 0$ inne i lådan ligger **nodlinjer**, räta linjer parallella med sidorna. Tillståndet (n_x, n_y) har $n_x - 1$ lodräta och $n_y - 1$ vågräta nodlinjer, och delar därför lådan i n_xn_y rutor med ψ av växlande tecken.



Tecknet på ψ i fem tillstånd i en kvadratisk låda. De streckade linjerna är nodlinjer: (n_x, n_y) har $n_x - 1$ lodräta och $n_y - 1$ vågräta, som delar lådan i $n_x n_y$ rutor. $(2, 1)$ och $(1, 2)$ har samma energi men är olika tillstånd.

- $(1, 1)$: ingen nodlinje, en enda puckel mitt i lådan.
- $(2, 1)$: en lodrät nodlinje vid $x = L_x/2$, två pucklar bredvid varandra.
- $(1, 2)$: en vågrät nodlinje vid $y = L_y/2$, två pucklar ovanför varandra.

De två sista har samma energi i en kvadratisk låda men olika täthet. Degenererade tillstånd är alltså fysikaliskt olika tillstånd, inte samma tillstånd räknat två gånger. Samma sak i tre dimensioner, med tre kvanttal, ger den degeneration som bygger upp skalen i atomer.

⚠ Vanliga fel

- **Ett kvanttal sätts till noll.** Både n_x och n_y börjar på 1. Med $n_x = 0$ blir $\psi \equiv 0$. Grundnivån i en kvadratisk låda är därför $2E_0$, inte E_0.
- $(1, 2)$ **och** $(2, 1)$ **räknas som ett tillstånd.** De är två olika vågfunktioner, och nivån har degenerationsgrad 2. Det spelar roll när elektroner fylls på enligt Paulis uteslutningsprincip.
- **Nivåordningen gissas.** I en rektangulär låda ska kandidaterna räknas ut. Med $L_y = 2L_x$ ligger till exempel $(1, 3)$ under $(2, 1)$.
- L_x **och** L_y **byts.** n_x hör ihop med L_x. Ett byte ger fel energi så fort sidorna är olika.
- **Degenerationen tros försvinna helt i en rektangel.** Vid heltalskvoter som $L_y = 2L_x$ kan nivåer åter sammanfalla.

5. Lösta exempel

Exempel — Elektron i kvadratisk låda

En elektron är instängd i en kvadratisk tvådimensionell låda med sidan $0{,}500$ nm. Bestäm de fyra lägsta energinivåerna och deras degenerationsgrad (utan spinn). Bestäm också våglängden hos den foton som lyfter elektronen från grundtillståndet till den första exciterade nivån.

Lösning

Grundenheten.

$$E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_eL^2} = \frac{\pi^2\,(1{,}055\cdot10^{-34})^2}{2\cdot9{,}109\cdot10^{-31}\cdot(0{,}500\cdot10^{-9})^2} = 2{,}41\cdot10^{-19}\ \text{J} = 1{,}504\ \text{eV}$$

Fysika: Te ($\hbar$, m_e)

Nivåerna. De minsta värdena på $n_x^2 + n_y^2$ är $2, 5, 8$ och 10:

$$E_{1,1} = 2E_0 = \boxed{3{,}01\ \text{eV}} \quad (1\ \text{tillstånd})$$

$$E_{1,2} = E_{2,1} = 5E_0 = \boxed{7{,}52\ \text{eV}} \quad (2\ \text{tillstånd})$$

$$E_{2,2} = 8E_0 = \boxed{12{,}0\ \text{eV}} \quad (1\ \text{tillstånd})$$

$$E_{1,3} = E_{3,1} = 10E_0 = \boxed{15{,}0\ \text{eV}} \quad (2\ \text{tillstånd})$$

Fotonen. $\Delta E = 5E_0 - 2E_0 = 3E_0 = 4{,}51$ eV:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{4{,}51\ \text{eV}} \approx \boxed{275\ \text{nm}}$$

Det är ultraviolett ljus.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Rektangulär låda med dold degeneration

En elektron sitter i en rektangulär låda med $L_x = 0{,}400$ nm och $L_y = 0{,}800$ nm. Bestäm de sex lägsta tillstånden och deras energier, och avgör om någon nivå är degenererad. Vilken våglängd har fotonen som sänds ut vid övergången från det första exciterade tillståndet till grundtillståndet?

Lösning

Skriv energin med en enhet. Med $L_y = 2L_x$:

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_e L_x^2}\left(n_x^2 + \frac{n_y^2}{4}\right) = E_{0x}\left(n_x^2 + \frac{n_y^2}{4}\right)$$

$$E_{0x} = \frac{\pi^2\,(1{,}055\cdot 10^{-34})^2}{2\cdot 9{,}109\cdot 10^{-31}\cdot (0{,}400\cdot 10^{-9})^2}\ \text{J} = 2{,}350\ \text{eV}$$

Räkna kandidaterna. Värdet av $n_x^2 + n_y^2/4$:

(n_x, n_y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(1,4)$
$n_x^2 + n_y^2/4$	1,25	2	3,25	4,25	5
E (eV)	2,94	4,70	7,64	9,99	11,8

Nästa kandidat är $(2,3)$ med $6{,}25$, alltså högre.

Degeneration. $(1,4)$ och $(2,2)$ har båda $5E_{0x}$:

$$\boxed{E_{1,4} = E_{2,2} = 11{,}8\ \text{eV}}$$

Det är en tillfällig degeneration som beror på att sidkvoten är ett heltal. Övriga nivåer är icke-degenererade.

Fotonen. Första exciterade tillståndet är $(1,2)$, med $\Delta E = (2 - 1{,}25)E_{0x} = 1{,}763$ eV:

$$\lambda = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{1{,}763\ \text{eV}} \approx \boxed{703\ \text{nm}}$$

Det är rött ljus. Observera att $(2, 1)$ ligger först på femte plats.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 41.2 Particle in a Three-dimensional Box

Partikel i potentialbrunn

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #modell

Kurs: F0005T **Förkunskaper:** Partikel i låda

Med en ändlig vägghöjd U_0 i stället för oändlig blir ψ en sinusvåg inne i brunnen och en avtagande exponentialfunktion utanför, en på var sida. Lösningarna måste matchas så att både ψ och $d\psi/dx$ är kontinuerliga över randerna, vilket kräver numerik — det finns inga enkla uttryck. Tre skillnader mot den oändliga lådan följer: ψ är inte noll vid randerna, så våglängden blir längre och energinivåerna därmed lägre; antalet bundna nivåer är ändligt med ett kontinuum ovanför U_0; och vågfunktionen är inte noll utanför brunnen, så partikeln har en sannolikhet att befinna sig där klassisk fysik förbjuder den.

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\,(U_0 - E)\,\psi(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \psi(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}$$

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\frac{d^2\psi}{dx^2}}_{\text{krökningen}} = \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}\,(U_0 - E)\,\psi}_{\kappa^2>0 \text{ utanför brunnen}}$$

$$\psi(x) = \underbrace{Ce^{\kappa x}}_{\substack{\text{växer; stryks} \\ \text{för } x>L}} + \underbrace{De^{-\kappa x}}_{\substack{\text{avtar; stryks} \\ \text{för } x<0}}$$

Utanför brunnen böjer sig ψ bort från axeln i stället för mot den. Då kan den inte svänga utan bara växa eller avta exponentiellt, och bara den avtagande delen går att normera. Partikeln når därför en bit, ungefär $1/\kappa$, in i väggen.

---

1. Tre områden

Brunnen har $U = 0$ för $0 < x < L$ och $U = U_0$ utanför. Vi söker **bundna** tillstånd, alltså $0 < E < U_0$. Då delas x-axeln i tre områden där Schrödingerekvationen har olika karaktär.

Inne i brunnen. Med $U = 0$ är ekvationen densamma som i den oändliga lådan:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$$

Utanför brunnen. Här är $U_0 - E > 0$, och ekvationen i rutan överst ger exponentialfunktioner med

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m\,(U_0 - E)}}{\hbar}$$

Fysika: Fd3 (samma κ som under tunneleffekt)

Vågfunktionen måste gå att normera, så den får inte växa när $|x| \to \infty$. För $x < 0$ stryks därför termen $De^{-\kappa x}$, och för $x > L$ stryks $Ce^{\kappa x}$:

$$\psi(x) = Ce^{\kappa x} \quad (x < 0) \qquad \psi(x) = De^{-\kappa x} \quad (x > L)$$

---

2. Anslutningsvillkoren

Enligt Schrödingerekvationen är $\psi'' \propto (U - E)\psi$. Potentialen gör ett ändligt hopp vid randen, så ψ'' gör också bara ett ändligt hopp. Då är $d\psi/dx$ kontinuerlig, och därmed också ψ. Det ger fyra villkor, två vid varje rand:

$$\psi \text{ och } \frac{d\psi}{dx} \text{ kontinuerliga vid } x = 0 \text{ och } x = L$$

Villkoren går bara att uppfylla för vissa E, och det är så kvantiseringen uppstår. Villkoret $\psi = 0$ vid väggarna gäller inte längre.

Härledning av kvantiseringsvillkoret

Flytta origo till mitten. Brunnen ligger nu på $-L/2 < x < L/2$. Potentialen är symmetrisk, så tillstånden är antingen jämna, $\psi = \cos kx$ inuti, eller udda, $\psi = \sin kx$ inuti. Utanför höger rand är $\psi \propto e^{-\kappa x}$.

Kvoten ψ'/ψ vid $x = L/2$. Båda villkoren vid randen kan slås ihop till att ψ'/ψ ska vara lika på båda sidor. Utanför är kvoten $-\kappa$.

Jämna tillstånd:

$$\frac{-k\sin(kL/2)}{\cos(kL/2)} = -\kappa \qquad \Longrightarrow \qquad k\tan\frac{kL}{2} = \kappa$$

Udda tillstånd:

$$\frac{k\cos(kL/2)}{\sin(kL/2)} = -\kappa \qquad \Longrightarrow \qquad -k\cot\frac{kL}{2} = \kappa$$

Dimensionslösa variabler. Inför $z = kL/2$ och

$$z_0 = \frac{L}{2}\cdot\frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar}$$

Eftersom $k^2 + \kappa^2 = 2mU_0/\hbar^2$ blir $\kappa L/2 = \sqrt{z_0^2 - z^2}$, och villkoren blir

$$z\tan z = \sqrt{z_0^2 - z^2} \quad \text{(jämna)} \qquad -z\cot z = \sqrt{z_0^2 - z^2} \quad \text{(udda)}$$

Det är transcendenta ekvationer. De löses grafiskt eller numeriskt, inte med en formel.

Koppling till den oändliga brunnen. Med $E_{1\text{-IDW}} = \pi^2\hbar^2/2mL^2$, grundnivån i en oändlig brunn med samma bredd, är

$$\frac{E}{E_{1\text{-IDW}}} = \left(\frac{2z}{\pi}\right)^2 \qquad z_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{U_0}{E_{1\text{-IDW}}}}$$

Gränsen $U_0 \to \infty$ ger $z_0 \to \infty$, och då ligger lösningarna vid $z = \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2, \ldots$, vilket ger $E = n^2 E_{1\text{-IDW}}$ som i den oändliga lådan.

3. Antalet bundna tillstånd

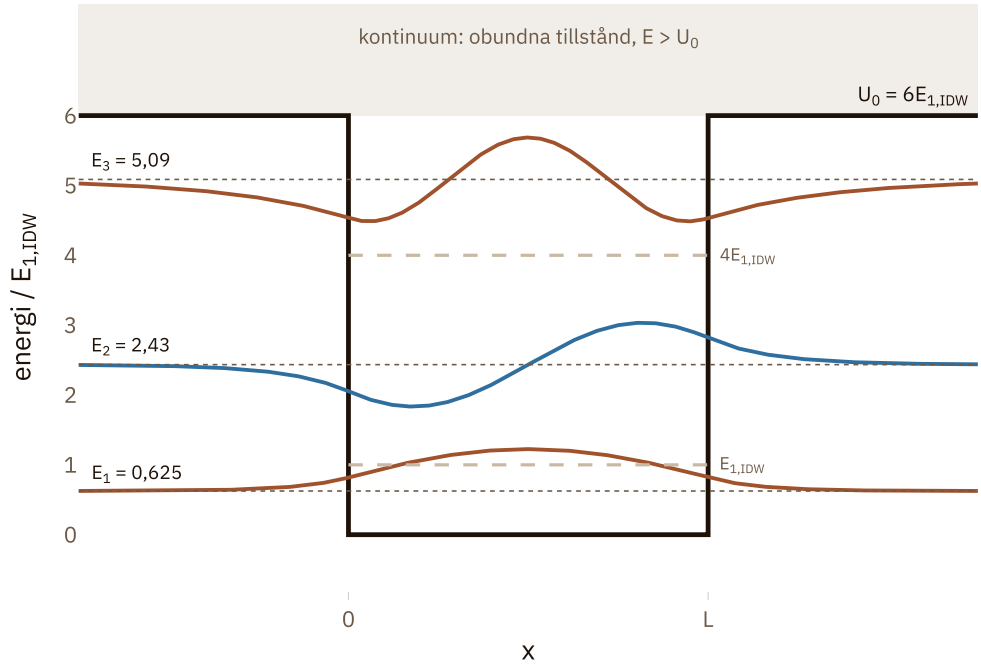
Vänsterleden $z\tan z$ och $-z\cot z$ går växelvis från 0 till ∞ på varje intervall av längden $\pi/2$, medan högerledet avtar från z_0 till 0 på $0 \le z \le z_0$. Varje påbörjat intervall ger därför exakt en lösning, och antalet bundna tillstånd blir

$$N = \left\lceil \sqrt{\frac{U_0}{E_{1\text{-IDW}}}} \right\rceil$$

där $\lceil \cdot \rceil$ betyder avrundning uppåt till heltal. En brunn har alltså alltid **minst ett** bundet tillstånd, hur grund den än är.

Brunnen med $U_0 = 6E_{1\text{-IDW}}$. Här är $\sqrt{6} = 2{,}45$, så $N = 3$. Numerisk lösning av villkoren ger

n	$E_n/E_{1\text{-IDW}}$	E_n/U_0	**oändlig brunn,** n^2
1	0,625	0,104	1
2	2,43	0,406	4
3	5,09	0,848	9



De tre bundna tillstånden i en brunn med $U_0 = 6E_{1\text{-IDW}}$, ritade på sina energinivåer. Vågfunktionerna är inte noll vid randerna utan klingar av exponentiellt utanför brunnen. Den oändliga brunnens nivåer $E_{1\text{-IDW}}$ och $4E_{1\text{-IDW}}$ (streckade) ligger högre, och dess nivå $9E_{1\text{-IDW}}$ finns inte alls bland de bundna. Ovanför U_0 är energin inte kvantiserad.

4. Jämförelse med den oändliga brunnen

	oändlig brunn	ändlig brunn
ψ vid randen	0	skild från 0
ψ utanför	0	$\propto e^{-\kappa\lvert x\rvert}$
antal bundna nivåer	oändligt många	N, alltid minst 1
nivåerna	$n^2E_{1\text{-IDW}}$	lägre än $n^2E_{1\text{-IDW}}$
över brunnskanten	finns inte	kontinuum för $E > U_0$

Nivåerna ligger lägre eftersom ψ får sticka ut en bit utanför. Vågen får plats med en längre våglängd, och längre våglängd betyder mindre rörelsemängd och därmed lägre energi. Skillnaden är störst för de högsta nivåerna, som ligger närmast kanten.

---

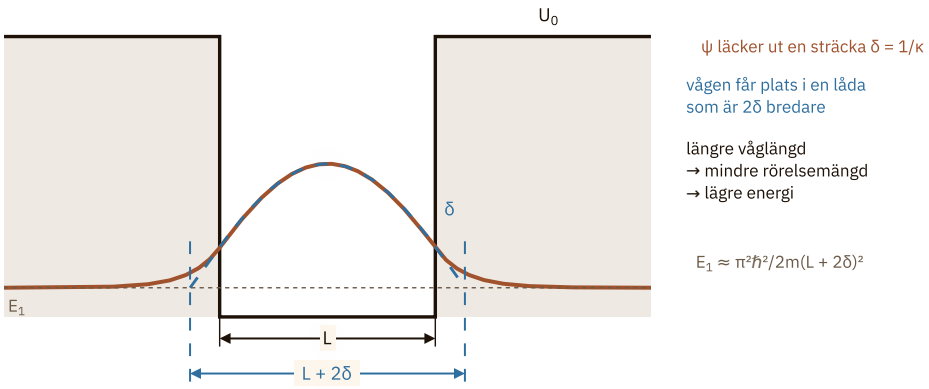
5. Inträngningsdjupet

Utanför brunnen avtar sannolikhetstätheten som $|\psi|^2 \propto e^{-2\kappa|x|}$ räknat från randen. Ett mått på hur långt ut partikeln når är längden där ψ har minskat med faktorn e:

$$\delta = \frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\,(U_0 - E)}}$$

Nivåer nära kanten har litet $U_0 - E$ och tränger därför längst ut. Klassiskt är området utanför förbjudet, eftersom den kinetiska energin $E - U_0$ där skulle vara negativ. Är barriären tunn jämfört med δ kan partikeln ta sig igenom, vilket är tunnling.

En användbar tumregel är att den ändliga brunnen beter sig ungefär som en oändlig brunn med den **effektiva bredden** $L + 2\delta$.



Grundtillståndet i en brunn med $U_0 = 6E_{1\text{-IDW}}$ (heldraget) och en halv sinusvåg i en oändlig låda med bredden $L + 2\delta$ (streckat). Inne i brunnen går de knappt att skilja åt: vågen beter sig som om väggarna stod δ längre ut, och därför ligger nivån lägre.

⚠ Vanliga fel

- **κ räknas med U_0 i stället för $U_0 - E$.** Avklingningen bestäms av hur långt under kanten nivån ligger, inte av brunnsdjupet ensamt.
- **Den oändliga brunnens formel används för de exakta nivåerna.** $n^2 E_{1\text{-IDW}}$ är en övre gräns, inte svaret. De exakta nivåerna kräver numerisk lösning.
- **$\psi = 0$ sätts vid randen.** Det gäller bara när väggen är oändligt hög. I den ändliga brunnen är det ψ och $d\psi/dx$ som ska vara kontinuerliga.
- **Energin räknas från fel nollnivå.** E mäts från brunnens botten, och ett tillstånd är bundet bara om $E < U_0$.
- **En grund brunn tros sakna bundna tillstånd.** Det finns alltid minst ett, i en endimensionell brunn.

---

6. Lösta exempel

Exempel — Grund brunn för en elektron

En elektron befinner sig i en ändlig brunn med bredden $0{,}500$ nm och djupet $5{,}00$ eV. a) Hur många bundna tillstånd finns? b) En numerisk lösning ger grundnivån $0{,}814$ eV. Bestäm inträngningsdjupet $1/\kappa$ för grundtillståndet. c) Uppskatta grundnivån som en oändlig brunn med den effektiva bredden $L + 2/\kappa$, och jämför med det exakta värdet.

Lösning

a) Den oändliga brunnens grundnivå:

$$E_{1\text{-IDW}} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m_e L^2} = \frac{\pi^2 \left(1{,}055 \cdot 10^{-34}\right)^2}{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot \left(0{,}500 \cdot 10^{-9}\right)^2}\ \text{J} = 1{,}504\ \text{eV}$$

Fysika: Fd3 (partikel i endimensionell låda, E_n med $n = 1$) och Te ($\hbar$, m_e)

$$\sqrt{\frac{U_0}{E_{1\text{-IDW}}}} = \sqrt{\frac{5{,}00}{1{,}504}} = \sqrt{3{,}32} = 1{,}82 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{N = 2}$$

b) $U_0 - E = 4{,}186\ \text{eV} = 6{,}71 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$:

$$\kappa = \frac{\sqrt{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 6{,}71 \cdot 10^{-19}}}{1{,}055 \cdot 10^{-34}} = 1{,}05 \cdot 10^{10}\ \text{m}^{-1}$$

$$\frac{1}{\kappa} = \boxed{0{,}0954\ \text{nm}}$$

Elektronen når alltså ungefär en femtedel av brunnsbredden ut på varje sida.

c) Effektiv bredd $L_{\text{eff}} = 0{,}500 + 2 \cdot 0{,}0954 = 0{,}691$ nm. Energin skalar som $1/L^2$:

$$E_1 \approx E_{1\text{-IDW}} \left(\frac{L}{L_{\text{eff}}}\right)^2 = 1{,}504 \cdot \left(\frac{0{,}500}{0{,}691}\right)^2 \approx \boxed{0{,}788\ \text{eV}}$$

Det exakta värdet är $0{,}814$ eV, så uppskattningen ligger ungefär $3\ \%$ fel. Den oändliga brunnen hade gett $1{,}50$ eV, nästan dubbelt så mycket.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Hur djup för tre nivåer?

En elektron sitter i en ändlig brunn med bredden $0{,}300$ nm. Inom vilket intervall ska brunnsdjupet U_0 ligga för att det ska finnas exakt tre bundna tillstånd? Hur många bundna tillstånd finns det om $U_0 = 25{,}0$ eV?

Lösning

Grundenheten.

$$E_{1\text{-IDW}} = \frac{\pi^2 \left(1{,}055 \cdot 10^{-34}\right)^2}{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot \left(0{,}300 \cdot 10^{-9}\right)^2}\ \text{J} = 4{,}18\ \text{eV}$$

Villkoret. $N = 3$ kräver $2 < \sqrt{U_0/E_{1\text{-IDW}}} \le 3$, alltså

$$4E_{1\text{-IDW}} < U_0 \le 9E_{1\text{-IDW}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{16{,}7\ \text{eV} < U_0 \le 37{,}6\ \text{eV}}$$

$U_0 = 25{,}0$ **eV.**

$$\sqrt{\frac{25{,}0}{4{,}18}} = 2{,}45 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{N = 3}$$

Numerisk lösning ger nivåerna $2{,}61$, $10{,}2$ och $21{,}2$ eV, alla under motsvarande $4{,}18$, $16{,}7$ och $37{,}6$ eV i den oändliga brunnen.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 40.3 Potential Wells

Kvantmekanisk tunnling

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Partikel i potentialbrunn

---

En partikel med energin E lägre än barriärhöjden U_0 kan ändå ta sig igenom en tillräckligt tunn barriär, eftersom vågfunktionen avtar exponentiellt inuti barriären men inte hinner nå noll. Partikeln borrar sig inte igenom och förlorar ingen energi i processen — den lämnar inget hål. Sannolikheten är proportionell mot kvadraten på kvoten mellan amplituderna på barriärens två sidor och beror extremt känsligt på bredden L och på massan: samma barriär som ger $T \approx 10^{-3}$ för en elektron ger 10^{-143} för en proton. Tunnling förklarar α-sönderfall ur instabila kärnor och vissa kemiska reaktioner med väte.

$$T = Ge^{-2\kappa L}, \qquad \kappa = \frac{\sqrt{2m\,(U_0 - E)}}{\hbar}, \qquad G = 16\frac{E}{U_0}\left(1 - \frac{E}{U_0}\right)$$

Fysika: Fd3 (tunneleffekt, med E_p och m_p för partikelns energi och massa)

Formeln, symbol för symbol

$$T = \underbrace{G}_{\substack{\text{förfaktor,}\\ \text{mellan 0 och 4}}} \quad \underbrace{e^{-2\kappa L}}_{\substack{\text{amplitudens}\\ \text{avtagande i kvadrat}}}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2\,\underbrace{m}_{\text{massan}}\,\underbrace{(U_0 - E)}_{\substack{\text{höjden}\\ \text{över } E}}}}{\hbar}$$

Inne i barriären avtar vågfunktionen som $e^{-\kappa x}$, och sannolikheten som kvadraten på den. Allt som gör κL större — bredare barriär, tyngre partikel, längre upp till toppen — hamnar i exponenten, och därför är tunnling så känslig.

---

1. Klassiskt förbjudet område

Ta en rektangulär barriär: $U = U_0$ för $0 \le x \le L$ och $U = 0$ utanför. En partikel med energin $E < U_0$ kommer in från vänster. Inuti barriären skulle den kinetiska energin bli

$$K = E - U_0 < 0$$

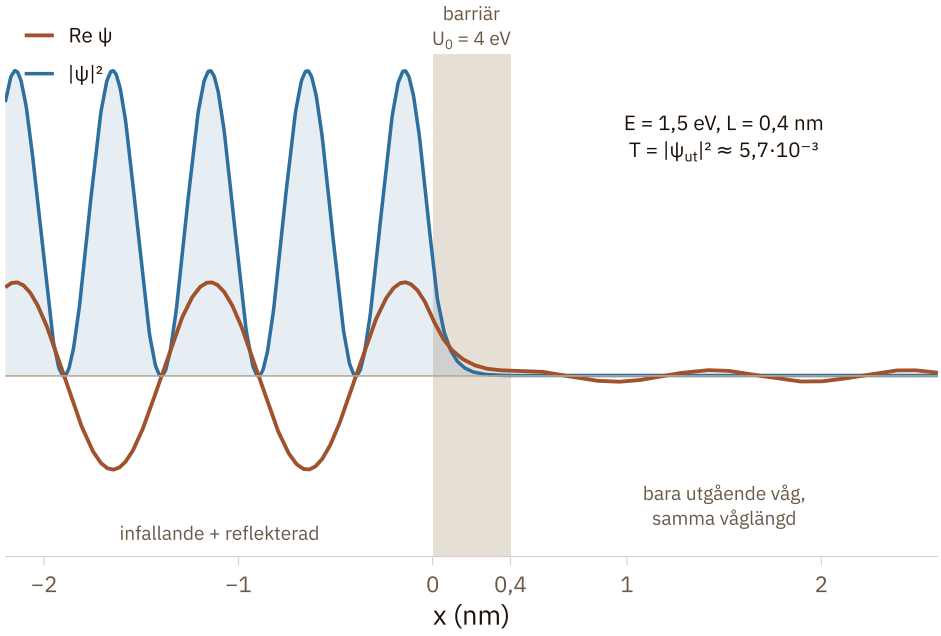
och det går inte klassiskt, så partikeln studsar alltid tillbaka. Kvantmekaniskt finns ingen sådan spärr. Schrödingerekvationen har lösningar också där $E < U$, men de oscillerar inte.

---

2. Vågfunktionen i tre områden

- **Vänster om barriären** ($x < 0$): en infallande och en reflekterad våg med vågtalet $k = \sqrt{2mE}/\hbar$.
- **Inuti barriären** ($0 \le x \le L$): samma ekvation som i väggen på en ändlig brunn, alltså en kombination av $e^{\kappa x}$ och $e^{-\kappa x}$.
- **Höger om barriären** ($x > L$): bara en utgående våg. Där är $U = 0$ igen och energin densamma, så vågtalet är samma k som till vänster.

Vid $x = 0$ och $x = L$ måste både ψ och $d\psi/dx$ vara kontinuerliga. De fyra villkoren bestämmer alla amplituder i förhållande till den infallande, och den utgående amplituden blir aldrig noll. Tunnelsannolikheten T är kvadraten på kvoten mellan den utgående och den infallande amplituden.



Exakt lösning för en elektron med $E = 1{,}5$ eV mot en barriär med $U_0 = 4$ eV och $L = 0{,}4$ nm. Till vänster interfererar den infallande och den reflekterade vågen, inuti barriären avtar ψ exponentiellt, och till höger fortsätter en våg med samma våglängd men mycket mindre amplitud: $T \approx 5{,}7 \cdot 10^{-3}$.

Varför exponenten är $-2\kappa L$

Inuti barriären. När barriären är bred dominerar den avtagande termen:

$$\psi(x) \approx De^{-\kappa x}$$

Över barriären. Från $x = 0$ till $x = L$ minskar amplituden med faktorn

$$\frac{|\psi(L)|}{|\psi(0)|} \approx e^{-\kappa L}$$

Sannolikheten. Sannolikheten går som amplituden i kvadrat:

$$T \propto (e^{-\kappa L})^2 = e^{-2\kappa L}$$

Förfaktorn. När sinusvågen passas ihop med exponentialfunktionerna vid båda kanterna blir förfaktorn $G = 16\dfrac{E}{U_0}\left(1 - \dfrac{E}{U_0}\right)$, som ligger mellan 0 och 4. Den exakta lösningen innehåller också den växande termen $e^{\kappa x}$. Den är försumbar bara när $\kappa L \gg 1$, och därför gäller formeln bara när $T \ll 1$.

---

3. Känsligheten

Logaritmera ingressens formel:

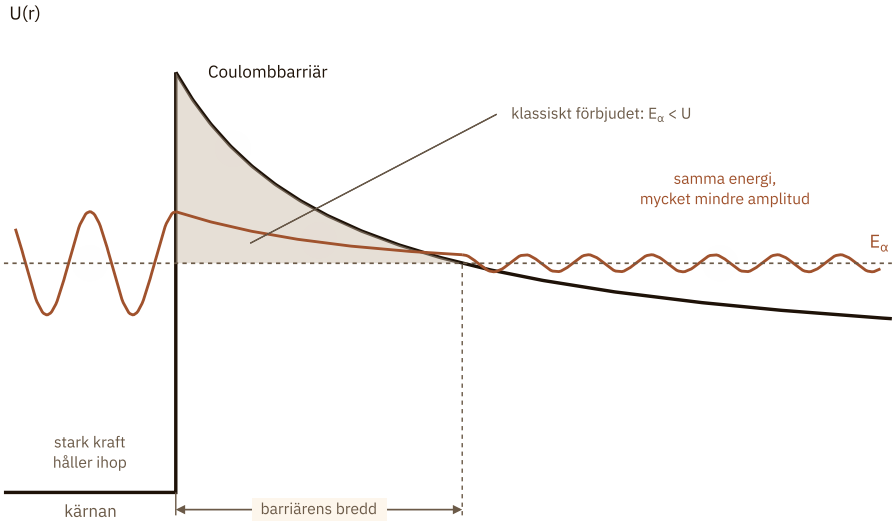
$$\ln T = \ln G - 2\kappa L$$

Bredden och κ står i exponenten, medan G bara står framför. Därför är tunnling så känslig:

- **Bredden.** Varje gång L ökar med $\ln 10/(2\kappa)$ blir T tio gånger mindre. För en elektron med $U_0 - E = 2{,}50$ eV räcker det med $0{,}142$ nm.
- **Massan.** $\kappa \propto \sqrt{m}$. En proton är 1836 gånger tyngre än en elektron, så exponenten blir ungefär 43 gånger större.
- **Avståndet till toppen.** $\kappa \propto \sqrt{U_0 - E}$, så ju närmare toppen partikeln ligger, desto lättare tunnlar den.

Tillämpningar. Elektroner tunnlar genom tunna oxidskikt mellan två ledare. Det utnyttjas i tunneldioden och i Josephsonövergången mellan två supraledare. Sveptunnelmikroskopet mäter tunnelströmmen över ett vakuumgap. Vid α-sönderfall tunnlar alfapartikeln ut genom kärnans

Coulombbarriär. I solens kärna tunnlar protoner genom varandras Coulombbarriär, så fusionen går vid en lägre temperatur än klassisk fysik skulle kräva.



α-sönderfall som tunnling. Inne i kärnan hålls alfapartikeln kvar av den starka kraften, och utanför knuffas den bort av Coulombrepulsionen. Med energin E_α under barriärens topp avtar ψ exponentiellt genom det klassiskt förbjudna området och fortsätter ut med samma energi men mycket mindre amplitud.

⚠ Vanliga fel

- **U_0 i stället för $U_0 - E$ i κ.** Det som räknas är barriärens höjd *över* partikelns energi.
- **eV direkt under roten.** $U_0 - E$ måste i joule innan κ räknas ut, och man delar med $\hbar$, inte h.
- **Faktorn 2 glöms.** Exponenten är $-2\kappa L$, eftersom sannolikheten går som amplituden i kvadrat.
- **Formeln används utanför sitt område.** $T = Ge^{-2\kappa L}$ förutsätter $E < U_0$ och $T \ll 1$. När $E > U_0$ finns ingen exponentiell dämpning, men en del reflekteras ändå.
- **Partikeln tros förlora energi.** Efter tunnlingen har den samma energi och samma våglängd som före. Det enda som är mindre är amplituden.

---

4. Lösta exempel

Exempel — Elektron eller proton genom samma barriär

En partikel med energin $1{,}50$ eV träffar en rektangulär barriär som är $4{,}00$ eV hög och $0{,}800$ nm bred.

a) Beräkna tunnelsannolikheten för en elektron. b) Hur bred får barriären högst vara om elektronens tunnelsannolikhet ska vara minst $1{,}00 \cdot 10^{-6}$? c) Beräkna tunnelsannolikheten för en proton med samma energi genom barriären i a).

Lösning

a) Förfaktorn. $E/U_0 = 0{,}375$:

$$G = 16 \cdot 0{,}375 \cdot (1 - 0{,}375) = 3{,}75$$

Avtagandet. $U_0 - E = 2{,}50\ \text{eV} = 4{,}005 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$:

$$\kappa = \frac{\sqrt{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 4{,}005 \cdot 10^{-19}}}{1{,}055 \cdot 10^{-34}} = 8{,}10 \cdot 10^{9}\ \text{m}^{-1}$$

Fysika: Te ($\hbar$, m_e)

Tunnelsannolikheten. $2\kappa L = 2 \cdot 8{,}10 \cdot 10^{9} \cdot 0{,}800 \cdot 10^{-9} = 12{,}96$:

$$T = 3{,}75\, e^{-12{,}96} = 3{,}75 \cdot 2{,}35 \cdot 10^{-6} \approx \boxed{8{,}82 \cdot 10^{-6}}$$

b) Lös ut bredden. Ur $\ln T = \ln G - 2\kappa L$:

$$L = \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{G}{T} = \frac{\ln(3{,}75 \cdot 10^{6})}{2 \cdot 8{,}10 \cdot 10^{9}} = \frac{15{,}14}{1{,}620 \cdot 10^{10}} \approx \boxed{0{,}934\ \text{nm}}$$

Barriären får bara bli $0{,}13$ nm bredare innan sannolikheten sjunker nästan nio gånger.

c) Protonen. G beror bara på E/U_0 och är oförändrat. Med $m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg:

$$\kappa_p = \frac{\sqrt{2 \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27} \cdot 4{,}005 \cdot 10^{-19}}}{1{,}055 \cdot 10^{-34}} = 3{,}47 \cdot 10^{11}\ \text{m}^{-1}$$

$$2\kappa_p L = 555{,}4 \qquad T_p = 3{,}75\, e^{-555{,}4} \approx \boxed{2{,}4 \cdot 10^{-241}}$$

Räknaren ger noll här, så räkna med tiologaritmen: $\lg T_p = \lg 3{,}75 - 555{,}4/\ln 10 = -240{,}6$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 40.4 Potential Barriers and Tunneling

Sveptunnelmikroskopet

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #metod

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Kvantmekanisk tunnling

Sveptunnelmikroskopet utnyttjar att tunnelsannolikheten är exponentiellt känslig för barriärens bredd: med ett vakuumgap kring 1 nm mellan spets och yta ändras tunnelströmmen kraftigt vid minsta höjdskillnad. Det ger $0{,}1$ nm lateral och $0{,}01$ nm upplösning på djupet. Eftersom strömmen beror på vilka tillstånd som finns vid en given energi blir bilderna energiberoende, och tekniken kan byggas ut till STS, som ser enskilda tillstånd, och IETS, som mäter vilka tillstånd som kopplar till vibrationer.

Formeln, symbol för symbol

$$\frac{I_2}{I_1} = \exp\left(-2 \underbrace{\kappa}_{\substack{\text{avklingning,}\\ \text{bestäms av } \phi}} \underbrace{(d_2 - d_1)}_{\substack{\text{gapets}\\ \text{ändring}}}\right)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m_e \underbrace{\phi}_{\substack{\text{utträdes-}\\ \text{arbetet}}}}}{\hbar}$$

Strömmen beror bara på hur mycket gapet ändras, och ändringen står i exponenten. Med $\phi \approx 4{,}5$ eV räcker en tiondels nanometer för att strömmen ska ändras ungefär tio gånger.

---

1. Uppställningen

En vass metallspets förs ned mot en ledande yta tills gapet är ungefär 1 nm. Längst ut sitter idealt en enda atom. Mellan spets och yta läggs en liten spänning, från några millivolt upp till några volt.

Vakuumgapet fungerar som en barriär. För att lämna metallen måste en elektron få ungefär utträdesarbetet ϕ, samma storhet som i Fotoelektriska effekten. Barriärhöjden över elektronernas energi blir därför $U_0 - E \approx \phi$, typiskt 4–5 eV. Utan spänning tunnlar lika många elektroner åt båda hållen. Spänningen gör att fler går åt ena hållet, och då flyter en nettoström på några nanoampere.

Spetsen flyttas med piezoelektriska kristaller, som ger en noggrannhet på pikometer i alla tre riktningar.

---

2. Strömmens avståndsberoende

Strömmen är proportionell mot tunnelsannolikheten i Kvantmekanisk tunnling. Gapet d är barriärens bredd, och κ bestäms av utträdesarbetet:

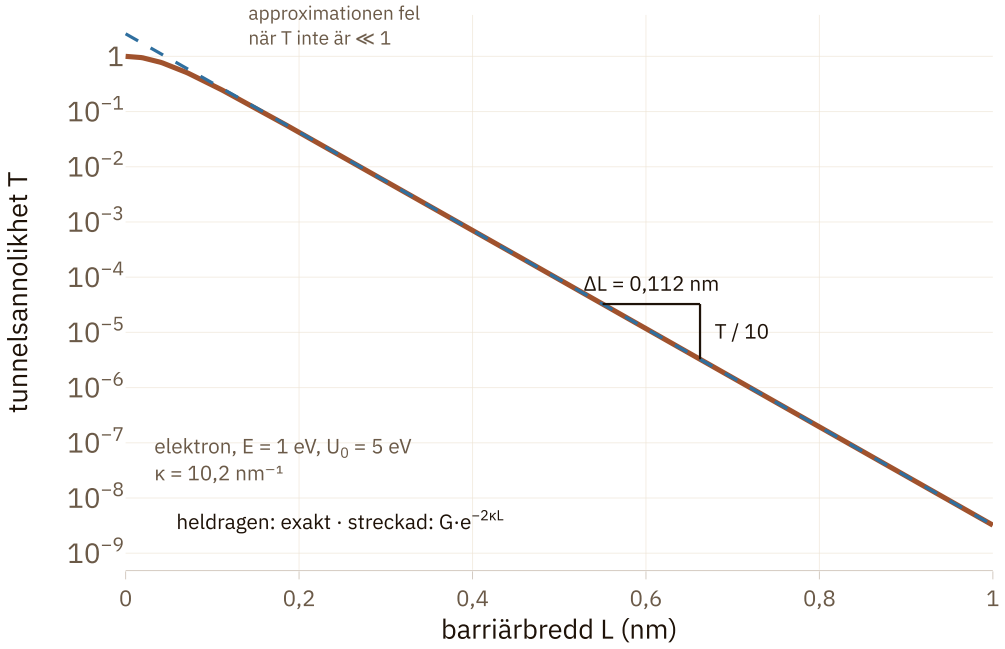
$$I \propto e^{-2\kappa d} \qquad \kappa = \frac{\sqrt{2m_e\phi}}{\hbar}$$

Fysika: Fd3 (tunneleffekt, $T = Ge^{-2\kappa L}$ med gapet d som barriärbredd)

Förfaktorn och spänningen beror knappt på d. I en kvot mellan två avstånd tar de därför ut varandra:

$$\boxed{\frac{I_2}{I_1} = e^{-2\kappa(d_2 - d_1)}}$$

För $\phi = 4{,}50$ eV blir $\kappa \approx 10{,}9\ \text{nm}^{-1}$. Om gapet ökar med $\ln 10/(2\kappa) = 0{,}106$ nm blir strömmen tio gånger mindre, och det är mindre än en atomdiameter. Strömmen går då nästan bara genom den atom i spetsen som sitter närmast ytan. Det är därför mikroskopet når atomär upplösning.

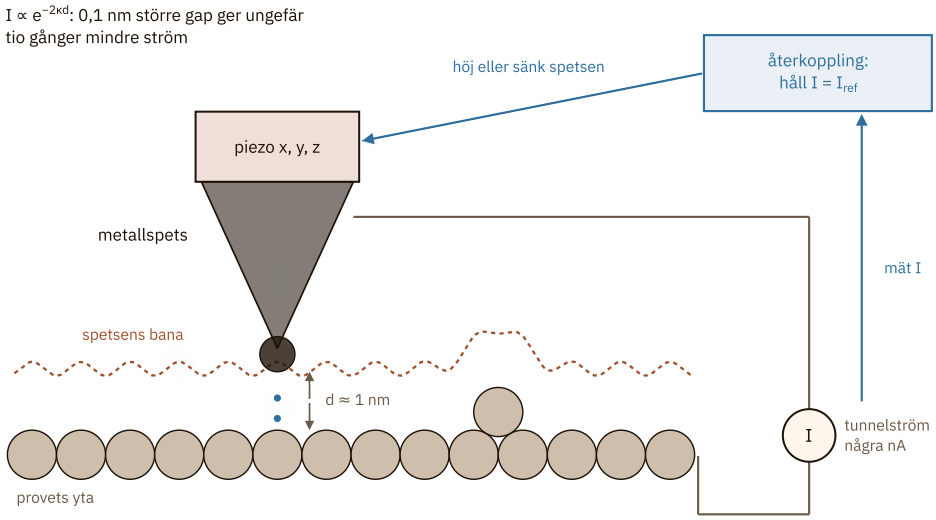


Tunnelsannolikheten mot barriärbredden för en elektron med $E = 1$ eV mot $U_0 = 5$ eV, på logaritmisk skala. Kurvan är nästan rak: varje $0{,}11$ nm extra bredd gör T tio gånger mindre. Approximationen $Ge^{-2\kappa L}$ (streckad) sammanfaller med den exakta lösningen så snart $T \ll 1$.

---

3. Driftlägen

- **Konstant ström.** En återkopplingskrets höjer och sänker spetsen så att strömmen hålls konstant, och då är gapet konstant. När spetsen sveper över ytan ritar dess höjd ytans topografi. Läget är det vanligaste och skyddar spetsen mot krockar.
- **Konstant höjd.** Spetsen hålls på fast höjd och strömmen registreras. Det går snabbare men fungerar bara på mycket släta ytor.



Sveptunnelmikroskopet i läget konstant ström. Elektroner tunnlar över gapet d mellan spetsens yttersta atom och ytan. Återkopplingen jämför strömmen med ett börvärde och höjer eller sänker spetsen med piezokristallerna så att gapet hålls konstant, och spetsens höjd under svepet ritar ytans topografi — här med en extra atom på ytan.

Strömmen beror också på hur många elektrontillstånd som finns vid de energier som spänningen väljer ut. Om man håller spetsen still, varierar spänningen och mäter dI/dV får man tillståndstätheten på just den platsen. Det är **STS**, sveptunnelspektroskopi. **IETS**, inelastisk tunnelspektroskopi, letar efter små steg i strömmen vid de spänningar där elektronerna börjar kunna lämna energi till en vibration i en molekyl på ytan.

⚠ Vanliga fel

- **Faktorn 2 glöms.** Strömmen följer $e^{-2\kappa d}$. Med $e^{-\kappa d}$ blir känsligheten bara hälften så stor.
- **Fel barriärhöjd.** Barriären är utträdesarbetet på några eV. Den pålagda spänningen, ofta bara millivolt, är något annat.
- **Fel ekvation för gapändringen.** En relativ strömändring motsvarar $\Delta d = \ln(I_1/I_2)/(2\kappa)$. Det går inte att multiplicera procentsatsen med gapet.
- **Mikroskopet tros avbilda atomkärnor.** Det mäter elektrontillstånd vid ytan. Bilden visar var elektronerna finns vid en viss energi.

4. Lösta exempel

Exempel — Hur känslig är strömmen?

Spetsen i ett sveptunnelmikroskop befinner sig nära en metallyta. Barriärhöjden över elektronernas energi är $4{,}50$ eV.

a) Beräkna κ. b) Med vilken faktor minskar tunnelströmmen om gapet ökar med $0{,}100$ nm? c) Återkopplingen tillåter att strömmen ökar med högst $2{,}00\,\%$ innan spetsen flyttas. Hur mycket får gapet minska innan det händer?

Lösning

a) Avtagandet. $\phi = 4{,}50$ eV $= 7{,}210 \cdot 10^{-19}$ J:

$$\kappa = \frac{\sqrt{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 7{,}210 \cdot 10^{-19}}}{1{,}055 \cdot 10^{-34}} \approx \boxed{1{,}09 \cdot 10^{10}\ \text{m}^{-1}}$$

Fysika: Te ($\hbar$, m_e)

b) Kvoten. $2\kappa\,\Delta d = 2 \cdot 1{,}087 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-10} = 2{,}174$:

$$\frac{I_1}{I_2} = e^{2{,}174} \approx \boxed{8{,}79}$$

Strömmen blir nästan nio gånger mindre när gapet växer med ungefär en halv atomdiameter.

c) Lös ut gapändringen. $I_2/I_1 = 1{,}02$ ger

$$\Delta d = \frac{\ln 1{,}02}{2\kappa} = \frac{0{,}01980}{2{,}174 \cdot 10^{10}} \approx \boxed{0{,}911\ \text{pm}}$$

Det är ungefär en hundradel av en atomradie, vilket förklarar upplösningen på djupet.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 40.4 Potential Barriers and Tunneling

Kvantmekanisk harmonisk oscillator

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Schrödingerekvationen, Svängning

---

Med Hookes lag $F(x) = -k'x$ blir den potentiella energin $U(x) = \frac{1}{2}k'x^2$, och randvillkoret är att $\psi \to 0$ när $x \to \pm\infty$. Lösningarna ges av Hermitefunktioner. Energinivåerna blir jämnt fördelade till skillnad från lådans, så avståndet mellan två grannnivåer är alltid $\Delta E = \hbar\omega$, vilket motsvarar fotoner i IR-området. Den lägsta nivån ligger inte i noll utan på $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

$$\boxed{E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k'}{m}}}$$

Formeln, symbol för symbol

$$E_n = \Big(\underbrace{n}_{\substack{\text{antal}\\\text{steg}}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{noll-}\\\text{punkten}}}\Big)\underbrace{\hbar\omega}_{\substack{\text{ett}\\\text{steg}}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\overbrace{k'}^{\text{fjäderkonstanten}}}{\underbrace{m}_{\text{massan}}}}$$

Nivåerna bildar en stege där alla steg är lika höga, $\hbar\omega$, och det lägsta ligger ett halvt steg över botten. En styvare fjäder eller en lättare massa ger högre steg.

---

1. Schrödingerekvationen för oscillatorn

Klassiskt svänger en massa i en fjäder med vinkelfrekvensen $\omega = \sqrt{k'/m}$ (se Svängning) mellan två vändpunkter $\pm A$. Där är all energi potentiell, så $\frac{1}{2}k'A^2 = E$. Kvantmekaniskt sätter vi in $U = \frac{1}{2}k'x^2$ i Schrödingerekvationen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}k'x^2\psi = E\psi$$

Dessutom måste $\psi \to 0$ när $|x| \to \infty$, annars går vågfunktionen inte att normera.

---

2. Varför bara vissa energier

Skriv om ekvationen så att krökningen står ensam:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{1}{2}k'x^2 - E\right)\psi$$

- **Innanför vändpunkterna** är parentesen negativ. Då har $d^2\psi/dx^2$ motsatt tecken mot ψ, kurvan böjer sig mot x-axeln och ψ oscillerar.
- **Utanför vändpunkterna** är parentesen positiv. Då böjer kurvan bort från axeln, och en godtycklig lösning växer utan gräns.

Bara för vissa värden på E lämnar kurvan det oscillerande området precis så att den närmar sig noll på båda sidor. Det är de energier som ingressens formel ger. Samma resonemang förklarar kvantiseringen i den ändliga brunnen.

---

3. Grundtillståndet

Den lägsta lösningen är en Gaussklocka utan nollställen:

$$\psi_0(x) = Ce^{-\sqrt{mk'}\,x^2/2\hbar}$$

Kontroll av grundtillståndet och normering

Kortform. Sätt $\alpha = \sqrt{mk'}/\hbar = m\omega/\hbar$ så att $\psi_0 = Ce^{-\alpha x^2/2}$.

Derivera två gånger.

$$\frac{d\psi_0}{dx} = -\alpha x\,\psi_0$$

$$\frac{d^2\psi_0}{dx^2} = (\alpha^2x^2 - \alpha)\,\psi_0$$

Sätt in i ekvationen.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\alpha^2 x^2 - \alpha)\psi_0 + \frac{1}{2}k' x^2 \psi_0 = E\psi_0$$

Termerna med x^2. De tar ut varandra för alla x, och det är därför α valdes som den gjordes:

$$\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{mk'}{\hbar^2} = \frac{k'}{2}$$

Konstanta termer. Det som blir kvar är energin:

$$E = \frac{\hbar^2\alpha}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{m\omega}{\hbar} = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Det är E_0 i ingressens formel.

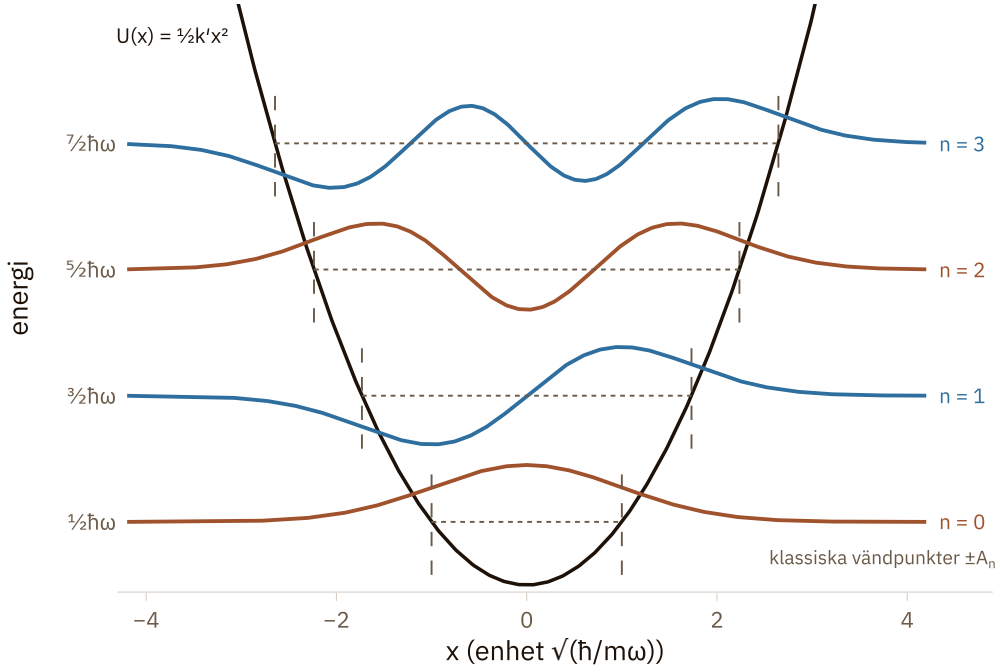
Normering. Med Gaussintegralen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\pi/\alpha}$:

$$C^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad C = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

Med $\sqrt{mk'} = m\omega$ blir det normerade grundtillståndet

$$\boxed{\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar}}$$

De högre tillstånden är samma Gaussfaktor multiplicerad med ett polynom av grad n, ett Hermitepolynom. ψ_n har n nollställen och är omväxlande jämn och udda.



De fyra lägsta tillstånden ritade på sina energinivåer i parabeln. De streckade linjerna markerar de klassiska vändpunkterna $\pm A_n$, och vågfunktionerna sträcker sig en bit utanför dem.

---

4. Jämförelse med den klassiska oscillatorn

Amplituden. En klassisk oscillator med energin E_n har amplituden A_n, där $\frac{1}{2}k'A_n^2 = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$. Med $k' = m\omega^2$ blir

$$\boxed{A_n = \sqrt{\frac{(2n+1)\hbar}{m\omega}}}$$

Utanför vändpunkterna. I grundtillståndet ligger ungefär $16\,\%$ av sannolikheten utanför $\pm A_0$. Där kan partikeln klassiskt aldrig vara, precis som inuti en barriär vid tunnling.

Var partikeln helst är. En klassisk massa rör sig långsammast vid vändpunkterna och är därför oftast där. I kvantmekanikens grundtillstånd är det tvärtom mest sannolikt att hitta partikeln i mitten. För stora n närmar sig $|\psi_n|^2$ i medeltal den klassiska fördelningen, som korrespondensprincipen kräver.

Nollpunktsenergin. Energin kan inte vara noll. Då skulle partikeln ligga still exakt i $x = 0$, med både $\Delta x = 0$ och $\Delta p = 0$. Grundtillståndet har de minsta spridningar som Heisenbergs osäkerhetsprincip tillåter:

$$\Delta x = \frac{A_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \qquad \Delta p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$$

$$\Delta x\,\Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

Fysika: Fd3 (Heisenbergs osäkerhetsrelation, $\Delta p_x \cdot \Delta x \geq h/4\pi$; grundtillståndet ger likhet)

Härledning av Δx och Δp

Läget. Medelvärdet av x är noll av symmetriskäl, så $(\Delta x)^2$ är medelvärdet av x^2. Med $|\psi_0|^2 = C^2 e^{-\alpha x^2}$ och $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$:

$$(\Delta x)^2 = C^2 \cdot \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

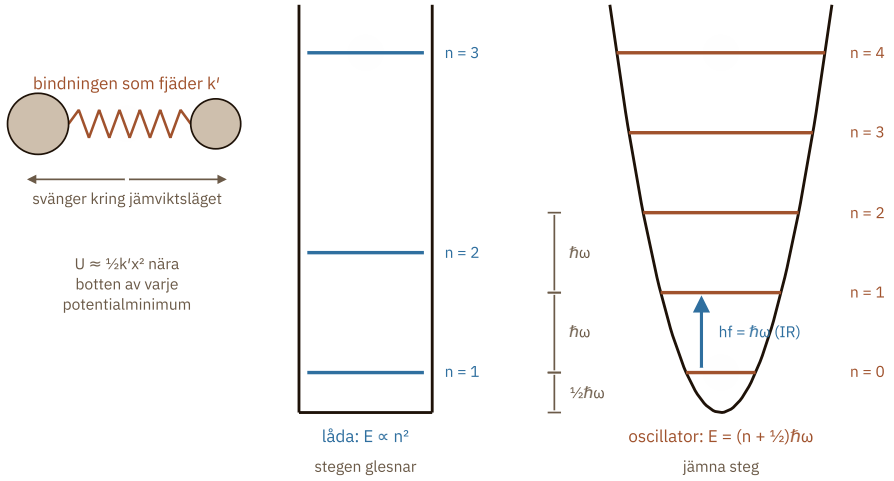
Rörelsemängden. Energin fördelar sig lika på kinetisk och potentiell i medeltal, så medelvärdet av $p^2/2m$ är $\frac{1}{2}E_0$:

$$\frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{1}{4}\hbar\omega \qquad \Longrightarrow \qquad (\Delta p)^2 = \frac{m\hbar\omega}{2}$$

Produkten.

$$\Delta x\,\Delta p = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}\cdot\frac{m\hbar\omega}{2}} = \frac{\hbar}{2}$$

Tillämpningar. Nära botten ser nästan varje potentialminimum ut som en parabel, så modellen beskriver vibrationer i molekyler och kristaller. I en tvåatomig molekyl byts m mot den reducerade massan m_r. Övergången $n \to n+1$ absorberar en foton med $hf = \hbar\omega$, oftast i infrarött.
Se Molekylvibration.



Vänster: en tvåatomig molekyl, där bindningen fungerar som en fjäder. Höger: på samma energiskala glesnar lådans nivåer som n^2, medan oscillatorns ligger på jämna steg $\hbar\omega$ ovanför nollpunktsenergin $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Varje steg uppåt kostar samma foton, oftast i infrarött.

Vanliga fel

- **n börjar på 1.** Grundtillståndet är $n = 0$ med $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Det är inte $\hbar\omega$ och inte noll.
- **ω och f blandas ihop.** Nivåavståndet är $\hbar\omega = hf$. Skriver man $h\omega$ blir det 2π gånger för stort.
- **Nivåavståndet tros växa med n.** I lådan växer E_n som n^2, men i oscillatorn är avståndet alltid $\hbar\omega$.
- **Massan i stället för den reducerade massan.** I en molekyl svänger båda atomerna, så $\omega = \sqrt{k'/m_r}$.
- **k' blandas ihop med vågtalet k.** Primtecknet skiljer fjäderkonstanten från vågtalet.

5. Lösta exempel

Exempel — Kolmonoxidens vibration

En kolmonoxidmolekyl absorberar infrarött ljus med våglängden $4{,}67\ \mu\text{m}$ när den går från vibrationens grundtillstånd till första exciterade tillståndet. Atommassorna är $12{,}000$ u för kol och $15{,}995$ u för syre. Behandla vibrationen som en harmonisk oscillator.

a) Beräkna avståndet mellan vibrationsnivåerna i eV. b) Beräkna vinkelfrekvensen och bindningens kraftkonstant. c) Beräkna nollpunktsenergin.

Lösning

a) Nivåavståndet. Fotonens energi är skillnaden mellan två grannivåer:

$$\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{4670\ \text{nm}} \approx \boxed{0{,}265\ \text{eV}}$$

b) Vinkelfrekvensen.

$$\omega = \frac{0{,}2655 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}{1{,}055 \cdot 10^{-34}} \approx \boxed{4{,}03 \cdot 10^{14}\ \text{rad/s}}$$

Fysika: Te (e, ħ)

Reducerade massan.

$$m_r = \frac{12{,}000 \cdot 15{,}995}{12{,}000 + 15{,}995}\ \text{u} = 6{,}856\ \text{u} = 1{,}14 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}$$

Kraftkonstanten. Ur $\omega = \sqrt{k'/m_r}$:

$$k' = m_r\omega^2 = 1{,}139 \cdot 10^{-26} \cdot (4{,}034 \cdot 10^{14})^2 \approx \boxed{1{,}85 \cdot 10^{3}\ \text{N/m}}$$

c) Nollpunktsenergin.

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega = \boxed{0{,}133\ \text{eV}}$$

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Elektron i en harmonisk fälla

En elektron är instängd i en potential som kan beskrivas som en harmonisk oscillator med nivåavståndet $\hbar\omega = 50{,}0$ meV.

a) Beräkna vinkelfrekvensen och våglängden hos den foton som lyfter elektronen från $n = 0$ till $n = 1$. b) Beräkna den klassiska amplituden A_0 för grundtillståndets energi. c) Beräkna Δx och Δp i grundtillståndet och visa att produkten är $\hbar/2$.

Lösning

a) Vinkelfrekvensen.

$$\omega = \frac{0{,}0500 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}{1{,}055 \cdot 10^{-34}} \approx \boxed{7{,}60 \cdot 10^{13}\ \text{rad/s}}$$

Fotonen. Dess energi är $\hbar\omega$:

$$\lambda = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{0{,}0500\ \text{eV}} = 24\,800\ \text{nm} = \boxed{24{,}8\ \mu\text{m}}$$

b) Amplituden. Med $n = 0$:

$$A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m_e \omega}} = \sqrt{\frac{1{,}055 \cdot 10^{-34}}{9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 7{,}596 \cdot 10^{13}}} \approx \boxed{1{,}23\ \text{nm}}$$

c) Spridningen i läge.

$$\Delta x = \frac{A_0}{\sqrt{2}} = \boxed{0{,}873\ \text{nm}}$$

Spridningen i rörelsemängd.

$$\Delta p = \sqrt{\frac{m_e \hbar \omega}{2}} = \sqrt{\frac{9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}0500 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}{2}} \approx \boxed{6{,}04 \cdot 10^{-26}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}$$

Produkten.

$$\Delta x\, \Delta p = 8{,}73 \cdot 10^{-10} \cdot 6{,}04 \cdot 10^{-26} = 5{,}27 \cdot 10^{-35}\ \text{J} \cdot \text{s} = \frac{\hbar}{2}$$

Grundtillståndet ligger alltså precis på gränsen i osäkerhetsprincipen.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 40.5 The Harmonic Oscillator

Schrödingerekvationen för väteatomen

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Schrödingerekvationen, Sfäriska koordinater, Bohrs modell för väteatomen

---

Med Coulombpotentialen separeras problemet i sfäriska koordinater till en produkt av tre enfunktioner. Randvillkoren är att $R(r) \to 0$ när $r \to \infty$ och att Θ och Φ är periodiska med 2π. Radialdelen ger samma energinivåer som Bohrs modell, men nu utan postulat — och de två vinkeldelarna ger ytterligare två kvanttal på köpet.

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \qquad \psi(r,\theta,\phi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)$$

Formeln, symbol för symbol

$$U(r) = \underbrace{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}}_{\text{beror bara på avståndet } r}$$

$$\psi = \underbrace{R(r)}_{\text{ger } n \text{ och energin}}\ \underbrace{\Theta(\theta)}_{\text{ger } l \text{ och formen}}\ \underbrace{\Phi(\phi)}_{\text{ger } m_l \text{ och orienteringen}}$$

Eftersom potentialen bara beror på avståndet går vågfunktionen att dela upp i en faktor per koordinat. Varje faktor får ett eget randvillkor, och varje randvillkor ger ett eget kvanttal.

---

1. Schrödingerekvationen i tre dimensioner

I tre dimensioner ersätts andraderivatan av summan av de tre partiella andraderivatorna:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+U\psi = E\psi$$

$|\psi|^2\,dV$ är sannolikheten att hitta partikeln i volymelementet dV, och normeringen blir

$$\int |\psi|^2\,dV = 1$$

Coulombpotentialen beror bara på avståndet r till kärnan, så det lönar sig att byta till Sfäriska koordinater. Fysiken använder θ för vinkeln från z-axeln och ϕ för vinkeln runt z-axeln. I matematikkursen är namnen ofta ombytta.

---

2. Separation av variabler

Sätt in produkten $\psi = R\Theta\Phi$ från ingressen. Varje term kan då ordnas så att den beror på en enda variabel, och ekvationen delas upp i tre vanliga differentialekvationer. Separationskonstanterna skrivs m_l^2 och $l(l+1)$.

Azimutdelen.

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m_l^2\,\Phi$$

Polardelen.

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m_l^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0$$

Radialdelen.

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(\frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_r r^2} + U(r)\right)R = ER$$

Här är m_r den reducerade massan, se avsnitt 3. Termen $l(l+1)\hbar^2/2m_r r^2$ är rotationsenergin $L^2/2m_r r^2$ med $L^2 = l(l+1)\hbar^2$. Den verkar som en extra potential som håller elektronen borta från kärnan när $l > 0$.

Hur randvillkoren ger heltal

Azimutdelen. Lösningen är

$$\Phi(\phi) = e^{im_l\phi}$$

Vinkeln $\phi + 2\pi$ är samma punkt som ϕ, så $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$:

$$e^{im_l 2\pi} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Polardelen. Lösningarna är ändliga i både $\theta = 0$ och $\theta = \pi$ bara om l är ett heltal med $l \geq |m_l|$.

Radialdelen. $R(r) \to 0$ när $r \to \infty$ bara för vissa energier. De kan numreras med ett heltal $n > l$, och energin beror bara på n.

Tre randvillkor ger alltså tre kvanttal, utan att något behöver postuleras.

---

3. Energinivåerna

Radialekvationen ger precis samma energinivåer som Bohrs modell för väteatomen, $E_n = -13{,}60\ \text{eV}/n^2$. Två saker skiljer:

- **Inget postulat.** Bohr fick kvantiseringen genom att anta $L = n\hbar$. Här följer den ur randvillkoren. Grundtillståndet har dessutom $L = 0$, vilket Bohrs modell inte tillåter.
- **Reducerad massa.** Kärnan är inte oändligt tung, så elektronens massa ersätts med den reducerade massan m_r. Det ändrar energierna med ungefär $0{,}05\ \%$.

Energin beror bara på n, inte på l eller m_l. Varje nivå rymmer därför flera tillstånd med samma energi, n^2 stycken om spinnet inte räknas (se Kvanttal). Med Elektronspin blir det $2n^2$.

---

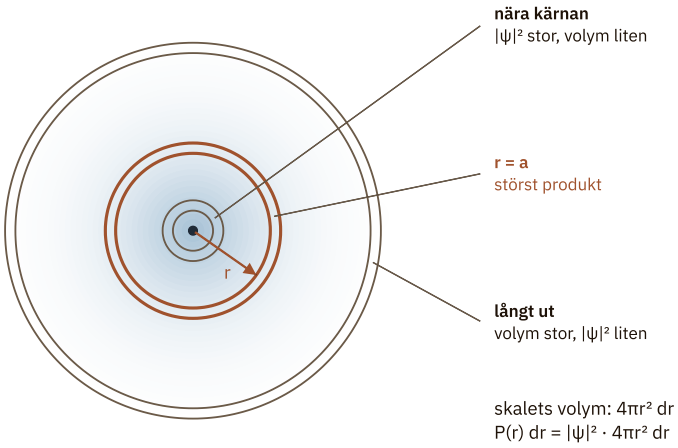
4. Var elektronen finns

Grundtillståndet, 1s, är sfäriskt symmetriskt:

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\, e^{-r/a}$$

där $a = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m är Bohrradien. $|\psi_{1s}|^2$ är störst i kärnan, men volymen där är liten. Sannolikheten att hitta elektronen mellan r och $r + dr$ får man genom att multiplicera med ett tunt sfäriskt skals volym, $4\pi r^2\, dr$:

$$\boxed{P(r)\, dr = 4\pi r^2\, |\psi|^2\, dr}$$



Varför $P(r)$ har ett maximum. Sannolikheten att hitta elektronen i ett tunt skal är $|\psi|^2$ gånger skalets volym $4\pi r^2\,dr$. Nära kärnan är $|\psi|^2$ störst men skalet litet, och långt ut är skalet stort men $|\psi|^2$ nästan noll. För 1s blir produkten störst vid Bohrradien a.

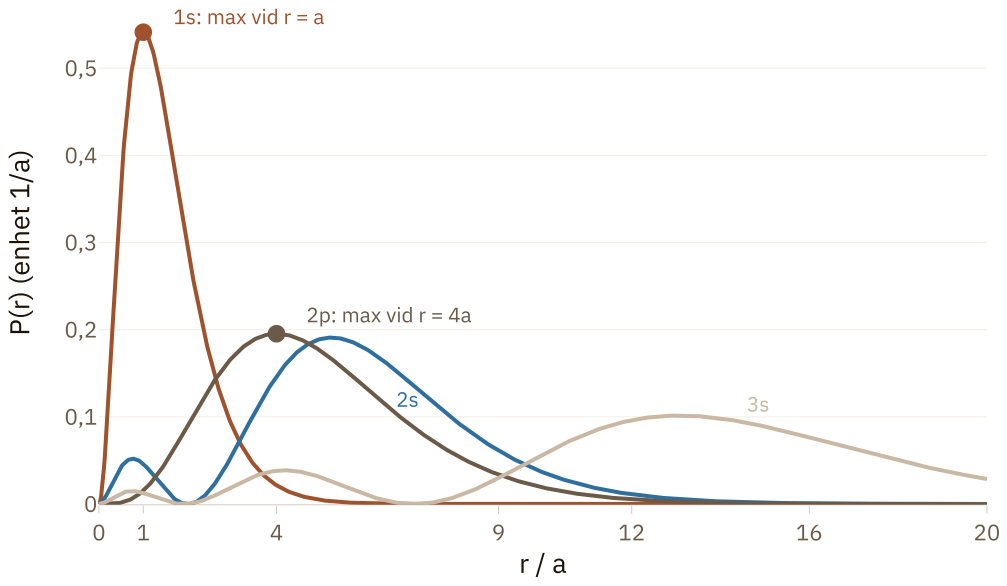
För ett tillstånd som inte är sfäriskt symmetriskt integrerar man först bort vinklarna, och då blir $P(r) = r^2 R_{nl}^2$.

Mest sannolika avståndet. För 1s är

$$P(r) = \frac{4r^2}{a^3} e^{-2r/a}$$

Derivatan är noll när $2r - 2r^2/a = 0$, alltså vid $r = a$. Det mest sannolika avståndet är Bohrradien, men elektronen har ingen bestämd bana. Medelavståndet är $1{,}5a$.

För tillstånden med $l = n - 1$ (1s, 2p, 3d, …) har $P(r)$ en enda topp vid $r = n^2 a$, samma radier som i Bohrs modell. Tillstånd med lägre l har radiella noder, sfärer där $P(r) = 0$.



Radiell sannolikhetstäthet för fyra tillstånd i väte. 1s och 2p har en enda topp, vid a och $4a$. 2s har en nod vid $2a$, och 3s har två noder.

Vanliga fel

- $|\psi|^2$ **tas för** $P(r)$**.** $|\psi_{1s}|^2$ är störst i $r = 0$, men $P(r)$ är noll där. Faktorn $4\pi r^2$ glöms lätt.
- **Massan** m **och kvanttalet** m_l **blandas ihop.** Massan i radialekvationen har inget med magnetiska kvanttalet att göra.
- **Energin tros bero på** l**.** I väte beror E_n bara på n, så 2s och 2p har samma energi. I atomer med flera elektroner gäller det inte längre.
- **Vinkelnamnen byts.** Här är θ polvinkeln och ϕ azimutvinkeln.
- $n = 0$**.** Huvudkvanttalet börjar på 1.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Långt ut och nära kärnan i grundtillståndet

En väteatom är i grundtillståndet 1s.

a) Beräkna sannolikheten att elektronen befinner sig längre än $2a$ från kärnan. b) Beräkna sannolikheten att den befinner sig närmare kärnan än a. c) Vilket är det mest sannolika avståndet, i meter?

Lösning

Radiell täthet.

$$P(r) = 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a} = \frac{4r^2}{a^3} e^{-2r/a}$$

Byt variabel. Sätt $u = 2r/a$, så att $r = au/2$ och $dr = a\,du/2$:

$$P(r)\,dr = \frac{4}{a^3} \cdot \frac{a^2 u^2}{4} \cdot e^{-u} \cdot \frac{a}{2}\,du = \frac{1}{2} u^2 e^{-u}\,du$$

Med partialintegration är en primitiv funktion till $u^2 e^{-u}$

$$-(u^2+2u+2)\,e^{-u}$$

a) Utanför $2a$. Gränsen $r = 2a$ motsvarar $u = 4$:

$$P(r > 2a) = \frac{1}{2}(16+8+2)\,e^{-4} = 13e^{-4} \approx \boxed{0{,}238}$$

b) Innanför a. Gränsen $r = a$ motsvarar $u = 2$:

$$P(r < a) = \frac{1}{2}(2-(4+4+2)\,e^{-2}) = 1-5e^{-2} \approx \boxed{0{,}323}$$

Elektronen är alltså oftare utanför Bohrradien än innanför.

c) Mest sannolikt avstånd. $dP/dr = 0$ ger $r = a$:

$$r_{\max} = a = \boxed{5{,}29 \cdot 10^{-11}\ \text{m}}$$

Fysika: Te (a_0)

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 41.1 The Schrödinger Equation in Three Dimensions
- 41.3 The Hydrogen Atom

Kvanttal

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Schrödingerekvationen för väteatomen

---

Tre kvanttal faller ut ur väteatomens vågfunktion utan att postuleras. Huvudkvanttalet n kommer ur $R(r)$, bestämmer energin och numrerar skalen K, L, M, N och så vidare. Det azimutala kvanttalet l kommer ur $\Theta(\theta)$ och kvantiserar rörelsemängdsmomentets storlek; det löper från 0 till $n-1$, och att $l=0$ ger $L=0$ skiljer sig från Bohrs modell. Det magnetiska kvanttalet m_l kommer ur $\Phi(\phi)$ och kvantiserar z-komponenten från $-l$ till l, vilket innebär att L_z alltid är mindre än L utom när båda är noll.

$$\boxed{L=\sqrt{l(l+1)}\,\hbar \qquad L_z=m_l\hbar}$$

Fysika: Fd3 (kvanttal: de tillåtna värdena på n, l och m)

Formeln, symbol för symbol

$$L=\sqrt{\underbrace{l(l+1)}_{\substack{l=0,1,\ldots,\\ n-1}}}\,\hbar$$

$$L_z=\underbrace{m_l}_{\substack{-l,\ldots,0,\\ \ldots,+l}}\,\hbar$$

Storleken och z-komponenten kvantiseras var för sig. Eftersom $\sqrt{l(l+1)} > l \geq |m_l|$ är vektorn alltid längre än sin projektion på z-axeln, så den kan aldrig peka rakt längs axeln.

---

1. Tre kvanttal ur tre ekvationer

Varje del av vågfunktionen $\psi = R\Theta\Phi$ i Schrödingerekvationen för väteatomen har ett eget randvillkor, och varje randvillkor ger ett heltal.

Kvanttal	Kommer ur	Tillåtna värden	Bestämmer
n, huvudkvanttalet	$R(r)$	$1, 2, 3, \ldots$	energin E_n och storleken
l, azimutala kvanttalet	$\Theta(\theta)$	$0, 1, \ldots, n-1$	$L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar$ och formen
m_l, magnetiska kvanttalet	$\Phi(\phi)$	$-l, \ldots, 0, \ldots, l$	$L_z = m_l\hbar$ och orienteringen

Magnetiska kvanttalet har fått sitt namn av att tillstånd med olika m_l får olika energi i ett yttre magnetfält längs z. Utan fält har de samma energi.

Tillstånd med samma n bildar ett **skal**: K ($n=1$), L ($n=2$), M ($n=3$), N ($n=4$). Tillstånd med samma n och l bildar ett **underskal**, som betecknas med en bokstav: s ($l=0$), p ($l=1$), d ($l=2$), f ($l=3$). Se Atomorbitaler.

---

2. Antalet tillstånd

För ett givet l kan m_l anta $2l+1$ värden. Summera över alla tillåtna l i skalet n:

$$\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = 2\cdot\frac{(n-1)n}{2} + n$$

Varje skal innehåller alltså

$$\boxed{N_n = n^2}$$

olika kombinationer av (n, l, m_l), och i väte har de alla samma energi. Med spinnet fördubblas antalet till $2n^2$, och det är grunden för periodiska systemet via Pauli uteslutningsprincip.

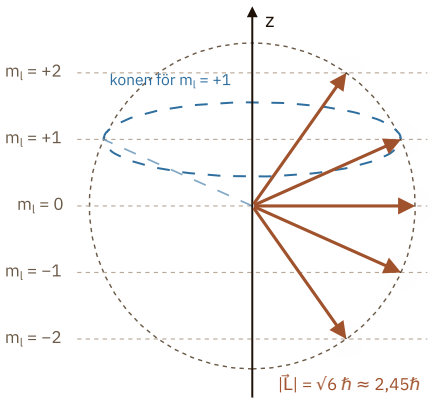
---

3. Vektormodellen

Rörelsemängdsmomentet har längden $\sqrt{l(l+1)}\,\hbar$ men z-komponenten $m_l\hbar$. Vinkeln θ_L mellan $\vec{L}$ och z-axeln ges av

$$\boxed{\cos\theta_L = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}}$$

Eftersom $|m_l| \le l < \sqrt{l(l+1)}$ blir θ_L aldrig noll, utom i det triviala fallet $l=0$ där $\vec{L}=\vec{0}$. $\vec{L}$ kan alltså aldrig peka exakt längs z-axeln. Om den gjorde det skulle $L_x = L_y = 0$ vara exakt kända samtidigt som L_z, och det förbjuds av osäkerhetsrelationen för rörelsemängdsmomentets komponenter. Bara L_z är skarp. $\vec{L}$ ligger någonstans på en kon runt z-axeln, och L_x och L_y är obestämda.



l = 2: fem tillåtna $L_z = m_l\hbar$

$\vec{L}$ är längre än varje L_z, så den kan aldrig peka rakt längs z

$\vec{L}$ ligger någonstans på en kon; L_x och L_y är obestämda

$\cos\theta_L = m_l/\sqrt{(l(l+1))}$

$m_l = +2$ ger $\theta_L = 35{,}3°$, inte 0°

Vektormodellen för $l = 2$. $\vec{L}$ har alltid längden $\sqrt{6}\,\hbar$, men bara fem z-komponenter är tillåtna, $L_z = -2\hbar, \ldots, 2\hbar$. För varje m_l ligger $\vec{L}$ någonstans på en kon kring z-axeln (streckad för $m_l = +1$), aldrig längs själva axeln.

Riktningen på z-axeln är godtycklig tills något utifrån väljer den, till exempel ett magnetfält.

⚠ Vanliga fel

- **l upp till n.** l går bara till $n - 1$, så det finns ingen 1p eller 2d.
- **$L = l\hbar$.** Storleken är $\sqrt{l(l+1)}\,\hbar$, som alltid är större än det största $L_z = l\hbar$.
- **m_l upp till $\pm n$.** m_l begränsas av l, inte av n.
- **De negativa L_z glöms.** m_l går från $-l$ till $+l$, totalt $2l + 1$ värden.
- **Spinnet räknas in i n^2.** n^2 räknar kombinationer av (n, l, m_l). Med spinn blir det $2n^2$.

---

4. Lösta exempel

Exempel — Vinklarna för $l = 3$

En elektron i en väteatom har rörelsemängdsmomentet $L = \sqrt{12}\,\hbar$.

a) Vilket är l, och vilket är det minsta möjliga n? b) Vilka värden kan L_z anta? c) Beräkna vinkeln mellan $\vec{L}$ och z-axeln för $m_l = 3, 2, 1$ och 0. d) Hur många olika kombinationer av (n, l, m_l) finns det för det n du fick i a)?

Lösning

a) Kvanttalen. $l(l+1) = 12$ ger $\boxed{l = 3}$. Eftersom $l \le n - 1$ måste $n \ge 4$, så det minsta är $\boxed{n = 4}$.

b) Komponenterna. $m_l = -3, -2, \ldots, 3$ ger sju värden:

$$\boxed{L_z = -3\hbar,\ -2\hbar,\ -\hbar,\ 0,\ \hbar,\ 2\hbar,\ 3\hbar}$$

c) Vinklarna. Med $\cos\theta_L = m_l/\sqrt{12}$:

$$m_l = 3: \quad \theta_L = \arccos\frac{3}{\sqrt{12}} = \boxed{30{,}0^\circ}$$

$$m_l = 2: \quad \theta_L = \arccos\frac{2}{\sqrt{12}} = \boxed{54{,}7^\circ}$$

$$m_l = 1: \quad \theta_L = \arccos\frac{1}{\sqrt{12}} = \boxed{73{,}2^\circ}$$

$$m_l = 0: \quad \theta_L = \boxed{90{,}0^\circ}$$

De negativa m_l ger supplementvinklarna $106{,}8^\circ$, $125{,}3^\circ$ och $150{,}0^\circ$. Inte ens $m_l = 3$ ger en vektor längs z-axeln.

d) Antalet. $N_4 = 4^2 = \boxed{16}$, nämligen $1 + 3 + 5 + 7$ för $l = 0, 1, 2, 3$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 41.3 The Hydrogen Atom

Atomorbitaler

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Kvanttal

Varje tillåten kombination av kvanttal svarar mot en orbital med egen rumslig form, och orbitalerna namnges efter l: s för $l = 0$, p för $l = 1$, d för $l = 2$ och f för $l = 3$. De tre p-orbitalerna p_x, p_y och p_z motsvarar de tre värdena på m_l, och de fem d-orbitalerna de fem. Formerna är det som bestämmer bindningsriktningarna i molekyler.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{n - l - 1}_{\text{radiella noder (sfärer)}} + \underbrace{l}_{\text{vinkelnoder (plan, koner)}} = \underbrace{n - 1}_{\text{noder totalt}}$$

Huvudkvanttalet bestämmer hur många noder orbitalen har, och l bestämmer hur de fördelas: ju större l, desto fler av noderna är plan eller koner genom kärnan och desto färre är sfärer runt den.

1. Beteckningar

Ett tillstånd skrivs som huvudkvanttalet följt av bokstaven för l: 1s, 2s, 2p, 3d. Bokstäverna s, p, d och f kommer från hur spektrallinjerna beskrevs innan teorin fanns. Eftersom $l \leq n - 1$ ger varje skal bara vissa underskal:

Skal	n	Underskal	Orbitaler
K	1	1s	1
L	2	2s, 2p	$1 + 3 = 4$
M	3	3s, 3p, 3d	$1 + 3 + 5 = 9$
N	4	4s, 4p, 4d, 4f	$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

En **orbital** är den rumsliga vågfunktionen ψ_{nlm_l}, eller i bilder det område där $|\psi|^2$ är stort. Det är ingen bana. Elektronen har ingen bestämd väg, bara en sannolikhetsfördelning.

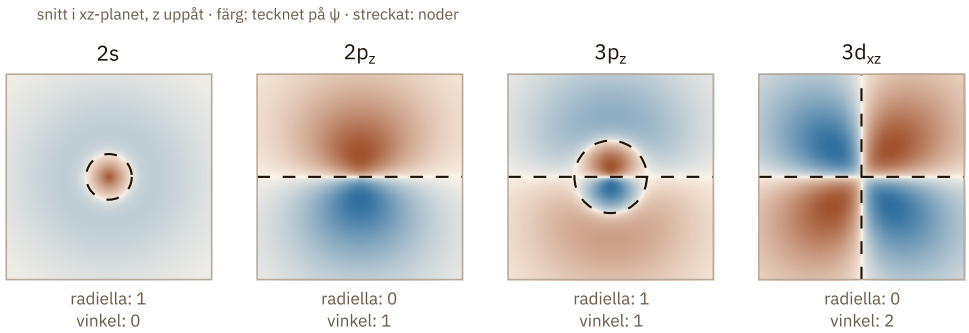
---

2. Noder

En nod är en yta där $\psi = 0$. Radialdelen och vinkeldelen ger var sin sorts nod:

- **Radiella noder:** $n - l - 1$ sfärer där $R(r) = 0$.
- **Vinkelnoder:** l plan eller koner där vinkeldelen är noll.

Sammanlagt har en orbital $n - 1$ noder. En 1s-orbital har inga, 2s har en radiell nod, och 2p har en vinkelnod men ingen radiell.



Snitt genom fyra orbitaler i xz-planet, färgade efter tecknet på ψ. Radiella noder syns som streckade cirklar och vinkelnoder som streckade linjer: 2s och 3p har en radiell nod, 2p och 3p ett nodplan, och $3d_{xz}$ två nodplan men ingen radiell nod.

Två symmetrier följer direkt ur vågfunktionen i Schrödingerekvationen för väteatomen:

- **s-orbitaler** ($l = 0$) har ingen vinkelberoende del. $|\psi|^2$ beror bara på r och är sfäriskt symmetrisk.
- **Alla orbitaler** har $|\psi|^2$ oberoende av ϕ, eftersom $|e^{im_l\phi}|^2 = 1$. Tätheten är rotationssymmetrisk kring z-axeln.

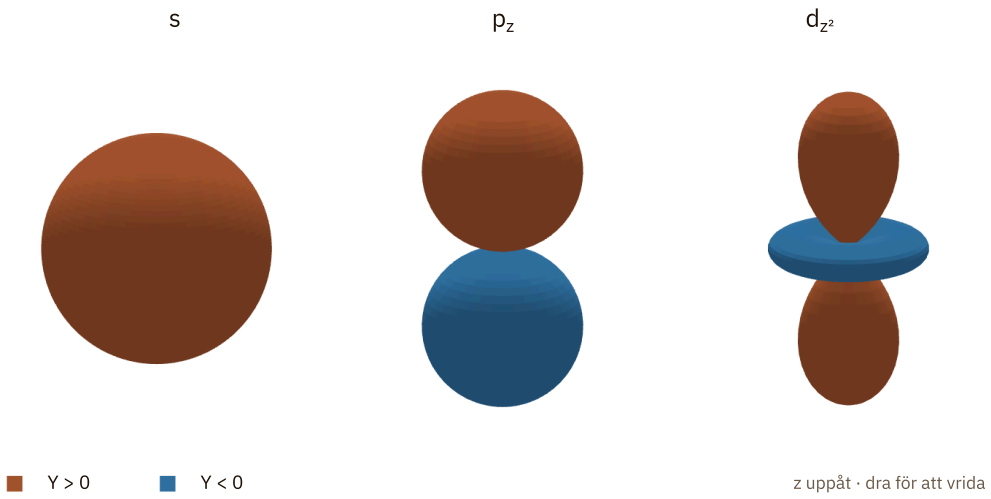
---

3. Formerna

- **s:** sfärer. 2s och 3s har inre skal som skiljs från det yttre av radiella noder, se figuren i Schrödingerekvationen för väteatomen.
- p_z ($m_l = 0$): vinkeldelen är proportionell mot $\cos\theta$. Det ger två lober längs z-axeln med xy-planet som nodplan.
- $m_l = \pm 1$**:** vinkeldelen är proportionell mot $\sin\theta$, och $|\psi|^2$ bildar en ring kring z-axeln.

- p_x **och** p_y**:** summan och skillnaden av tillstånden med $m_l = +1$ och $m_l = -1$. De är proportionella mot $\sin\theta\cos\phi = x/r$ respektive $\sin\theta\sin\phi = y/r$ och har lober längs x- och y-axeln. Eftersom de två tillstånden har samma energi är också kombinationerna tillåtna tillstånd, men de har inget bestämt L_z.
- **d:** fem orbitaler, fyra med fyra lober och en (d_{z^2}) med två lober längs z och en ring runt midjan.

Sambandet mellan p_x, p_y, p_z och de tre värdena på m_l går alltså via linjärkombinationer. Kemin använder de reella orbitalerna, eftersom deras lober pekar i bestämda riktningar. Riktningarna förklarar bindningsvinklarna, se Kovalent bindning.



Vinkelformen $|Y_{lm}(\theta,\phi)|$ för s, p_z och d_{z^2}, färgad efter vinkeldelens tecken. Avståndet från origo i varje riktning är vinkeldelens belopp. p_z har xy-planet som nodplan, och d_{z^2} har två nodkoner mellan loberna och ringen. Dra i figuren för att vrida den.

⚠ Vanliga fel

- **Orbitalen tas för en bana.** En orbital beskriver var elektronen sannolikt finns. Den har ingen rörelse längs en kurva.
- p_x **tas för** $m_l = +1$**.** p_x och p_y är kombinationer av $m_l = +1$ och $m_l = -1$. Bara p_z har ett bestämt m_l, nämligen 0.
- **Noderna räknas fel.** Det finns $n - l - 1$ radiella noder och l vinkelnoder. 2p har ingen radiell nod.
- **Formen tros bero på** n**.** Vinkelformen bestäms av l och m_l. n bestämmer storleken och antalet radiella noder.

4. Lösta exempel

Exempel — Noder i 2s, 3p och 3d

a) Hur många radiella noder och hur många vinkelnoder har en 3p-orbital och en 3d-orbital? b) Radialfunktionen för 2s i väte är proportionell mot $(2 - \frac{r}{a})\, e^{-r/2a}$. På vilket avstånd från kärnan ligger den radiella noden? c) Varför beror sannolikhetstätheten för ett tillstånd med $m_l = 1$ inte på ϕ?

Lösning

a) 3p. $n = 3$ och $l = 1$ ger $n - l - 1 = \boxed{1}$ radiell nod och $l = \boxed{1}$ vinkelnod.

3d. $n = 3$ och $l = 2$ ger $n - l - 1 = \boxed{0}$ radiella noder och $l = \boxed{2}$ vinkelnoder.

I båda fallen blir summan $n - 1 = 2$.

b) Noden. Exponentialfaktorn blir aldrig noll, så noden ligger där parentesen är noll:

$$2 - \frac{r}{a} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r = 2a = 2 \cdot 5{,}29 \cdot 10^{-11}\ \text{m} = \boxed{1{,}06 \cdot 10^{-10}\ \text{m}}$$

Fysika: Te (a_0)

c) Symmetrin. ϕ finns bara i faktorn $e^{i\phi}$, och

$$\left|e^{i\phi}\right|^2 = e^{i\phi}e^{-i\phi} = 1$$

Tätheten är därför densamma i alla riktningar runt z-axeln. Det gäller för varje m_l, inte bara för $m_l = 1$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 41.3 The Hydrogen Atom

Elektronspin

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Kvanttal

Elektronen har ett rörelsemängdsmoment och ett magnetiskt moment som inte beror på dess rörelse i orbitalen utan är en inneboende egenskap. Goudsmit och Uhlenbeck postulerade det år 1925 med den klassiska analogin att elektronen roterar kring sin egen axel; bilden är felaktig men namnet sitter kvar. Spinkvanttalet är alltid $s = \frac{1}{2}$, och z-komponenten har bara två möjliga värden, kallade spin upp och spin ner. Dirac visade år 1928 att spinnet följer ur den relativistiska Schrödingerekvationen — ursprunget är alltså fundamentalt kvantmekaniskt.

$$\boxed{s = \frac{1}{2} \qquad m_s = \pm\frac{1}{2}}$$

Fysika: Fd3 (spinnkvanttal, där skrivet $s = \pm\frac{1}{2}$*)*

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{S_z}_{\substack{\text{komponenten}\\ \text{längs } z}} = \underbrace{m_s}_{\pm\frac{1}{2}}\hbar$$

$$\underbrace{U}_{\substack{\text{energin}\\ \text{i fältet}}} = \underbrace{g}_{\approx 2}\, m_s\, \underbrace{\mu_B}_{\substack{\text{Bohr-}\\ \text{magnetonen}}}\, B$$

Spinnet har bara två lägen längs en vald axel. Eftersom $g \approx 2$ ger det halva kvanttalet $m_s = \pm\frac{1}{2}$ ändå en hel Bohrmagneton i energi, $U \approx \pm\mu_B B$.

1. Spinnets rörelsemängdsmoment

Spinnet kvantiseras på samma sätt som banrörelsemängdsmomentet i Kvanttal, men med kvanttalet $s = \frac{1}{2}$ i stället för ett heltal l. En mätning av komponenten längs en axel, som vi kallar z, ger bara två värden:

$$S_z = m_s\hbar = \pm\frac{\hbar}{2}$$

Beloppet följer samma mönster som $L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar$, med l utbytt mot s:

$$S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}\,\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hbar$$

$$\boxed{S_z = m_s\hbar \qquad S = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hbar \approx 0{,}866\,\hbar}$$

Eftersom $S > |S_z|$ pekar spinnet aldrig rakt längs z-axeln; vektorn ligger på en kon kring axeln. Med spinnet räknat behövs fyra kvanttal (n, l, m_l, m_s) för att beskriva elektronens tillstånd i en atom fullständigt, vilket är utgångspunkten för Paulis uteslutningsprincip.

---

2. Spinnets magnetiska moment

Banrörelsen ger ett magnetiskt moment $\mu_z = -(e/2m)L_z$ (se Zeemaneffekten). Spinnet ger också ett, men proportionalitetskonstanten är ungefär dubbelt så stor:

$$\mu_z = -g\,\frac{e}{2m}\,S_z \qquad g \approx 2{,}00232$$

Minustecknet kommer av elektronens negativa laddning: momentet pekar motsatt spinnet. Dirac fick $g = 2$ exakt ur sin relativistiska teori, och kvantelektrodynamiken ger den lilla korrektionen. I ett yttre fält B längs z är energin

$$U = -\mu_z B$$

$$U = g\,\frac{e}{2m}\,S_z B = g\,\frac{e}{2m}\,m_s\hbar\,B$$

och med Bohrmagnetonen $\mu_B = e\hbar/2m = 5{,}788\cdot 10^{-5}$ eV/T:

$$\boxed{U = g\,m_s\,\mu_B B \approx \pm\mu_B B}$$

Spin upp ($m_s = +\tfrac{1}{2}$) har alltså momentet riktat mot fältet och den *högre* energin. Skillnaden mellan de två spinnlägena är

$$\Delta E = g\mu_B B$$

En foton med just den energin kan vända spinnet. Det är principen bakom elektronspinnresonans, som för fält kring $0{,}3$ T hamnar i mikrovågsområdet.

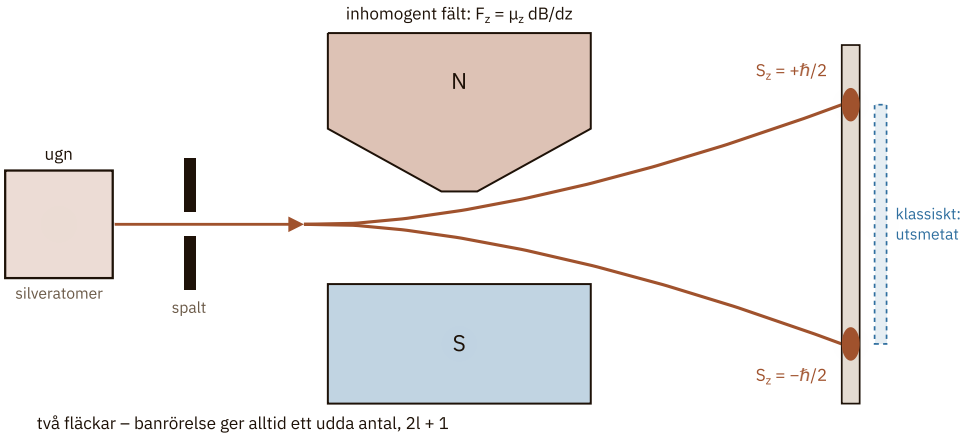
---

3. Stern–Gerlachs experiment

Ett inhomogent magnetfält ger en nettokraft på ett magnetiskt moment, $F_z = \mu_z \, dB/dz$. Stern och Gerlach skickade år 1922 en stråle neutrala atomer genom ett sådant fält och fick strålen uppdelad efter momentets komponent längs fältet.

- **Bara banrörelse.** Ett rörelsemängdsmoment med kvanttal l har $2l + 1$ komponenter, alltså ett *udda* antal strålar.
- **Vad man såg.** Vissa atomstrålar, till exempel silver med en ensam elektron utanför fyllda skal och $l = 0$, delades i *två* strålar.

Ett jämnt antal $2j + 1 = 2$ kräver $j = \frac{1}{2}$, ett halvtaligt rörelsemängdsmoment som ingen banrörelse kan ge. Det var ett av de experimentella skälen till att spinnet infördes.



Stern–Gerlachs försök. En stråle silveratomer passerar ett inhomogent magnetfält, där kraften $F_z = \mu_z \, dB/dz$ beror på momentets komponent längs fältet. Om momentet kunde peka åt alla håll skulle strålen smetas ut till ett streck; i stället träffar den skärmen på två ställen, ett för varje värde på S_z.

⚠ Vanliga fel

- $S = \hbar/2$**.** Det är komponenten S_z. Beloppet är $S = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$.
- s **och** m_s **blandas ihop.** $s = \frac{1}{2}$ gäller alltid för en elektron. Det är m_s som är $\pm\frac{1}{2}$.
- **Faktorn** g **glöms.** Trots att S_z bara är $\hbar/2$ blir spinnmomentets komponent ungefär en hel Bohrmagneton, $\frac{g}{2}\mu_B \approx \mu_B$, eftersom $g \approx 2$.
- **Fel tecken på energin.** Elektronens moment är motriktat spinnet. Spin upp i ett fält längs $+z$ har därför den högre energin, $U = +\frac{g}{2}\mu_B B$.
- **Den snurrande kulan tas bokstavligt.** Spinnet är en inneboende kvantegenskap. En klassisk kula med elektronens moment skulle behöva en ythastighet långt över ljusets.

4. Lösta exempel

Exempel — Spinnets belopp och vinkel

Beräkna beloppet av elektronens spinrörelsemängdsmoment S och den minsta vinkel som $\vec{S}$ kan bilda med z-axeln.

Lösning

Beloppet. Med $s = \frac{1}{2}$:

$$S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1{,}055 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} = \boxed{9{,}13 \cdot 10^{-35}\ \text{J} \cdot \text{s}}$$

Fysika: Te (ħ)

Vinkeln. Den minsta vinkeln fås när S_z är så stor som möjligt, $S_z = +\hbar/2$:

$$\cos\theta = \frac{S_z}{S} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$$

$$\theta = \boxed{54{,}7^\circ}$$

Spinnet kan alltså aldrig ligga närmare z-axeln än drygt 50°.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Att vända spinnet

En fri elektron ($l = 0$) befinner sig i ett magnetfält $B = 0{,}350$ T. Vilken energi krävs för att vända spinnet från det lägre till det högre energitillståndet, och vilken frekvens har en foton med den energin? Använd $g = 2{,}00232$.

Lösning

Energiskillnaden. De två lägena har $U = \pm\frac{g}{2}\mu_B B$, så

$$\Delta E = g\mu_B B = 2{,}00232 \cdot 5{,}788 \cdot 10^{-5}\ \text{eV/T} \cdot 0{,}350\ \text{T} = \boxed{4{,}06 \cdot 10^{-5}\ \text{eV}}$$

Frekvensen. $\Delta E = hf$ ger

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{4{,}06 \cdot 10^{-5}\ \text{eV}}{4{,}136 \cdot 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}} = \boxed{9{,}81\ \text{GHz}}$$

Våglängden är ungefär 3 cm, alltså mikrovågor.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 41.5 Electron Spin

Paulis uteslutningsprincip

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #princip

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Elektronspin, Kvanttal

Inga två elektroner i samma system kan ha samma uppsättning kvanttal (n, l, m_l, m_s). Principen är det som tvingar elektroner att fylla allt högre orbitaler i stället för att samlas i det lägsta tillståndet, och därmed det som ger atomerna deras skalstruktur.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{N_l}_{\substack{\text{platser i}\\ \text{underskalet}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{spinn}\\ \text{upp, ner}}} \cdot \underbrace{(2l+1)}_{\substack{\text{värden}\\ \text{på } m_l}}$$

$$\underbrace{N_n}_{\substack{\text{platser}\\ \text{i skalet}}} = \underbrace{2}_{\text{spinn}} \cdot \underbrace{n^2}_{\substack{\text{orbitaler}\\ (l,\, m_l)}}$$

Varje orbital (n, l, m_l) är en ruta med plats för två elektroner, en med spinn upp och en med spinn ner. Att räkna platser är att räkna rutor och dubbla.

---

1. Principen

En elektrons tillstånd i en atom anges av fyra kvanttal: n, l och m_l för rörelsen kring kärnan och m_s för spinnet (se Elektronspin). Paulis uteslutningsprincip säger att två elektroner aldrig kan dela alla fyra. Två elektroner kan alltså dela orbital (n, l, m_l) bara om de har motsatt spinn.

Principen gäller alla partiklar med halvtaligt spinn — elektroner, protoner och neutroner — men inte fotoner. Kvantmekaniskt kommer den av att vågfunktionen för två identiska elektroner måste byta tecken när partiklarna byter plats. Sätts båda i samma tillstånd blir vågfunktionen noll, se Kvantintrassling.

---

2. Att räkna tillstånd

Principen gör det enkelt att räkna hur många elektroner ett underskal eller ett skal rymmer. För givet l finns $2l + 1$ värden på m_l, och för vart och ett två värden på m_s:

$$N_l = 2(2l + 1)$$

Ett skal med huvudkvanttal n innehåller underskalen $l = 0, 1, \ldots, n - 1$:

$$N_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 4 \sum_{l=0}^{n-1} l + 2n$$

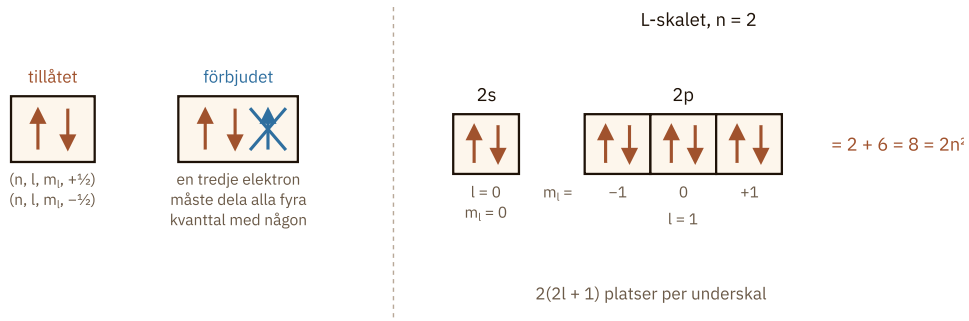
$$N_n = 4 \cdot \frac{(n - 1)n}{2} + 2n = 2n^2$$

$$\boxed{N_l = 2(2l + 1) \qquad N_n = 2n^2}$$

Fysika: Fd3 (Pauliprincipen och kvanttalen, som antalen bygger på)

Underskal	**s**	**p**	**d**	**f**
l	0	1	2	3
platser $2(2l + 1)$	2	6	10	14

Skal	**K**	**L**	**M**	**N**
n	1	2	3	4
platser $2n^2$	2	8	18	32



Vänster: en orbital rymmer två elektroner med motsatt spinn, och en tredje skulle få samma fyra kvanttal som en av dem. Höger: L-skalet har en 2s-orbital och tre 2p-orbitaler, alltså $2 + 6 = 8 = 2n^2$ platser.

3. Pauli är ingen kraft

Utan principen skulle alla elektroner i en atom falla ner i $1s$, och atomer med många elektroner skulle bli mindre och mindre med växande Z. Så ser det inte ut: atomer har ungefär samma storlek genom hela periodiska systemet, och den kemiska skillnaden mellan grannelement är stor. Orsaken är inte den elektriska repulsionen mellan elektronerna — den finns också, men den kan inte hindra två elektroner från att hamna i samma tillstånd. Det är uteslutningsprincipen som tvingar varje ny elektron upp i nästa lediga tillstånd och därmed ger skalstrukturen.

Samma princip styr elektronerna i en metall, där den leder till Fermi-Dirac-fördelningen.

⚠ Vanliga fel

- n^2 **i stället för** $2n^2$**.** n^2 är antalet orbitaler (l, m_l) i skalet. Spinnet dubblar antalet platser.
- **"Två elektroner per orbital" missförstås.** Det gäller per trippel (n, l, m_l), inte per underskal. Ett p-underskal rymmer sex, inte två.
- l **får gå upp till** n**.** Det största värdet är $l = n - 1$, så skalet $n = 2$ har bara s och p.
- **Principen används på fotoner.** Fotoner har heltaligt spinn och kan gärna vara många i samma tillstånd; det är det en Laser utnyttjar.

---

4. Lösta exempel

Exempel — Hur många elektroner får plats?

Hur många elektroner i en atom kan ha (a) $n = 4$, (b) $n = 4$ och $l = 2$, (c) $n = 3$ och $m_l = +1$?

Lösning

a) Hela skalet $n = 4$:

$$N = 2n^2 = 2 \cdot 4^2 = \boxed{32}$$

b) Ett d-underskal, oberoende av n:

$$N = 2(2l + 1) = 2 \cdot 5 = \boxed{10}$$

c) $m_l = +1$ kräver $l \geq 1$. För $n = 3$ ger det $l = 1$ eller $l = 2$, alltså två orbitaler $(3, 1, +1)$ och $(3, 2, +1)$. Var och en rymmer två spinnlägen:

$$N = 2 \cdot 2 = \boxed{4}$$

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 41.6 Many-Electron Atoms and the Exclusion Principle

Elektronkonfiguration

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Paulis uteslutningsprincip, Atomorbitaler

---

Orbitalerna fylls nerifrån och upp enligt Pauliprincipen, vilket ger varje grundämne en bestämd konfiguration — natrium $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$, aluminium $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$. Nivåer med samma n och l men olika m_l har samma energi så länge sfärens symmetri är obruten; de kallas degenererade. Det är det yttersta skalets konfiguration som styr atomens kemi, och det är därför Mendelejevs periodiska system från år 1869 ser ut som det gör.

Formeln, symbol för symbol

$$E_n = -\underbrace{Z_{\text{eff}}^2}_{\substack{\text{kärnladdningen}\\ \text{efter skärmning}}} \cdot \underbrace{\frac{13{,}6\ \text{eV}}{n^2}}_{\text{skalet}}$$

En yttre elektron ser inte hela kärnladdningen Ze, eftersom de inre elektronerna ligger emellan. Energin räknas som i väte, men med den laddning som faktiskt når fram.

---

1. Notation och fyllnadsordning

En konfiguration anger hur många elektroner som sitter i varje underskal: siffran är n, bokstaven är l (s, p, d, f för $l = 0, 1, 2, 3$) och exponenten är antalet elektroner. Exponenterna summerar alltid till Z för en neutral atom, och inget underskal får fler än $2(2l + 1)$ enligt Paulis uteslutningsprincip.

I grundtillståndet fylls underskalen i ordning efter stigande energi:

$$1s \;\; 2s \;\; 2p \;\; 3s \;\; 3p \;\; 4s \;\; 3d \;\; 4p \;\; 5s \;\; 4d \;\; 5p \;\; 6s \;\; 4f \;\ldots$$

Fysika: T k3 (konfigurationen för varje grundämne står i periodiska systemet)

Några exempel:

Grundämne	Z	Konfiguration
Helium	2	$1s^2$
Kol	6	$1s^2\,2s^2\,2p^2$
Neon	10	$1s^2\,2s^2\,2p^6$
Natrium	11	$1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^1$
Argon	18	$1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6$

2. Skärmning och effektiv kärnladdning

I väte beror energin bara på n. I en atom med flera elektroner ser en yttre elektron inte hela kärnladdningen Ze: de inre elektronerna ligger till stor del mellan den och kärnan och skärmar av en del av laddningen. Effekten beskrivs med en effektiv kärnladdning Z_{eff}, som sätts in i energin för ett väteliknande system i stället för Z:

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2}\cdot 13{,}6\ \text{eV} \quad\longrightarrow\quad \boxed{E_n = -\frac{Z_{\text{eff}}^2}{n^2}\cdot 13{,}6\ \text{eV}}$$

Fysika: Fd3 (energinivåer för väteliknande system, med $E_H = 13{,}6$ eV från Te)

Löser vi ut Z_{eff} ur en uppmätt joniseringsenergi $E_{\text{jon}} = |E_n|$ får vi

$$Z_{\text{eff}} = n\sqrt{\frac{E_{\text{jon}}}{13{,}6\ \text{eV}}}$$

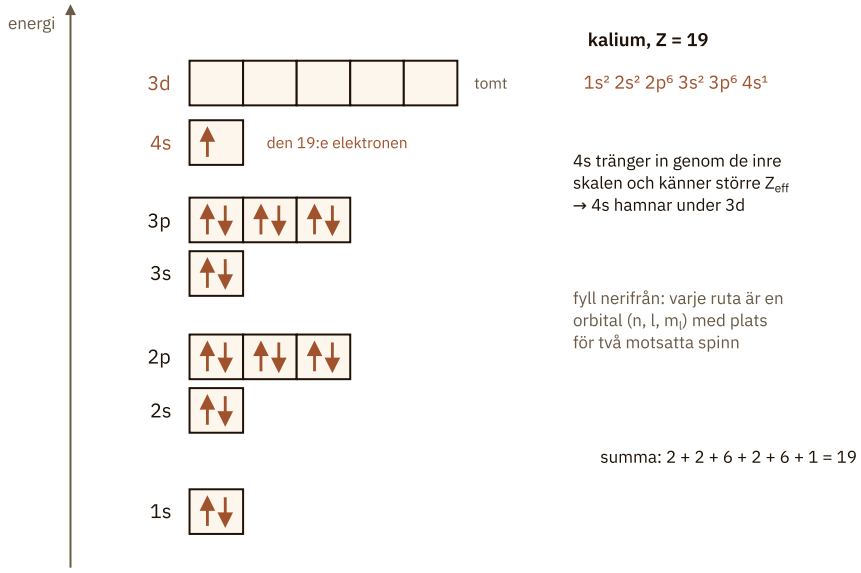
Full skärmning av alla inre elektroner skulle ge $Z_{\text{eff}} = 1$ för en ensam valenselektron, ingen skärmning alls $Z_{\text{eff}} = Z$. Verkliga värden ligger däremellan, oftast nära 1.

3. Varför 4s fylls före 3d

Skärmningen är inte lika för alla l. En s-elektron har en sannolikhetstäthet som når ända in till kärnan (se Atomorbitaler), så den tränger in genom de inre skalen och känner ett större Z_{eff}. En d-elektron med samma n håller sig längre ut och är bättre skärmad. I en atom med många elektroner beror energin därför på både n och l:

$$E_{ns} < E_{np} < E_{nd} < E_{nf}$$

För kalium är skillnaden så stor att $4s$ hamnar *under* $3d$, och den 19:e elektronen går till $4s$. Först när $4s$ är full börjar övergångsmetallerna fylla $3d$.



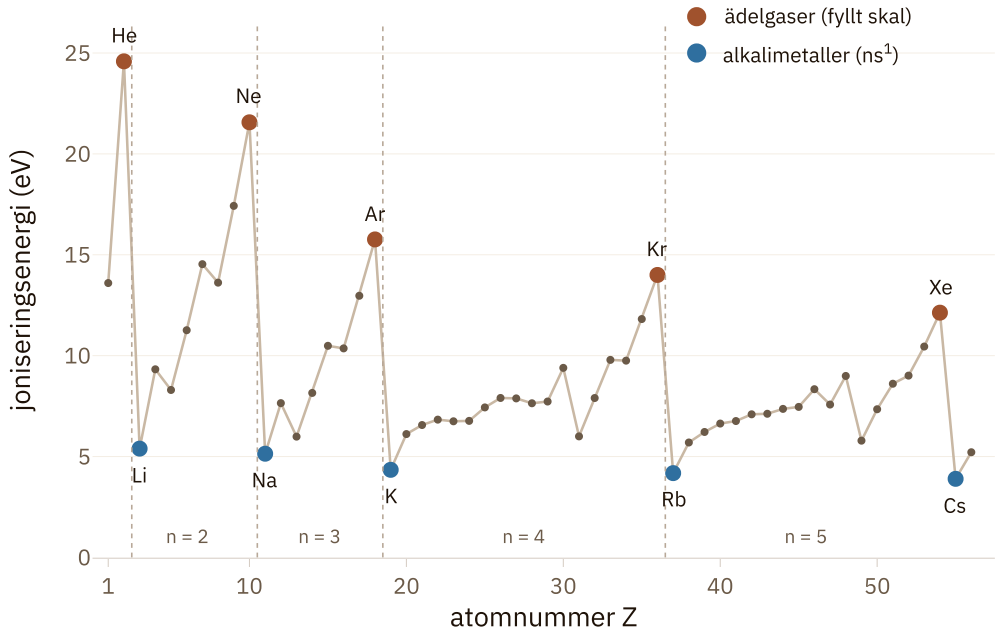
Kaliums 19 elektroner i underskalen, ordnade efter energi. Varje ruta är en orbital med plats för två motsatta spinn. Efter argonskalet hamnar den 19:e elektronen i 4s, som ligger under 3d eftersom s-elektronen tränger in genom de inre skalen.

---

4. Perioder och grupper

Periodiska systemets rader motsvarar skalen, och grundämnen i samma kolumn har samma konfiguration i det yttersta skalet. Det är den som styr kemin.

- **Alkalimetaller** (ns^1): en ensam, välskärmad elektron utanför fyllda skal. Låg joniseringsenergi, lämnar gärna bort elektronen.
- **Ädelgaser** (ns^2np^6): fyllt p-underskal. Hög joniseringsenergi och nästan ingen kemisk aktivitet.
- **Halogener** (ns^2np^5): en plats kvar i p-underskalet. Tar gärna upp en elektron.
- **Övergångsmetaller:** fyller $3d$, $4d$, $5d$ medan det yttersta s-underskalet redan är fullt, så grannelementen blir kemiskt lika. Lantaniderna fyller $4f$ på samma sätt.



Första joniseringsenergin för $Z = 1$ till 56 (NIST). Ädelgaserna ligger på topparna och alkalimetallerna direkt efter, i dalarna: vid varje streckad linje börjar ett nytt skal. Övergångsmetallerna ($Z = 21$–30 och 39–48) ger de flacka partierna.

⚠ Vanliga fel

- **$3d$ före $4s$.** I grundtillståndet fylls $4s$ först. Skriv kalium som $\ldots 3p^6\,4s^1$, inte $\ldots 3p^6\,3d^1$.
- **Exponenterna summerar inte till Z.** Kontrollera alltid summan, det avslöjar de flesta felskrivningar.
- **Fel n i Z_{eff}.** Litiums valenselektron sitter i $n = 2$, natriums i $n = 3$. Med fel n blir Z_{eff} fel med en faktor n.
- **Degeneration tas för given.** I väte har $2s$ och $2p$ samma energi. I atomer med fler elektroner har de det inte, eftersom skärmningen beror på l.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Effektiv kärnladdning för litium

Litiums joniseringsenergi är $5{,}39$ eV, och den elektron som lämnar atomen sitter i $2s$. Bestäm Z_{eff} för den elektronen och jämför med de två ytterlighetsfallen $Z_{\text{eff}} = 1$ och $Z_{\text{eff}} = 3$.

Lösning

Modell. Valenselektronen behandlas som en elektron i ett väteliknande system med $n = 2$ och energin $E_2 = -5{,}39$ eV.

Lös ut Z_{eff}.

$$Z_{\text{eff}} = n\sqrt{\frac{E_{\text{jon}}}{13{,}6\ \text{eV}}} = 2\sqrt{\frac{5{,}39}{13{,}6}} = \boxed{1{,}26}$$

Jämförelse. Med $Z_{\text{eff}} = 1$ skulle de två $1s$-elektronerna skärma perfekt och joniseringsenergin bli $13{,}6/4 = 3{,}40$ eV. Utan skärmning, $Z_{\text{eff}} = 3$, skulle den bli $9 \cdot 13{,}6/4 = 30{,}6$ eV. Värdet $1{,}26$ ligger nära full skärmning: $2s$-elektronen är mest utanför $1s$-skalet men tränger in en bit och känner lite mer än $+e$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Svavel och kalium

Skriv grundtillståndets elektronkonfiguration för svavel ($Z = 16$) och kalium ($Z = 19$). Vilket underskal fylls sist i respektive atom, och varför hamnar kaliums sista elektron i $4s$ och inte i $3d$?

Lösning

Svavel. Fyll i ordningen $1s, 2s, 2p, 3s, 3p$ tills 16 elektroner är placerade:

$$\boxed{1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^4} \qquad 2 + 2 + 6 + 2 + 4 = 16$$

Sist fylls $3p$, som har fyra av sex platser besatta.

Kalium. Efter argonskalet (18 elektroner) återstår en:

$$\boxed{1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,4s^1} \qquad 18 + 1 = 19$$

Varför $4s$. En s-elektron tränger in genom de inre skalen och känner ett större Z_{eff} än en d-elektron, som hålls utanför och skärmas nästan helt. Därför ligger $4s$ lägre än $3d$ i kalium.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 41.6 Many-Electron Atoms and the Exclusion Principle

Zeemaneffekten

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Kvanttal, Linjespektrum

I ett magnetfält splittras linjerna i ett linjespektrum. Förklaringen är att fältet bryter sfärens symmetri, så att degenererade nivåer med olika magnetiskt kvanttal $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ inte längre har samma energi. Den anomala Zeemaneffekten, som ger fler linjer än så, förklaras först när elektronspinnet räknas med — och det var så det magnetiska spinkvanttalet m_s upptäcktes.

Formeln, symbol för symbol

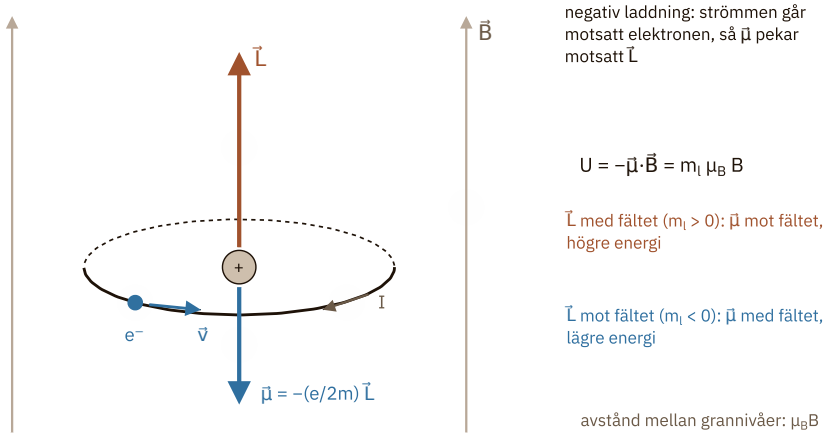
$$\underbrace{U}_{\text{energi-ändringen}} = \underbrace{m_l}_{-l,\dots,l}\ \underbrace{\mu_B}_{e\hbar/2m}\ \underbrace{B}_{\text{yttre fältet}}$$

Varje orientering av banan får sin egen energi, så nivån delas i $2l + 1$ steg med avståndet $\mu_B B$. Utan fält har alla samma energi, och ju starkare fältet är, desto större blir uppdelningen.

1. Banrörelsens magnetiska moment

En elektron som rör sig i en bana kring kärnan är en liten strömslinga och har därför ett magnetiskt dipolmoment. Momentet är proportionellt mot banrörelsemängdsmomentet och, eftersom laddningen är negativ, motriktat det:

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L}$$



Elektronen i sin bana som en liten strömslinga. Laddningen är negativ, så strömmen I går åt motsatt håll mot elektronen och $\vec{\mu}$ pekar motsatt $\vec{L}$. I ett yttre fält $\vec{B}$ längs z får banan energin $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, som beror på hur $\vec{L}$ står mot fältet.

Härledning av $\mu = (e/2m)L$

Strömmen. Elektronen går ett varv på tiden $T = 2\pi r/v$, så strömmens belopp är

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$$

Momentet. Slingans area är $A = \pi r^2$:

$$\mu = IA = \frac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{evr}{2}$$

Inför L. Med $L = mvr$:

$$\mu = \frac{e}{2m} mvr = \frac{e}{2m} L$$

Resultatet har härletts med en klassisk cirkelbana, men det gäller också kvantmekaniskt.

Komponenten längs z är kvantiserad eftersom $L_z = m_l \hbar$ är det (se Kvanttal):

$$\mu_z = -\frac{e}{2m} m_l \hbar = -m_l \mu_B$$

där **Bohrmagnetonen** är den naturliga enheten för atomära magnetiska moment:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9{,}274 \cdot 10^{-24}\ \text{J/T} = 5{,}788 \cdot 10^{-5}\ \text{eV/T}$$

2. Energin i ett magnetfält

Vi lägger z-axeln längs fältet. En magnetisk dipol i fältet $\vec{B}$ har energin

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B$$

$$U = -\left(-m_l \mu_B\right) B$$

$$\boxed{U = m_l \, \mu_B B}$$

Vilken riktning fältet har spelar ingen roll: det är komponenten längs fältet som räknas, och z-axeln är bara ett namn på den riktningen.

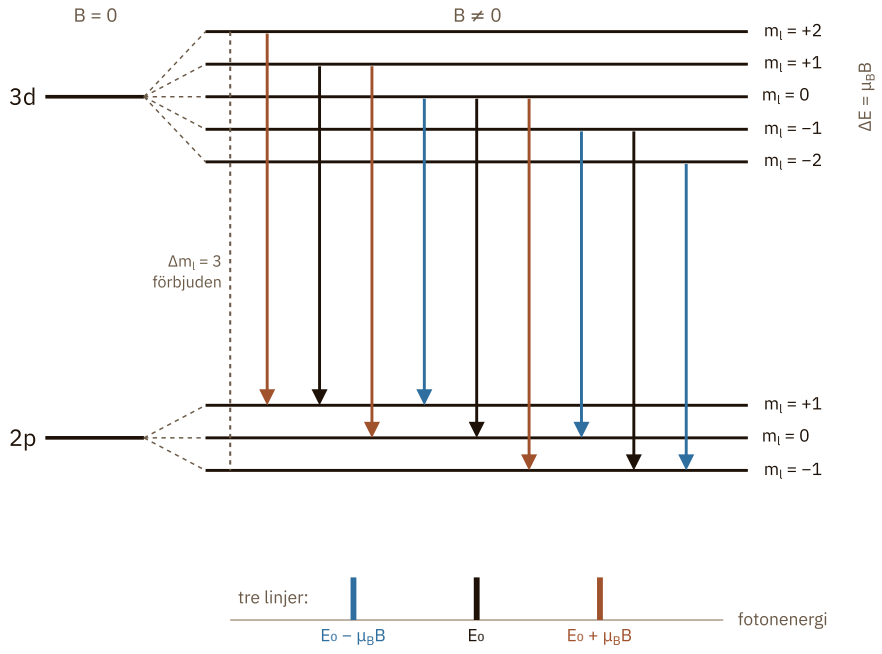
3. Uppsplittringen

En nivå med kvanttal l har $2l + 1$ tillstånd, som utan fält har samma energi. Fältet flyttar dem till

$$E = E_0 + m_l \, \mu_B B \qquad m_l = -l, \ldots, +l$$

så nivån splittras i $2l + 1$ lika tätt liggande nivåer med avståndet $\mu_B B$. En s-nivå ($l = 0$) påverkas inte alls.

För en övergång $3d \rightarrow 2p$ skulle $5 \cdot 3 = 15$ kombinationer vara tänkbara, men urvalsregeln $\Delta m_l = 0, \pm 1$ tillåter bara nio. De nio ger dessutom bara tre olika fotonenergier, eftersom nivåerna i båda skalen har samma avstånd $\mu_B B$:



Normal Zeemaneffekt för $3d \to 2p$. Fältet splittrar $3d$ i fem och $2p$ i tre nivåer (avståndet kraftigt överdrivet). De nio tillåtna övergångarna ger bara tre fotonenergier, E_0 och $E_0 \pm \mu_B B$. Streckat: en förbjuden övergång med $\Delta m_l = 3$.

Energiskiftet är litet jämfört med fotonenergin, så våglängdsförskjutningen fås genom att derivera $E = hc/\lambda$:

$$\frac{dE}{d\lambda} = -\frac{hc}{\lambda^2}$$

$$|\Delta\lambda| \approx \frac{\lambda^2}{hc}\,\Delta E$$

---

4. Normal och anomal Zeemaneffekt

Den normala effekten — tre linjer med avståndet $\mu_B B$ — bygger bara på banrörelsens moment. Den ses när elektronernas spinn tar ut varandra. I de flesta atomer bidrar också spinnets magnetiska moment, och eftersom det har ungefär dubbelt så stor kvot mellan moment och rörelsemängdsmoment blir mönstret ett annat, med fler och olika tätt liggande linjer. Det kallades anomalt innan spinnet var känt. Även utan yttre fält ger spinnet en liten uppdelning, se Spin-bankoppling.

⚠ Vanliga fel

- **Fel enhet på μ_B.** $9{,}274 \cdot 10^{-24}$ J/T och $5{,}788 \cdot 10^{-5}$ eV/T är samma sak. Blanda inte J och eV i samma uttryck.
- **Antalet nivåer och antalet linjer blandas ihop.** En nivå splittras i $2l + 1$ delar, men den normala Zeemaneffekten ger alltid tre linjer.
- **$\Delta\lambda$ proportionellt mot λ.** Förskjutningen går som $\lambda^2 \Delta E/hc$, inte som $\lambda\,\Delta E$.
- **s-nivån splittras.** Med $l = 0$ finns bara $m_l = 0$, så banmomentet ger ingen uppsplittring av en s-nivå.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Lyman-α i ett magnetfält

Väteatomens Lyman-α-linje, $121{,}6$ nm, kommer från övergången $2p \to 1s$. Atomerna placeras i ett magnetfält $B = 1{,}50$ T. Bortse från spinnet. Hur stor blir energiskillnaden mellan grannlinjerna, och hur stor är våglängdsförskjutningen?

Lösning

Nivåerna. $2p$ splittras i tre nivåer ($m_l = -1, 0, +1$) och $1s$ påverkas inte, så linjen blir tre linjer med avståndet

$$\Delta E = \mu_B B = 5{,}788 \cdot 10^{-5}\ \text{eV/T} \cdot 1{,}50\ \text{T} = \boxed{8{,}68 \cdot 10^{-5}\ \text{eV}}$$

Våglängdsförskjutningen. Med $|\Delta\lambda| = \lambda^2 \Delta E / hc$:

$$|\Delta\lambda| = \frac{(121{,}6\ \text{nm})^2 \cdot 8{,}68 \cdot 10^{-5}\ \text{eV}}{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}} = \boxed{1{,}04 \cdot 10^{-3}\ \text{nm}}$$

Fysika: Te (hc)

Rimlighetskoll. Fotonenergin är $1240/121{,}6 = 10{,}2$ eV, så den relativa ändringen är $8{,}68 \cdot 10^{-5}/10{,}2 \approx 8{,}5 \cdot 10^{-6}$ — samma som $\Delta\lambda/\lambda$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Fältet ur linjeavståndet

En spektrallinje vid 500 nm uppvisar normal Zeemaneffekt. Hur starkt måste fältet vara för att grannlinjerna ska ligga $0{,}0100$ nm isär?

Lösning

Energiskillnaden. Grannlinjerna skiljer sig med $\Delta E = \mu_B B$, och

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda^2}\,\Delta\lambda = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{(500\ \text{nm})^2} \cdot 0{,}0100\ \text{nm} = 4{,}96 \cdot 10^{-5}\ \text{eV}$$

Fältet.

$$B = \frac{\Delta E}{\mu_B} = \frac{4{,}96 \cdot 10^{-5}\ \text{eV}}{5{,}788 \cdot 10^{-5}\ \text{eV/T}} = \boxed{0{,}857\ \text{T}}$$

Ett fält under en tesla räcker alltså för en uppdelning som en bra spektrometer kan se.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 41.4 The Zeeman Effect

Urvalsregler

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #princip

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Kvanttal, Zeemaneffekten

---

Alla tänkbara övergångar mellan atomens tillstånd sker inte. En foton bär en enhet $\hbar$ rörelsemängdsmoment, och eftersom L bevaras måste l ändras med precis ett och m_l med noll eller ett. Alla andra övergångar är otillåtna.

$$\boxed{\Delta l = \pm 1 \qquad \Delta m_l = 0, \pm 1}$$

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\Delta l = \pm 1}_{\text{fotonen tar med sig en enhet } \hbar} \qquad \underbrace{\Delta m_l = 0, \pm 1}_{\text{fotonens z-del: } -\hbar,\ 0 \text{ eller } +\hbar}$$

Rörelsemängdsmomentet bevaras: det atomen förlorar tar fotonen med sig. Huvudkvanttalet n finns inte med, så det får ändras fritt.

---

1. Fotonen tar med sig rörelsemängdsmoment

När atomen sänder ut eller tar upp en foton måste det totala rörelsemängdsmomentet bevaras. En foton bär vid en vanlig övergång ett rörelsemängdsmoment på en enhet $\hbar$, och dess komponent längs z kan vara $-\hbar$, 0 eller $+\hbar$. Atomens banrörelsemängdsmoment måste därför ändras med precis en enhet, och $L_z = m_l\hbar$ med högst en:

$$\Delta l = \pm 1 \qquad \Delta m_l = 0, \pm 1$$

vilket är reglerna i rutan överst. För huvudkvanttalet n finns ingen regel: n får ändras med hur mycket som helst, även noll.

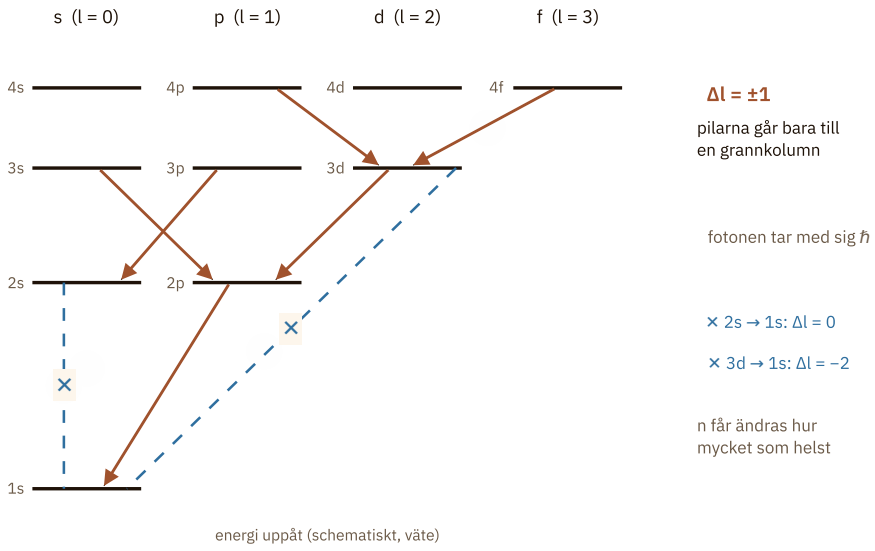
---

2. Tillåtna och förbjudna övergångar

Övergångar som uppfyller reglerna kallas **tillåtna**, övriga **förbjudna**. Förbjuden betyder i praktiken *mycket osannolik*: övergången kan ske genom svagare processer, men tar då mycket längre tid.

Övergång	Δl	Status
$2p \to 1s$	-1	tillåten (Lyman-α)
$3p \to 2s$	-1	tillåten
$3d \to 2p$	-1	tillåten
$2s \to 1s$	0	förbjuden
$3d \to 1s$	-2	förbjuden

En atom i $2s$ kan alltså inte direkt falla till $1s$ med en foton. Den blir kvar mycket längre än i en vanlig exciterad nivå — den är **metastabil**, samma egenskap som gör en Laser möjlig.



Väteatomens nivåer sorterade i kolumner efter l. Varje tillåten övergång (heldragen pil) går till en grannkolumn, eftersom $\Delta l = \pm 1$. $2s \to 1s$ och $3d \to 1s$ (streckade) är förbjudna, medan n kan ändras hur mycket som helst.

---

3. Varför Zeemaneffekten bara ger tre linjer

Reglen $\Delta m_l = 0, \pm 1$ är det som gör den normala Zeemaneffekten så enkel. I ett fält B ligger begynnelse- och slutnivån på

$$E_i = E_{3d} + m_i\,\mu_B B \qquad E_f = E_{2p} + m_f\,\mu_B B$$

Fotonens energi blir skillnaden:

$$hf = E_i - E_f = (E_{3d} - E_{2p}) + (m_i - m_f)\,\mu_B B$$

Med $m_i - m_f \in \{-1, 0, +1\}$ finns bara tre möjliga värden:

$$hf = E_0 - \mu_B B, \qquad E_0, \qquad E_0 + \mu_B B$$

Av de 15 tänkbara kombinationerna av nivåer tillåter regeln nio, och de nio fördelar sig på tre linjer (figuren i Zeemaneffekten).

⚠ Vanliga fel

- **Regel för n.** Det finns ingen. $4p \to 2s$ är lika tillåten som $2p \to 1s$.
- **$\Delta l = 0$ tillåts.** $3s \to 2s$ och $2p \to 2p$ är förbjudna; l måste ändras med exakt ett.
- **Pilar räknas i stället för energier.** Nio tillåtna övergångar $3d \to 2p$ i ett fält ger bara tre spektrallinjer.
- **Förbjuden tolkas som omöjlig.** Förbjudna övergångar sker, men med mycket lägre sannolikhet; det är därför metastabila nivåer lever länge.

---

4. Lösta exempel

Exempel — Vilka övergångar är tillåtna?

Avgör vilka av följande övergångar som är tillåtna enligt urvalsreglerna för en foton: (a) $3d \to 2s$, (b) $4p \to 3s$, (c) $3s \to 2s$, (d) $4f \to 3d$, (e) $3d\ (m_l = 2) \to 2p\ (m_l = 0)$.

Lösning

Metod. Läs av l ur bokstaven (s, p, d, f = $0, 1, 2, 3$) och kontrollera $\Delta l = \pm 1$, och i (e) även Δm_l.

a) $l : 2 \to 0$, $\Delta l = -2$: $\boxed{\text{förbjuden}}$.

b) $l : 1 \to 0$, $\Delta l = -1$: $\boxed{\text{tillåten}}$.

c) $l : 0 \to 0$, $\Delta l = 0$: $\boxed{\text{förbjuden}}$.

d) $l : 3 \to 2, \Delta l = -1$: $\boxed{\text{tillåten}}$.

e) $\Delta l = -1$ är i sin ordning, men $\Delta m_l = 0 - 2 = -2$: $\boxed{\text{förbjuden}}$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 41.4 The Zeeman Effect

Spin-bankoppling

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Elektronspin, Zeemaneffekten

Elektronens spinmagnetiska moment växelverkar med det magnetfält som dess egen banrörelse ger upphov till. Kopplingen separerar tillstånd som annars vore degenererade — och till skillnad från Zeemaneffekten krävs inget yttre fält. Det är den som ger linjespektrumets finstruktur.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\vec{J}}_{\text{totalt}} = \underbrace{\vec{L}}_{\text{banan}} + \underbrace{\vec{S}}_{\text{spinnet}}$$

$$j = \underbrace{l + \frac{1}{2}}_{\vec{S}\text{ ungefär med }\vec{L}} \quad \text{eller} \quad \underbrace{l - \frac{1}{2}}_{\vec{S}\text{ ungefär mot }\vec{L}}$$

Banrörelsen ger elektronen ett inre magnetfält längs $\vec{L}$, och spinnets energi beror på om det står med eller mot fältet. Därför är det summan $\vec{J}$ som har skarpa värden, och varje nivå med $l > 0$ delas i två.

1. Ett inre magnetfält

Från elektronens synvinkel är det kärnan som kretsar. En laddning i rörelse ger ett magnetfält, så i elektronens eget system finns ett fält $\vec{B}_{\text{eff}}$ som är riktat längs banrörelsemängdsmomentet $\vec{L}$. Spinnets magnetiska moment (se Elektronspin) får i det fältet energin

$$U = -\mu_z B_{\text{eff}} \approx \pm \mu_B B_{\text{eff}}$$

beroende på om spinnet ligger ungefär med eller mot $\vec{L}$. Varje nivå med $l > 0$ delas därmed i två. En s-nivå har $L = 0$, inget inre fält och ingen uppdelning. Bilden med kretsande kärna är halvklassisk, men en kvantmekanisk räkning ger samma resultat: energin beror på skalärprodukten $\vec{L} \cdot \vec{S}$.

Skillnaden mellan de två spinnlägena är

$$\Delta E = 2\mu_B B_{\text{eff}}$$

2. Totalt rörelsemängdsmoment

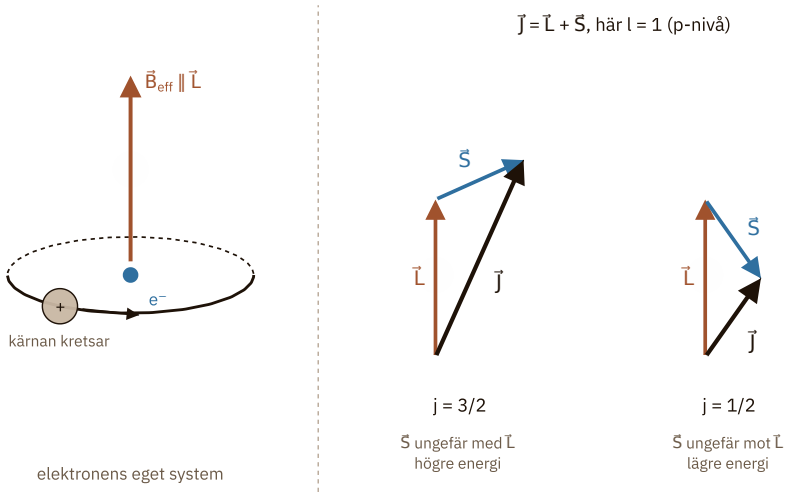
När $\vec{L}$ och $\vec{S}$ växelverkar är det deras summa som har skarpa värden:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

Beloppet kvantiseras med ett nytt kvanttal j, på samma sätt som L och S:

$$\boxed{J = \sqrt{j(j+1)}\,\hbar \qquad j = \left| l \pm \frac{1}{2} \right|}$$

$j = l + \frac{1}{2}$ svarar mot $\vec{L}$ och $\vec{S}$ ungefär parallella, $j = l - \frac{1}{2}$ mot ungefär antiparallella. För $l = 0$ finns bara $j = \frac{1}{2}$. Komponenten längs z är $J_z = m_j\hbar$ med $m_j = -j, \ldots, +j$, alltså $2j + 1$ värden.



Vänster: sett från elektronen kretsar kärnan, och den rörliga laddningen ger ett magnetfält $\vec{B}_{\text{eff}}$ längs $\vec{L}$. Höger: för en p-elektron ($l = 1$) kan $\vec{S}$ stå ungefär med eller mot $\vec{L}$, vilket ger $j = \frac{3}{2}$ eller $j = \frac{1}{2}$. Spinnets moment är motriktat $\vec{S}$, så $j = \frac{3}{2}$ får den högre energin.

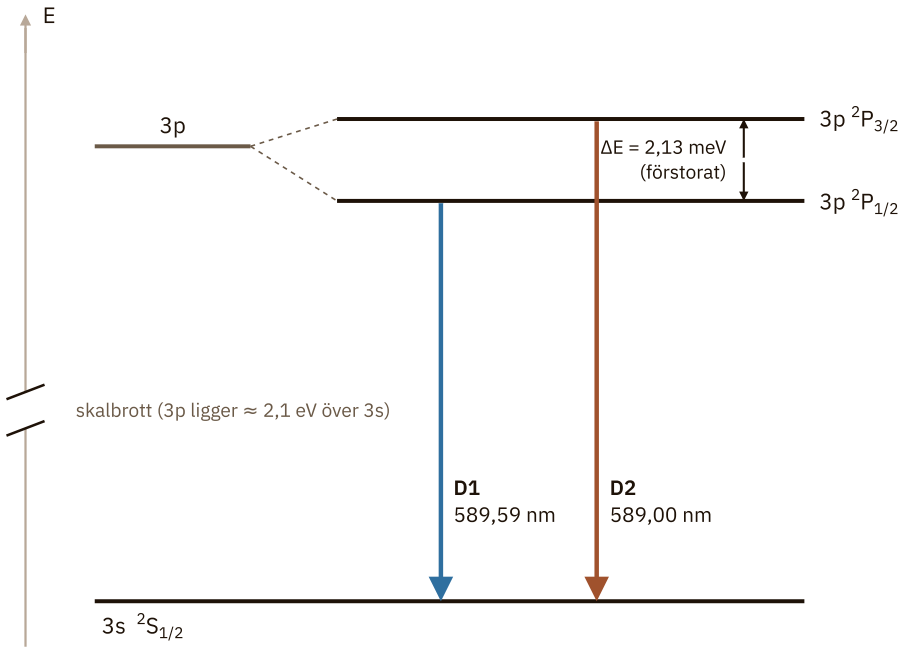
3. Spektroskopisk notation

Nivåerna betecknas ^2L_j, där den upphöjda tvåan anger de två spinnlägena, den stora bokstaven är l (S, P, D, F) och indexet är j:

l	möjliga j	nivåer
0	$\frac{1}{2}$	$^2S_{1/2}$

l	möjliga j	nivåer
1	$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$	$^2P_{1/2}$, $^2P_{3/2}$
2	$\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$	$^2D_{3/2}$, $^2D_{5/2}$

Natriums gula dubblett är det klassiska exemplet. Valenselektronens $3p$-nivå delas i $^2P_{3/2}$ och $^2P_{1/2}$, medan $3s$-nivån $^2S_{1/2}$ inte delas. De två övergångarna ner till $3s$ ger linjerna $589{,}0$ och $589{,}6$ nm; den kortare våglängden kommer från den högre nivån $^2P_{3/2}$.



Natriums $3p$-nivå delad av spin–bankopplingen. Övergångarna ner till $3s$ ger D1 ($589{,}59$ nm) och D2 ($589{,}00$ nm). Uppdelningen $\Delta E \approx 2{,}13$ meV är ungefär en tusendel av avståndet $2{,}1$ eV till $3s$, så den är kraftigt förstorad och energiaxeln är bruten.

---

4. Finstruktur

Spin–bankopplingen ger nivåförskjutningar av samma storlek som den relativistiska korrektionen till elektronens kinetiska energi. Tillsammans kallas de **finstruktur**. För väte blir nivåerna

$$E_{n,j} = -\frac{13{,}60\ \text{eV}}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)\right]$$

Fysika: Te (E_H)

där **finstrukturkonstanten** är dimensionslös:

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c} \approx 7{,}297 \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{137}$$

Korrektionen är av storleksordningen $\alpha^2 \approx 5 \cdot 10^{-5}$ av nivåenergin. Den tar bort degenerationen i l delvis: i väte beror energin nu på n och j, så $2P_{3/2}$ ligger något högre än $2P_{1/2}$.

Ännu mindre är **hyperfinstrukturen**, som kommer av att kärnan själv har ett magnetiskt moment. I vätets grundtillstånd ger den övergången bakom radioastronomins 21-cm-linje.

⚠ **Vanliga fel**

- $j = l + s$ **alltid.** Det finns två värden, $j = l + \frac{1}{2}$ och $j = l - \frac{1}{2}$, utom för $l = 0$.
- **Kopplingen kräver ett yttre fält.** Nej, fältet är atomens eget. Det är det som skiljer finstruktur från Zeemaneffekten.
- **s-nivåer delas.** Med $l = 0$ finns inget inre fält, och ${}^2S_{1/2}$ är en enda nivå.
- $\Delta E = \mu_B B$ **vid baklängesräkning.** Skillnaden mellan spinnlägena är $2\mu_B B_{\text{eff}}$, så fältet blir $B_{\text{eff}} = \Delta E/(2\mu_B)$.
- **För få siffror i våglängderna.** Dubblettens linjer ligger mycket tätt. Avrundas λ till tre siffror försvinner skillnaden helt.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Totalt rörelsemängdsmoment för en d-elektron

En elektron befinner sig i ett d-tillstånd. Vilka värden kan kvanttalet j ha, och hur stort är J i varje fall? Ange också den spektroskopiska beteckningen.

Lösning

Möjliga j. Med $l = 2$ och $s = \frac{1}{2}$:

$$j = l \pm \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2} \text{ eller } \frac{5}{2}}$$

Beloppen.

$$J_{3/2} = \sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}\,\hbar = \sqrt{3{,}75}\,\hbar = \boxed{1{,}94\,\hbar}$$

$$J_{5/2} = \sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}\,\hbar = \sqrt{8{,}75}\,\hbar = \boxed{2{,}96\,\hbar}$$

Beteckningar. ${}^2D_{3/2}$ och ${}^2D_{5/2}$.

Rimlighetskoll. Antalet tillstånd är $(2\cdot\frac{3}{2}+1)+(2\cdot\frac{5}{2}+1) = 4+6 = 10$, samma som $2(2l+1) = 10$ utan koppling. Kopplingen ordnar om tillstånden men skapar inga nya.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Kaliums dubblett

Kaliums motsvarighet till natriums gula dubblett består av linjerna $766{,}49$ nm och $769{,}90$ nm, från övergångarna $4p \to 4s$. Bestäm energiskillnaden mellan de två $4p$-nivåerna och det effektiva magnetfält som valenselektronen känner.

Lösning

Modell. $4s$ delas inte, så skillnaden mellan fotonenergierna är skillnaden mellan ${}^2P_{3/2}$ och ${}^2P_{1/2}$. Linjerna ligger så tätt att vi räknar med $hc = 1239{,}8$ eV·nm.

Fotonenergierna.

$$E_1 = \frac{1239{,}8}{766{,}49}\ \text{eV} = 1{,}61750\ \text{eV} \qquad E_2 = \frac{1239{,}8}{769{,}90}\ \text{eV} = 1{,}61034\ \text{eV}$$

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \boxed{7{,}16\cdot10^{-3}\ \text{eV}}$$

Effektiva fältet. Skillnaden mellan spinnlägena är $2\mu_B B_{\text{eff}}$:

$$B_{\text{eff}} = \frac{\Delta E}{2\mu_B} = \frac{7{,}16\cdot10^{-3}\ \text{eV}}{2\cdot5{,}788\cdot10^{-5}\ \text{eV/T}} = \boxed{61{,}9\ \text{T}}$$

Fältet är mycket starkare än i natrium (omkring 18 T), vilket stämmer med att kopplingen växer med kärnladdningen.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 41.5 Electron Spin

Moseleys lag

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #samband

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Röntgenstrålning, Elektronkonfiguration

---

Topparna ovanpå bromsstrålningens kontinuum kommer av att infallande elektroner slår loss en elektron ur K-skalet och att hålet fylls från L-skalet, så att $E_L - E_K = hf$. Moseley studerade den högsta toppen K_α och fann sambandet experimentellt; det härleds ur väteatomens energinivåer med $Z_{\text{eff}} = Z - 1$, eftersom den kvarvarande K-elektronen skärmar en enhet av kärnladdningen. Uttryckt i invers våglängd blir konstanten $8{,}23 \cdot 10^6\ \text{m}^{-1}$. Mätning av $\lambda_{K\alpha}$ identifierar alltså grundämnet.

$$\boxed{f = a\,(Z-1)^2\,, \qquad a = 2{,}47 \cdot 10^{15}\ \text{Hz}}$$

Fysika: Fd3 (i formen $\lambda^{-1} = a(Z-1)^2$ med $a = 8{,}23 \cdot 10^6\ \text{m}^{-1}$)

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{f}_{\substack{K_\alpha\text{-linjens}\\ \text{frekvens}}} = \underbrace{a}_{10{,}2\ \text{eV}/h}\ \Big(\ \underbrace{Z-1}_{\substack{\text{kärnladdning}\\ \text{minus en}}}\ \Big)^2$$

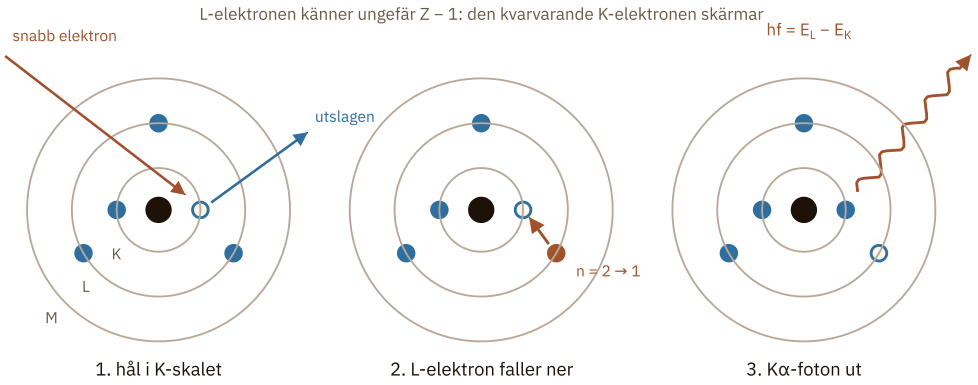
Linjen är vätets övergång $n = 2 \to 1$, men med kärnladdningen $Z - 1$ i stället för 1, eftersom den kvarvarande K-elektronen skärmar en enhet. Därför växer frekvensen med kvadraten på atomnumret.

---

1. Ett hål i K-skalet

I ett röntgenrör kan en infallande elektron med tillräcklig energi slå ut en av de två elektronerna i atomens innersta skal, K-skalet ($n = 1$). Hålet fylls snabbt av en elektron från ett högre skal, och energiskillnaden sänds ut som en röntgenfoton:

- K_α**:** hålet fylls från L-skalet ($n = 2 \to 1$).
- K_β**:** hålet fylls från M-skalet ($n = 3 \to 1$), något högre energi.



Så uppstår K_α. En snabb elektron slår ut en av de två K-elektronerna, en L-elektron faller ner i hålet, och energiskillnaden sänds ut som en röntgenfoton. L-elektronen ser kärnan genom den kvarvarande K-elektronen, alltså ungefär laddningen $Z - 1$.

Fotonenergin bestäms av atomens egna nivåer och inte av rörspänningen, så linjerna hamnar på samma ställe hur spänningen än väljs — bara den räcker för att slå ut en K-elektron. De ligger som smala toppar ovanpå bromsstrålningens kontinuum.

---

2. Härledning ur väteatomen

Innan hålet fylls finns en enda elektron kvar i K-skalet. Den ligger mellan kärnan och L-elektronen och skärmar en enhet av kärnladdningen, så L-elektronen känner ungefär $Z_{\text{eff}} = Z - 1$. Med energierna för ett väteliknande system:

$$E_n \approx -\frac{(Z-1)^2}{n^2} \cdot 13{,}6 \text{ eV}$$

Fysika: Fd3 (energinivåer för väteliknande system, med $Z - 1$ i stället för Z och $E_H = 13{,}6$ eV från Te)

Fotonenergin är skillnaden mellan $n = 2$ och $n = 1$:

$$E_{K\alpha} = E_2 - E_1 = (Z-1)^2 \cdot 13{,}6 \text{ eV} \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$\boxed{E_{K\alpha} \approx (Z-1)^2 \cdot 10{,}2 \text{ eV}}$$

Dividerar vi med h får vi frekvensen:

$$f = \frac{E_{K\alpha}}{h} = \frac{10{,}2 \text{ eV}}{4{,}136 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}} (Z-1)^2 = 2{,}47 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \cdot (Z-1)^2$$

Fysika: Te (h)

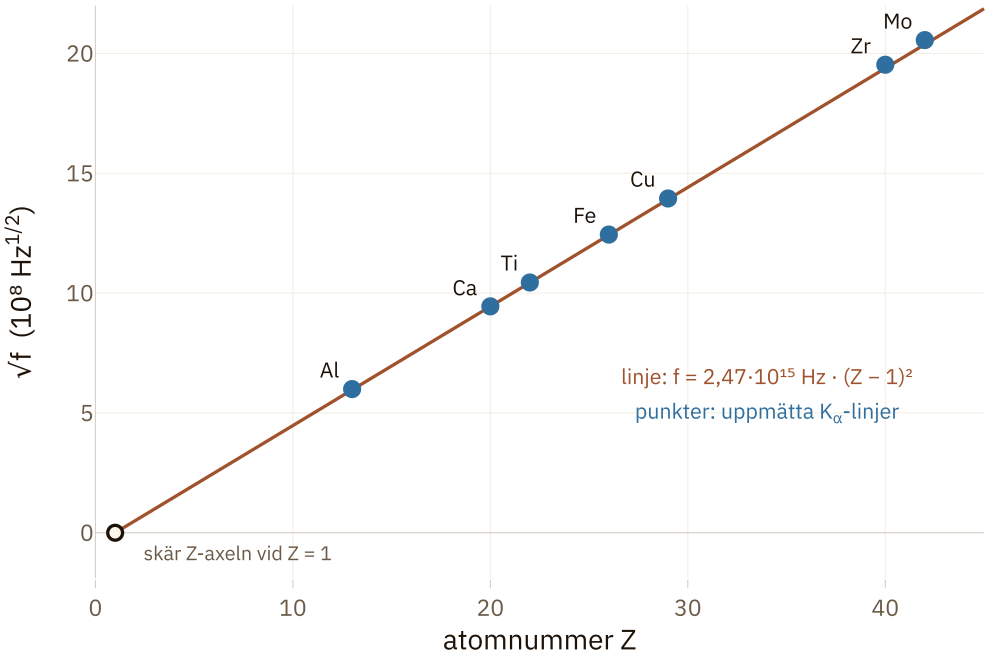
vilket är Moseleys lag i rutan överst. Skärmningen $Z - 1$ är en grov modell — L-elektronen skärmas också delvis av de andra elektronerna — men den stämmer inom någon procent.

---

3. Linjen i $\sqrt{f}$ och periodiska systemet

Tar vi roten ur Moseleys lag blir $\sqrt{f}$ en rät linje i Z, som skär Z-axeln vid $Z = 1$:

$$\sqrt{f} = \sqrt{a}\,(Z - 1)$$



$\sqrt{f}$ för uppmätta K_α-linjer mot atomnumret. Punkterna följer linjen från Moseleys lag, och linjen skär Z-axeln vid $Z = 1$, inte vid origo — det är skärmningen från den kvarvarande K-elektronen.

Moseley mätte linjerna år 1913 och kunde ordna grundämnena efter kärnladdning i stället för atommassa. Kobolt och nickel, som står i omvänd ordning efter massa, hamnade rätt, och luckor i serien visade var ännu okända grundämnen saknades.

På samma sätt ger hål i L-skalet en **L-serie** när de fylls från M- och N-skalen. Den har betydligt lägre energier än K-serien.

---

4. Absorptionskanter

Samma nivåer syns i absorption. När röntgenfotoner passerar ett material ökar absorptionen plötsligt när fotonenergin blir stor nog att lyfta ut en K-elektron. Den skarpa ökningen kallas **K-absorptionskant**. Kanten ligger något över K_α-energin, eftersom elektronen måste tas bort helt och inte bara flyttas till L-skalet, som ju redan är fullt.

⚠ Vanliga fel

- **Z i stället för $Z - 1$.** För koppar ger Z^2 ungefär $7\ \%$ för hög energi; det är skärmningen som gör lagen träffsäker.
- **$13{,}6$ eV i stället för $10{,}2$ eV.** Faktorn $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ kommer av att elektronen faller från $n = 2$, inte från oändligheten.
- **Linjen beror på rörspänningen.** K_α bestäms av atomen. Spänningen avgör bara om linjen syns alls och var bromsstrålningen slutar.
- **Fel prefix.** Röntgenenergier anges i keV och våglängder i tiondels nanometer. $hc = 1240$ eV·nm ger λ i nm bara om E står i eV.

5. Lösta exempel

Exempel — Kopparns K_α-linje

Uppskatta energin och våglängden för K_α-strålningen från en kopparanod ($Z = 29$).

Lösning

Energin.

$$E_{K\alpha} = (Z - 1)^2 \cdot 10{,}2\ \text{eV} = 28^2 \cdot 10{,}2\ \text{eV} = 7997\ \text{eV} \approx \boxed{8{,}00\ \text{keV}}$$

Våglängden.

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{7997\ \text{eV}} = \boxed{0{,}155\ \text{nm}}$$

Fysika: T k1 (uppmätt $\lambda_{K\alpha 1} = 154{,}2$ pm för Cu)

Rimlighetskoll. Uppmätt är $8{,}05$ keV och $0{,}154$ nm, alltså under en procents avvikelse. Våglängden är av samma storlek som atomavstånden i en kristall, vilket gör kopparstrålning användbar för kristallografi.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Identifiera ett okänt ämne

K_α-linjen från ett okänt grundämne har våglängden $0{,}194$ nm. Vilket grundämne är det?

Lösning

Frekvensen.

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{2{,}998 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{0{,}194 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 1{,}55 \cdot 10^{18}\ \text{Hz}$$

Lös ut Z ur Moseleys lag.

$$(Z-1)^2 = \frac{f}{a} = \frac{1{,}55 \cdot 10^{18}}{2{,}47 \cdot 10^{15}} = 626$$

$$Z - 1 = 25{,}0 \qquad Z = 26{,}0$$

Grundämnet. $Z = 26$ är $\boxed{\text{järn}}$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 41.7 X-Ray Spectra

Kvantintrassling

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Paulis uteslutningsprincip, Vågfunktion

Elektroner är principiellt omöjliga att särskilja, och två av dem kan inte ha samma kvanttillstånd. Kopplar man ihop två elektroner beskrivs grundtillståndet av en enda gemensam vågfunktion som inte går att dela upp i två oberoende delar. Partiklarna kan därefter separeras rumsligt och ändå behålla sitt gemensamma kvanttillstånd: mäter man den ena kollapsar vågfunktionen för båda. Fenomenet gav Nobelpriset i fysik år 2022.

Formeln, symbol för symbol

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\underbrace{\psi_A(\vec{r}_1)\,\psi_B(\vec{r}_2)}_{\substack{1\text{ i A},\\2\text{ i B}}} - \underbrace{\psi_B(\vec{r}_1)\,\psi_A(\vec{r}_2)}_{\substack{1\text{ i B},\\2\text{ i A}}}]$$

Båda möjligheterna finns med samtidigt, och ingen av dem gäller förrän något mäts. Minustecknet gör att ψ byter tecken när partiklarna byter plats, och att $\psi = 0$ om $A = B$.

1. Två identiska partiklar

Två elektroner beskrivs av en gemensam vågfunktion $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$. Om den ena är i tillståndet A och den andra i B är den första gissningen en produkt:

$$\psi = \psi_A(\vec{r}_1)\,\psi_B(\vec{r}_2)$$

Men den säger att det är just partikel 1 som är i A, och elektroner går inte att märka. Vi måste ta med båda möjligheterna med lika vikt. För partiklar med spinn $\frac{1}{2}$ ska kombinationen byta tecken när partiklarna byter plats:

$$\boxed{\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_A(\vec{r}_1)\,\psi_B(\vec{r}_2) - \psi_B(\vec{r}_1)\,\psi_A(\vec{r}_2)]}$$

Faktorn $1/\sqrt{2}$ normerar. Sätter vi båda i samma tillstånd, $B = A$, tar termerna ut varandra och $\psi = 0$ – det tillståndet finns inte. Det är Paulis uteslutningsprincip uttryckt i vågfunktionen. För fotoner, som har spinn 1, används plustecken i stället, och där finns ingen uteslutning.

En vågfunktion som den i rutan kan inte skrivas som en produkt av en funktion för varje partikel. Partiklarna sägs då vara **intrasslade**.

---

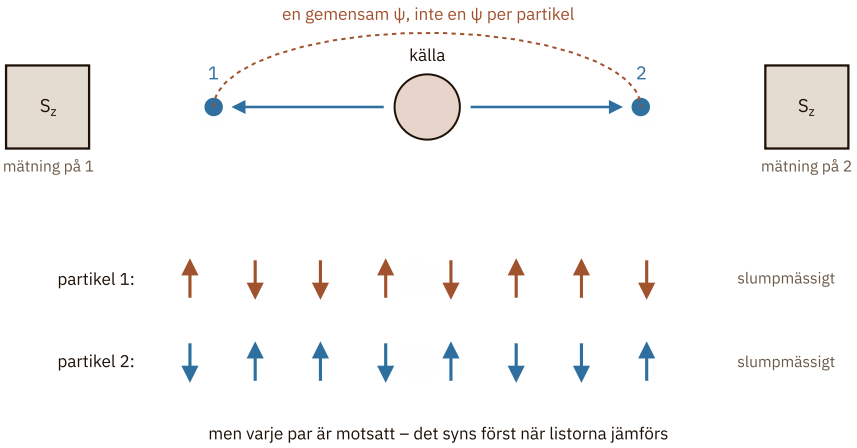
2. Mätning och kollaps

Mäter vi partikel 1 och finner den i A, kollapsar vågfunktionen till den term där partikel 1 är i A:

$$\psi \longrightarrow \psi_A(\vec{r}_1)\,\psi_B(\vec{r}_2)$$

En senare mätning på partikel 2 ger då B med säkerhet. Detta gäller också när partiklarna är långt ifrån varandra och inte kan påverka varandra med någon kraft; experiment med intrasslade fotoner har gjorts över mer än 1000 km. Kvantmekaniken är alltså **icke-lokal**, något Einstein kallade “spöklik verkan på avstånd”.

Ändå går det inte att skicka information snabbare än ljuset. Utfallet av den första mätningen är slumpmässigt — A eller B med lika sannolikhet — och den som mäter på partikel 2 ser bara en slumpmässig följd tills resultaten jämförs över en vanlig kanal.



En källa skickar ut två elektroner i ett gemensamt spinntillstånd. Var för sig ger mätningarna en slumpmässig följd av upp och ner, men när listorna jämförs är varje par motsatt. Korrelationen går inte att använda för att skicka en signal.

---

3. Qubits

En kvantbit, **qubit**, är ett tvånivåsystem, till exempel ett spinn, som kan vara i en superposition av sina två tillstånd. N intrasslade qubits beskrivs av en gemensam vågfunktion med 2^N amplituder, mot N bitar för N klassiska bitar. Det är grunden för kvantdatorer och för kvantkryptografi, där ett försök att avlyssna en intrasslad förbindelse förstör korrelationen och därmed avslöjas.

Vanliga fel

- **Produktvågfunktion för identiska partiklar.** $\psi_A(\vec{r}_1)\psi_B(\vec{r}_2)$ skiljer partiklarna åt och är inte tillåten för två elektroner.
- **Fel tecken.** Elektroner (spinn $\frac{1}{2}$) kräver minustecken, fotoner plustecken.
- **Intrassling används för att signalera.** Kollapsen går inte att styra, så ingen information färdas snabbare än ljuset.
- **Korrelationen tolkas som en kraft.** Den finns även när partiklarna är för långt ifrån varandra för att någon växelverkan ska hinna verka.

---

4. Löst exempel

Exempel — Två elektroner i helium

I heliums grundtillstånd sitter båda elektronerna i $1s$, den ena med spinn upp och den andra med spinn ner. (a) Är $\psi = \psi_{1s\uparrow}(1)\,\psi_{1s\downarrow}(2)$ en tillåten vågfunktion för de två elektronerna? (b) Man mäter spinnet hos elektron 1 och får $m_s = -\frac{1}{2}$. Vad ger en senare mätning på elektron 2? (c) Vad blir vågfunktionen om båda elektronerna ska vara i $1s\uparrow$?

Lösning

a) Nej. Produkten säger att det är just elektron 1 som har spinn upp, men elektronerna går inte att skilja åt. Den tillåtna vågfunktionen är

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_{1s\uparrow}(1)\,\psi_{1s\downarrow}(2) - \psi_{1s\downarrow}(1)\,\psi_{1s\uparrow}(2)]$$

och alltså $\boxed{\text{inte tillåten}}$.

b) Mätningen på elektron 1 väljer den andra termen, så vågfunktionen kollapsar till $\psi_{1s\downarrow}(1)\,\psi_{1s\uparrow}(2)$. Elektron 2 ger då med säkerhet $\boxed{m_s = +\frac{1}{2}}$.

c) Sätt $\downarrow \to \uparrow$ i den antisymmetriska vågfunktionen:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_{1s\uparrow}(1)\,\psi_{1s\uparrow}(2) - \psi_{1s\uparrow}(1)\,\psi_{1s\uparrow}(2)] = \boxed{0}$$

Tillståndet existerar inte, i enlighet med Paulis uteslutningsprincip.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 41.8 Quantum Entanglement
- 40.6 Measurement in Quantum Mechanics

Kovalent bindning

19 okt. 2026, 7 min läsning

UTKAST

#fysik #molekylfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Atomorbitaler, Elektronkonfiguration

I en kovalent bindning delar två atomer på två elektroner, ett elektronpar, så att båda får fulla skal — $\mathrm{H_2}$ som H–H, eller kol som delar sina fyra valenselektroner med fyra väteatomer i $\mathrm{CH_4}$. Bindningen är stark och håller ihop både molekyler och kristaller, och den är specifik: den har en bestämd, föredragen vinkel. Är atomerna olika blir fördelningen av elektronparet ojämn, och bindningen är polär.

1. Elektronparet i $\mathrm{H_2}$

Den enklaste kovalenta bindningen finns i vätemolekylen: två protoner och två elektroner. När två väteatomer närmar sig varandra deformeras elektronernas vågfunktioner och samlas i området **mellan** kärnorna. En elektron där attraheras av båda protonerna samtidigt, och den attraktionen blir större än repulsionen mellan de två protonerna och mellan de två elektronerna. Resultatet är en bunden molekyl.

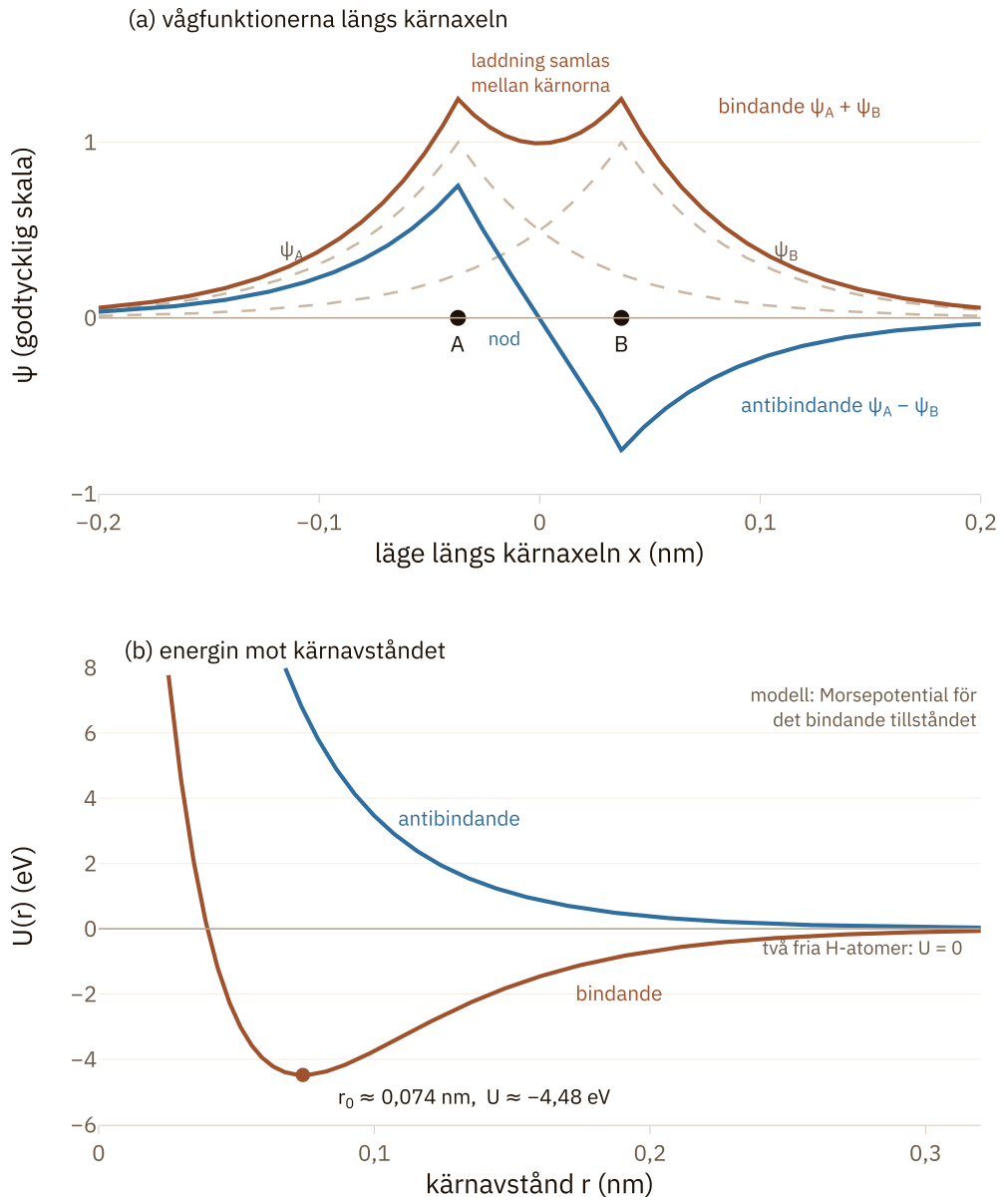
Att två elektroner kan dela samma område beror på spinnet. Enligt Paulis uteslutningsprincip får två elektroner vara i samma rumsliga tillstånd bara om de har motsatt spinn. Det ger två följder:

- **Spinnen i en kovalent bindning är motsatta.** Med parallella spinn hålls elektronerna isär, laddningen mellan kärnorna blir liten, och atomerna repellerar varandra.
- **En bindning rymmer högst två elektroner.** En tredje elektron skulle behöva ett annat rumsligt tillstånd, utanför området mellan kärnorna.

Bindningsenergin för $\mathrm{H_2}$ är

$$E_{\mathrm{bind}}\,(\mathrm{H_2}) = -4{,}48\ \mathrm{eV}$$

vilket betyder att det krävs $4{,}48$ eV för att dela molekylen i två fria väteatomer.



Överst summan och skillnaden av två 1s-vågfunktioner längs kärnaxeln: den bindande samlar laddning mellan kärnorna, den antibindande har en nod mitt emellan. Underst energin mot kärnavståndet (modell): bara det bindande tillståndet har ett minimum, vid $0{,}074$ *nm.*

Samma två tillstånd kan ritas som elektronmoln. Det bindande σ-molnet omsluter båda kärnorna och har förhöjd täthet mellan dem jämfört med två fria atomer, medan det antibindande σ*-molnet delas i två halvor av ett nodplan mitt emellan kärnorna.

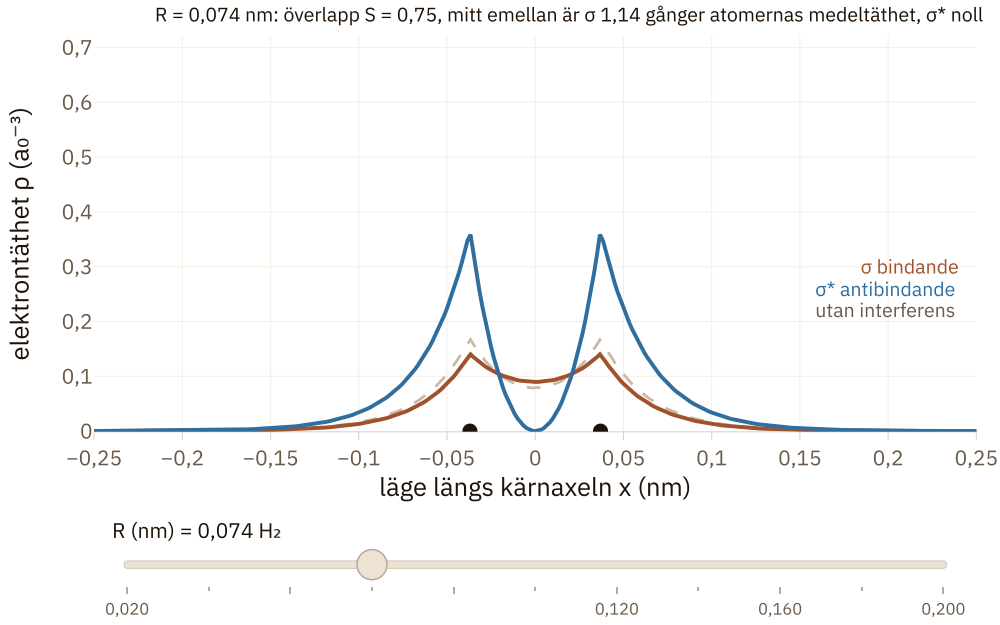
σ: $\psi_A + \psi_B$ (bindande) σ*: $\psi_A - \psi_B$ (antibindande)



dra för att vrida

Elektronmolnen för H_2 i 3D (vrid med musen). Isoytorna ligger vid 50, 20 och 5 % av maxtätheten. Det bindande σ samlar laddning mellan protonerna, det antibindande σ har ett nodplan mitt emellan dem. Modellen är kvalitativ: summa och skillnad av två 1s-orbitaler.*

Hur mycket laddning som hamnar mellan kärnorna beror på hur mycket atomernas vågfunktioner överlappar, och därmed på kärnavståndet R.



Elektrontätheten längs kärnaxeln för en elektron i σ och i σ, med reglage för kärnavståndet R. Den streckade kurvan är medelvärdet av två fria atomers täthet, utan interferens. Vid $R = 0{,}074$ nm är σ-tätheten mitt emellan kärnorna 14 % större än så, medan σ* är noll där. Kvalitativ modell: normerade summor och skillnader av två 1s-orbitaler.*

2. Riktning och hybridisering

En atom med flera valenselektroner kan bilda flera kovalenta bindningar. Kol har fyra elektroner i L-skalet och binder fyra väteatomer i metan, $\mathrm{CH_4}$. Varje valenselektrons vågfunktion är en blandning av $2s$ och $2p$ orbitaler, en **hybridorbital**, med en lob som pekar mot ett hörn i en regelbunden tetraeder. Den symmetriska uppställningen gör att elektronparen överlappar så lite som möjligt, vilket minimerar den positiva potentiella energin från repulsionen mellan paren.

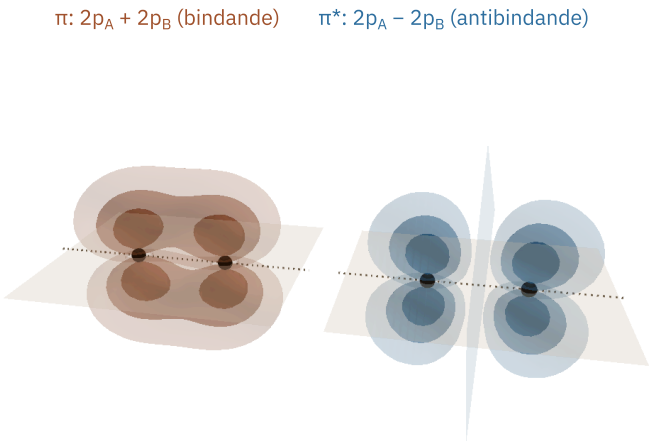
Tetraedervinkeln. Lägg kolatomen i origo och väteatomerna i hörnen $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$ och $(-1,-1,1)$ av en kub. Vinkeln mellan två bindningar ges av skalärprodukten:

$$\cos\theta = \frac{(1,1,1)\cdot(1,-1,-1)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1-1-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109{,}5^\circ}$$

Samma vinkel gäller mellan alla sex par av bindningar. Det är den bestämda riktningen som ingressen kallar bindningens specificitet: kovalenta bindningar är **starkt riktade**, till skillnad från jonbindning och metallisk bindning.

π-bindning. I en dubbelbindning, som C=C i eten, är den ena bindningen en σ-bindning längs bindningsaxeln. Den andra bildas av två $2p$-orbitaler som står vinkelrätt mot axeln och överlappar sida vid sida, en **π-bindning**. Laddningen samlas då ovanför och under axeln, och planet genom bindningsaxeln är ett nodplan där vågfunktionen är noll. Det antibindande π* har dessutom ett nodplan mitt emellan kärnorna, precis som σ* i $\mathrm{H_2}$.



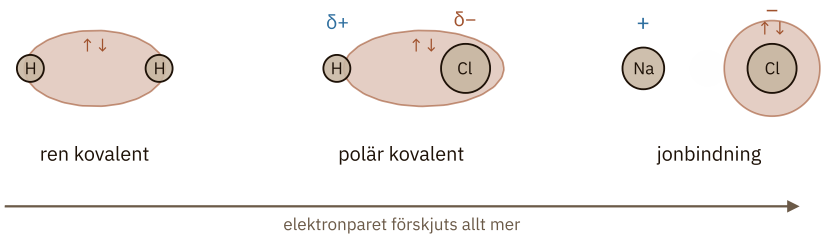
π-bindningen mellan två kolatomer i 3D (vrid med musen). Det beige planet är nodplanet genom bindningsaxeln: där är tätheten noll i både π och π. π* har ett andra nodplan mitt emellan kärnorna. Isoytor vid 50, 20 och 5 % av maxtätheten, kvalitativ modell med Slater-orbitaler för kol, kärnavstånd $0{,}134$ nm.*

3. Polär bindning

Är de två atomerna olika drar den ena hårdare i elektronparet. Paret förskjuts mot den atomen, som får en partiell negativ laddning, och bindningen får ett dipolmoment. Det finns ingen skarp gräns mellan de två ytterlighetsfallen:

- **Ren kovalent bindning.** Paret delas lika, till exempel i $\mathrm{H_2}$ och $\mathrm{Cl_2}$.
- **Polär kovalent bindning.** Paret delas ojämnt, till exempel i HCl och $\mathrm{H_2O}$.
- Jonbindning. En elektron förs över helt, till exempel i NaCl.

Molekyler som vatten, med stora dipolmoment, kallas **polära molekyler**.



Från delat par till överförd elektron. I $\mathrm{H_2}$ ligger elektronparet mitt emellan kärnorna, i HCl är det förskjutet mot klor, och i NaCl har elektronen i praktiken bytt atom.

4. Bindningstyperna i översikt

typ	mekanism	typisk energi	riktad?	exempel
jon	elektron överförs, Coulombattraktion	1–5 eV	nej	NaCl
kovalent	delat elektronpar med motsatta spinn	1–5 eV	ja	$\mathrm{H_2}$, $\mathrm{CH_4}$, diamant
metallisk	elektronhav runt positiva joner	stark	nej	Cu, Al
van der Waals	dipol–dipol, även inducerade	$\lesssim 0{,}1$ eV	nej	fast argon, flytande $\mathrm{N_2}$
vätebindning	proton mellan två atomer	$< 0{,}5$ eV	ja	is, DNA

Jon- och kovalenta bindningar kallas **starka**, van der Waals- och vätebindningar **svaga**.

⚠ Vanliga fel

- **Tecknet på bindningsenergin.** $-4{,}48$ eV är molekylens energi relativt fria atomer. Energin som *krävs* för att bryta bindningen är $+4{,}48$ eV.
- **Kovalent bindning förväxlas med jonbindning.** I en kovalent bindning förs ingen elektron över netto, paret delas. I en polär bindning är fördelningen ojämn, men ingen hel elektron har bytt atom.
- **Fler än två elektroner per bindning.** Pauli tillåter bara två elektroner, med motsatta spinn, i samma rumsliga tillstånd. En dubbelbindning är två bindningar, inte en med fyra elektroner.
- **Tetraedervinkeln blandas ihop med 90°.** Bindningarna i $\mathrm{CH_4}$ följer inte koordinataxlarna. Vinkeln är $109{,}5^\circ$.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Att bryta $\mathrm{H_2}$

Bindningsenergin i $\mathrm{H_2}$ är $4{,}48$ eV. a) Ange bindningsenergin i kJ/mol. b) Vilken är den längsta våglängd en foton kan ha för att ensam kunna dissociera molekylen? c) Vid vilken temperatur är $k_B T$ lika med bindningsenergin? Vad säger det om $\mathrm{H_2}$ vid rumstemperatur?

Lösning

a) Per molekyl i joule, sedan gånger Avogadros tal:

$$4{,}48\ \text{eV} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1} = 4{,}32 \cdot 10^{5}\ \text{J/mol} = \boxed{432\ \text{kJ/mol}}$$

Fysika: Te

b) Fotonen måste ha minst energin $4{,}48$ eV:

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{E} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{4{,}48\ \text{eV}} \approx \boxed{277\ \text{nm}}$$

Det ligger i ultraviolett. Synligt ljus räcker inte.

c)

$$T = \frac{E}{k_B} = \frac{4{,}48 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1{,}381 \cdot 10^{-23}\ \text{J/K}} \approx \boxed{5{,}20 \cdot 10^{4}\ \text{K}}$$

Vid 300 K är $k_B T = 0{,}0259$ eV, ungefär 170 gånger mindre än bindningsenergin. Termiska stötar bryter i praktiken aldrig bindningen vid rumstemperatur. Se också Temperatur och värme.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

6. Bindningstyperna jämförda

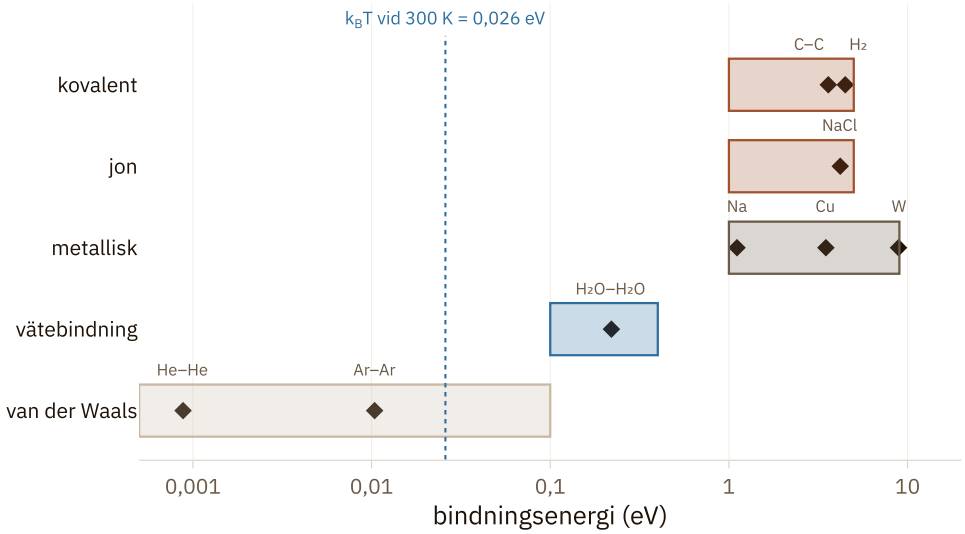
Avsnittet bygger ut översikten i avsnitt 4 med energier och materialegenskaper. De fem bindningstyperna skiljer sig i styrka med ungefär tre tiopotenser. Styrkan bestämmer smältpunkten, och mekanismen bestämmer resten: om elektronerna är fria avgör ledningsförmågan, och om bindningen är riktad avgör om kristallen går att forma eller spricker.

typ	typisk bindningsenergi	riktad?	exempel	smältpunkt	ledningsförmå
kovalent	1–5 eV	ja	diamant, kisel	hög: Si 1687 K, diamant över 3800 K	isolator eller halvledare
jon	1–5 eV	nej	NaCl, MgO	hög: NaCl 1074 K (typiskt tabellvärde)	leder inte som fas ämne, men som smälta och i lösni
metallisk	1–9 eV	nej	Na, Cu, W	låg till mycket hög: Na 371 K, Cu 1356 K, W 3653 K	mycket god, för både elektricitet och värme
väte	0,1–0,4 eV	ja	is, DNA	låg: is 273 K	isolator

typ	typisk bindningsenergi	riktad?	exempel	smältpunkt	ledningsförmå
van der Waals	under $0{,}1$ eV	nej	fast Ar, fast $\mathrm{N_2}$	mycket låg: Ar 84 K, $\mathrm{N_2}$ 63 K	isolator

Fysika: T g1 (smältpunkter för Si, C, Na, Cu, W), T g3 (Ar, N₂, H₂O)

Smältpunkterna gäller kristaller där bindningstypen håller ihop hela kristallen. I en molekylkristall, som fast metan, är bindningarna inom molekylerna kovalenta, men kristallen smälter redan när de svaga van der Waals-bindningarna mellan molekylerna bryts.



Typiska bindningsenergier på logaritmisk skala. Jon- och kovalenta bindningar ligger kring 1–5 eV och metalliska kring 1–9 eV, vätebindningen kring $0{,}1$–$0{,}4$ eV och van der Waals-bindningen under $0{,}1$ eV. Den prickade linjen är $k_B T$ vid rumstemperatur: bindningar nära den bryts hela tiden av värmerörelsen. Exemplen: $\mathrm{H_2}$ och NaCl ur noterna, C–C som typisk enkelbindning mellan kolatomer, metallerna som kohesionsenergi per atom, en vätebindning mellan två vattenmolekyler (H₂O–H₂O), och Lennard-Jones-djupet för två argon- respektive heliumatomer (Ar–Ar, He–He).

Varje typ har sin egen not: Jonbindning, Metallisk bindning, Vätebindning och Van der Waals-bindning.

Läsning

- 42.1 Types of Molecular Bonds

Metallisk bindning

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #molekylfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Kovalent bindning

Metalliska kristaller hålls ihop av ett elektronhav: ungefär en elektron per atom delas av alla atomer samtidigt. Att elektronerna är fria förklarar metallernas goda ledningsförmåga för både elektricitet och värme. Bindningen är stark men ospecifik — antalet grannar och vinklarna mellan dem är flexibla, och det är i stället packningstätheten som styr strukturen.

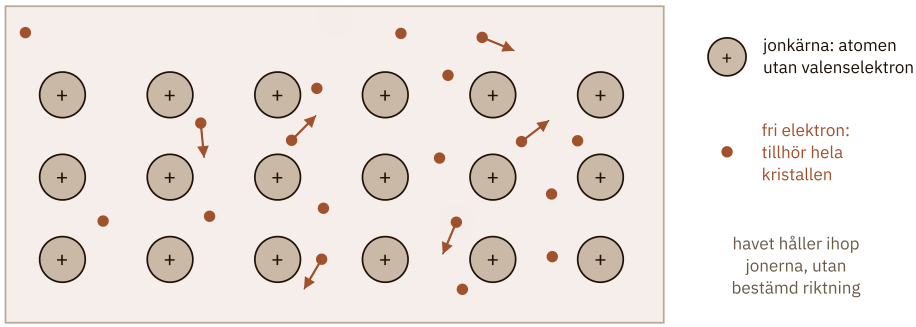
Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{n}_{\substack{\text{fria elektroner}\\ \text{per m}^3}} = \underbrace{z}_{\substack{\text{fria elektroner}\\ \text{per atom}}} \cdot \underbrace{\frac{\rho\, N_A}{M}}_{\substack{\text{atomer}\\ \text{per m}^3}}$$

Formeln är en ren omräkning: först hur många atomer som ryms i en kubikmeter, sedan hur många elektroner varje atom lämnar till elektronhavet. Därför hamnar n kring 10^{28}–$10^{29}\ \text{m}^{-3}$ för alla vanliga metaller.

1. Jonkärnor i ett elektronhav

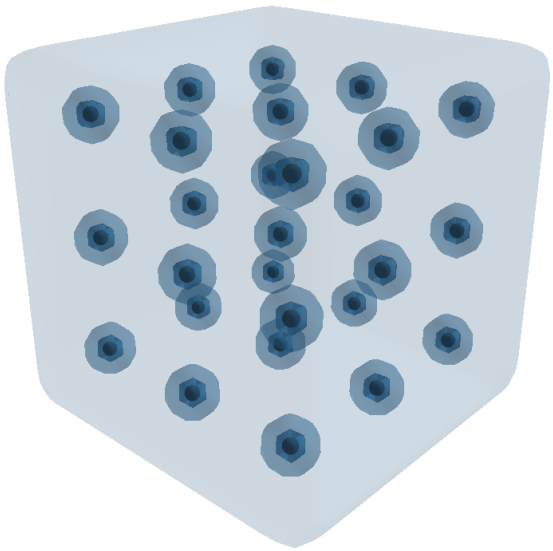
I en metall lossnar en eller några av de yttersta elektronerna från varje atom. Kvar blir positiva joner, ordnade i ett kristallgitter, och de lösgjorda elektronerna rör sig fritt genom hela kristallen. Bilden är ett gitter av joner som ligger i ett hav av elektroner, och det är attraktionen mellan havet och jonerna som håller ihop kristallen.



metallkristall

Metallen som ett gitter av positiva jonkärnor i ett hav av fria elektroner. Elektronerna tillhör hela kristallen, och attraktionen mellan havet och jonerna har ingen föredragen riktning.

Som elektronmoln är havet nästan jämnt utsmetat över hela kristallen. Det är bara lite tätare närmast jonkärnorna, som attraherar elektronerna.



dra för att vrida

Jonkärnor i ett kubiskt gitter i ett elektronhav, i 3D (vrid med musen). Den yttersta ytan är havets gräns vid kristallens kanter. Inuti är tätheten nästan konstant, med svaga toppar kring jonerna: de inre ytorna ligger 12 *och* $25\ \%$ *över tätheten mellan jonerna. Kvalitativ modell.*

Jämfört med de andra starka bindningarna:

- **Mot** kovalent bindning**.** Elektronerna delas också här, men av alla atomer på en gång i stället för av ett par. Bindningen är därför varken lokaliserad eller riktad.
- **Mot** jonbindning**.** Det finns positiva joner, men inga negativa. Den negativa laddningen är utsmetad över hela kristallen.

Eftersom bindningen saknar riktning styrs strukturen av hur tätt atomerna kan packas. De vanligaste metallstrukturerna är ytcentrerad kubisk och hexagonal tätpackning, där varje atom har 12 närmaste grannar, se Packningstäthet. Att ingen bindning har en föredragen vinkel är också skälet till att metaller kan formas: jonerna kan glida förbi varandra utan att några särskilda bindningar bryts.

---

2. Elektrontätheten

Elektronhavet beter sig på många sätt som en gas, och den viktigaste storheten är antalet fria elektroner per volymenhet. Med z fria elektroner per atom, densiteten ρ och molmassan M är antalet atomer per volymenhet $\rho N_A/M$, där N_A är Avogadros tal. Elektrontätheten blir

$$\boxed{n = \frac{z\,\rho\,N_A}{M}}$$

Fysika: T k3 (n tabellerad per grundämne)

För typiska metaller hamnar n kring 10^{28}–$10^{29}\ \mathrm{m}^{-3}$. Medelavståndet mellan elektronerna är ungefär $n^{-1/3}$, vilket är av samma storlek som avståndet mellan atomerna.

---

3. Varför metaller leder

Elektronhavet förklarar metallernas höga ledningsförmåga för både elektricitet och värme: laddningsbärarna finns redan fria och behöver ingen extra energi för att börja röra sig. I bandbilden motsvarar det ett energiband som bara är delvis fyllt. Ovanför de fyllda nivåerna, vid Ferminivån, finns tomma tillstånd direkt intill, så ett litet elektriskt fält räcker för att flytta elektroner till tillstånd med nettorörelse.

> ⚠ **Vanliga fel**
>
> - **Molmassan i g/mol blandas med densitet i kg/m³.** Räkna om M till kg/mol eller ρ till g/m³ innan de divideras, annars blir n fel med en faktor 1000.
> - **z glöms bort.** $\rho N_A/M$ är antalet atomer per volym. För aluminium med tre fria elektroner per atom måste det multipliceras med 3.
> - **Metallisk bindning tros vara riktad.** Den är ospecifik. Strukturen bestäms av packningen, inte av bindningsvinklar som i kovalenta kristaller.
> - **Elektronhavet tros vara alla elektroner.** Bara valenselektronerna är fria. De inre elektronerna sitter kvar i jonkärnorna.

---

4. Lösta exempel

Exempel — Elektrontäthet i koppar och aluminium

Koppar har densiteten $8{,}96$ g/cm³ och molmassan $63{,}55$ g/mol och ger en ledningselektron per atom. Aluminium har densiteten $2{,}70$ g/cm³ och molmassan $26{,}98$ g/mol och ger tre. Bestäm elektrontätheten i båda metallerna och medelavståndet $n^{-1/3}$ mellan elektronerna.

Lösning

Enheter. $8{,}96$ g/cm³ $= 8960$ kg/m³ och $63{,}55$ g/mol $= 0{,}06355$ kg/mol, och på samma sätt för aluminium.

Koppar.

$$n_{\mathrm{Cu}} = \frac{1 \cdot 8960 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}}{0{,}06355}\ \mathrm{m}^{-3} = \boxed{8{,}49 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}}$$

Fysika: Te

$$n_{\mathrm{Cu}}^{-1/3} = (8{,}49 \cdot 10^{28})^{-1/3}\ \mathrm{m} = \boxed{0{,}228\ \mathrm{nm}}$$

Aluminium.

$$n_{\mathrm{Al}} = \frac{3 \cdot 2700 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}}{0{,}02698}\ \mathrm{m}^{-3} = \boxed{1{,}81 \cdot 10^{29}\ \mathrm{m}^{-3}}$$

$$n_{\mathrm{Al}}^{-1/3} = (1{,}81 \cdot 10^{29})^{-1/3}\ \mathrm{m} = \boxed{0{,}177\ \mathrm{nm}}$$

Jämförelse. Aluminium är lättare än koppar men har ungefär dubbelt så många fria elektroner per volym, eftersom varje atom bidrar med tre. Båda avstånden är av samma storlek som avståndet mellan atomerna i gittret.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Se jämförelsen i 6. Bindningstyperna jämförda.

Läsning

- 42.1 Types of Molecular Bonds

Jonbindning

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #molekylfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Elektronkonfiguration

En atom lämnar över en eller två valenselektroner till en annan, så att båda får fulla skal och blir joner med motsatt laddning — natrium ger sin $3s$-elektron till klor och bildar Na^{+} och Cl^{-}. De motsatta laddningarna attraherar varandra och bygger saltkristaller. Bindningen är stark men bryts till exempel av vattenlösning. Samma sak gäller molekylära joner som NH_4^{+} och SO_4^{2-}.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{E_B}_{\substack{\text{bindnings-}\\\text{energi}}} = \underbrace{\left|U(r_0)\right|}_{\substack{\text{dra isär}\\\text{jonerna}}} - \underbrace{(E_{\text{jon}} - E_{\text{aff}})}_{\substack{\text{ges tillbaka}\\\text{när jonerna}\\\text{blir atomer}}}$$

$$U(r_0) = \underbrace{-\frac{ke^2}{r_0}}_{\substack{\text{punkt-}\\\text{laddningar}}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\substack{\text{repulsionen}\\\text{tar andelen } 1/n}}$$

Jonerna tjänar $\left|U(r_0)\right|$ på att dras ihop, men de har först kostat $E_{\text{jon}} - E_{\text{aff}}$ att skapa. För NaCl blir det $5{,}7 - 1{,}5 \approx 4{,}2$ eV.

1. Energibalansen när jonerna bildas

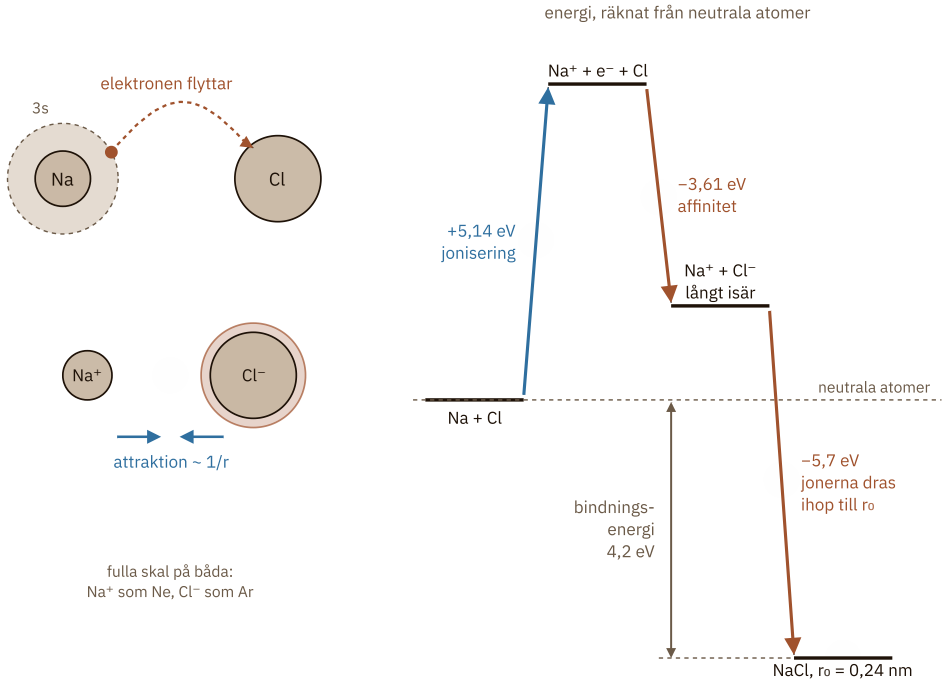
Att flytta en elektron från natrium till klor kostar energi innan jonerna ens har närmat sig varandra. Två storheter avgör kostnaden:

- **Joniseringsenergin** E_{jon} är energin som krävs för att ta bort elektronen från den neutrala atomen. För Na är den $5{,}138$ eV.
- **Elektronaffiniteten** E_{aff} är energin som frigörs när en neutral atom tar upp en extra elektron. För Cl är den $3{,}613$ eV, eftersom $3p$-skalet då blir fullt och den extra elektronen känner en stor del av kärnladdningen.

Att bilda två joner långt från varandra kostar alltså nettot

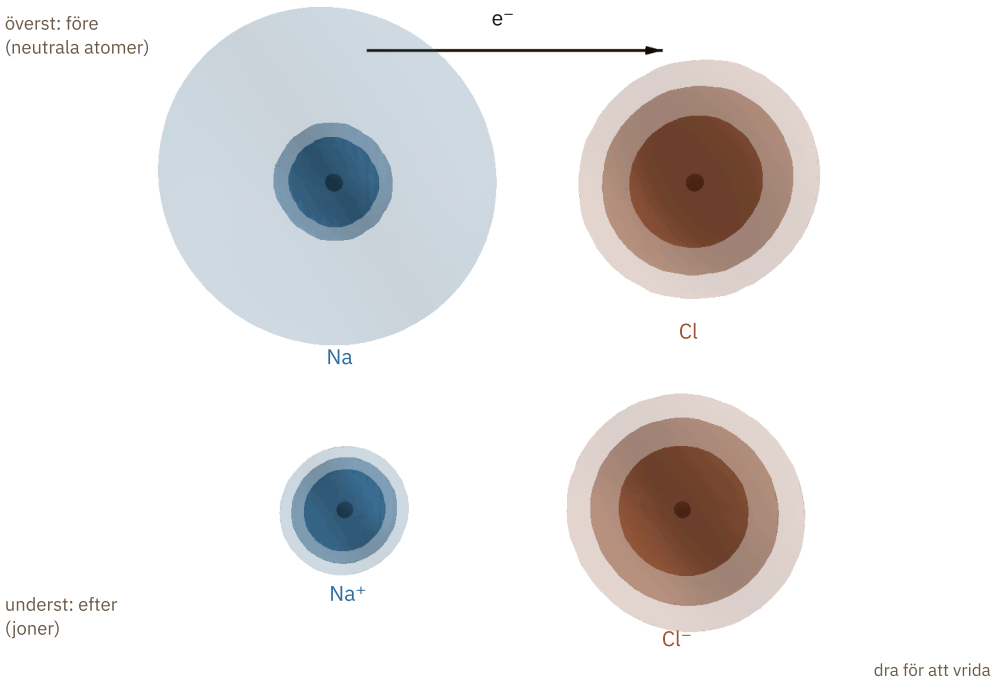
$$\Delta E = E_{\text{jon}} - E_{\text{aff}} = 5{,}138\ \text{eV} - 3{,}613\ \text{eV} = 1{,}525\ \text{eV}$$

Jonerna är alltså *inte* lägre i energi än de neutrala atomerna så länge de är åtskilda. Det är först den elektriska attraktionen mellan dem som gör bindningen lönsam.



Energibokföringen för NaCl, räknat från två neutrala atomer. Att flytta elektronen kostar netto $5{,}14 - 3{,}61 = 1{,}53$ *eV, och först när jonerna dras ihop till* r_0 *(*$-5{,}7$ *eV) hamnar molekylen* $4{,}2$ *eV under atomerna.*

Överföringen syns också i elektronmolnen. Natriums ensamma $3s$-elektron är svagt bunden och sprider ut sig långt från kärnan. När den är borta återstår ett kompakt Na^+ med bara fyllda inre skal. Klor tar emot elektronen i $3p$-skalet, och Cl^- blir något större än den neutrala atomen.



Na och Cl före (överst) och efter (underst) elektronöverföringen, i 3D (vrid med musen). Na krymper kraftigt när den yttre $3s$-elektronen försvinner, och Cl^- sväller lite. Isoytorna ligger vid samma täthet för alla fyra, $0{,}05$, $0{,}005$ och $0{,}0005$ elektroner per a_0^3, och hovringen visar radien. Kvalitativ modell med Slater-orbitaler.

Jonbindningar kan också omfatta två elektroner per atom. Jordalkalimetaller som magnesium lämnar ifrån sig två elektroner och bildar till exempel $\mathrm{Mg}^{2+}(\mathrm{Cl}^-)_2$. Överföring av fler än två elektroner är ovanlig, och då tar kovalent bindning över.

---

2. Potentialkurvan $U(r)$

När jonerna närmar sig varandra sjunker den elektriska potentiella energin som för två punktladdningar, $-ke^2/r$ med $ke^2 = 1{,}44$ eV·nm. På kort avstånd överlappar elektronmolnen, och Paulis uteslutningsprincip tvingar elektronerna till högre tillstånd. Det ger en repulsion som växer mycket snabbt. En enkel modell är

$$U(r) = -\frac{ke^2}{r} + \frac{B}{r^n}$$

där B och exponenten n anpassas till mätdata. Summan har ett minimum vid jämviktsavståndet r_0: för $r > r_0$ drar jonerna i varandra, för $r < r_0$ stöter de bort varandra.

Härledning av energin i minimum

Villkoret för minimum.

$$\frac{dU}{dr} = \frac{ke^2}{r^2} - \frac{nB}{r^{n+1}} = 0 \quad \text{vid } r = r_0$$

$$B = \frac{ke^2\, r_0^{n-1}}{n}$$

Sätt tillbaka i U.

$$U(r_0) = -\frac{ke^2}{r_0} + \frac{ke^2\, r_0^{n-1}}{n\, r_0^{n}} = -\frac{ke^2}{r_0} + \frac{ke^2}{n\, r_0}$$

$$U(r_0) = -\frac{ke^2}{r_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

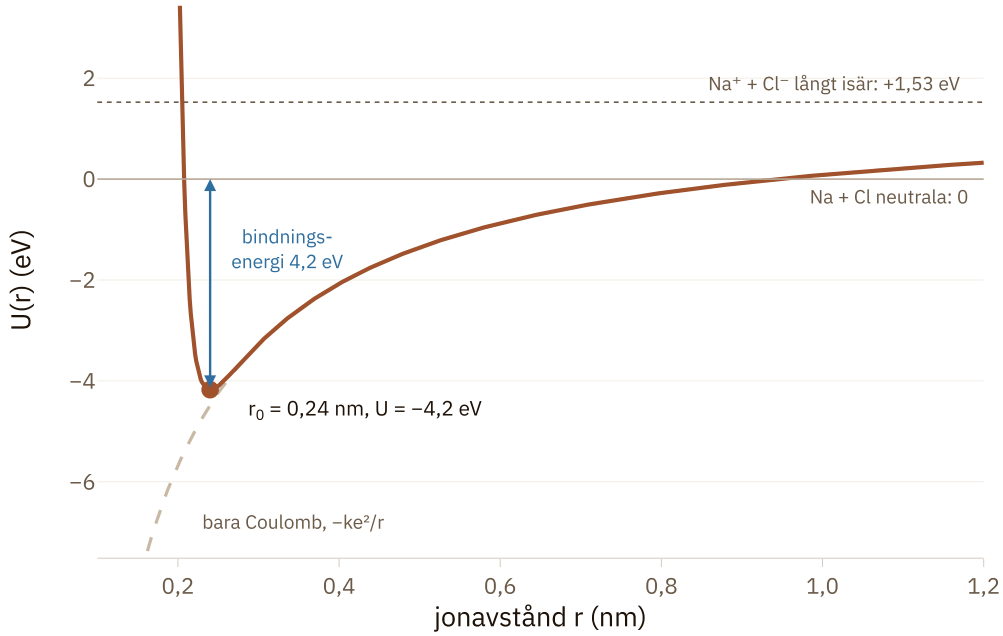
Repulsionen minskar alltså bindningen med andelen $1/n$ av punktladdningsvärdet.

$$\boxed{U(r_0) = -\frac{ke^2}{r_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

Bindningsenergin är energin som krävs för att dela molekylen i två **neutrala** atomer. Jonerna ska först dras isär, vilket kostar $|U(r_0)|$, och sedan få tillbaka elektronen, vilket ger tillbaka $E_{\text{jon}} - E_{\text{aff}}$:

$$\boxed{E_B = |U(r_0)| - (E_{\text{jon}} - E_{\text{aff}})}$$

NaCl. Som punktladdningar på avståndet $0{,}24$ nm är $ke^2/r_0 = 1{,}44/0{,}24 = 6{,}0$ eV. Det uppmätta minimivärdet är $-5{,}7$ eV, något grundare eftersom molnen redan överlappar. Bindningsenergin blir $5{,}7 - 1{,}525 \approx 4{,}2$ eV.



$U(r)$ för Na^+ och Cl^-, räknat från två neutrala atomer. Långt isär ligger jonerna $1{,}53$ eV över de neutrala atomerna. Den streckade kurvan är ren Coulombattraktion. Den heldragna är modellkurvan med repulsion, anpassad så att minimum hamnar vid $0{,}24$ nm och $-5{,}7$ eV elektrisk potentiell energi, alltså $-4{,}2$ eV relativt de neutrala atomerna.

⚠ Vanliga fel

- **Bindningsenergin räknas mot joner i stället för mot atomer.** $|U(r_0)|$ är energin för att separera jonerna. Bindningsenergin för molekylen gäller neutrala atomer, så $E_{\text{jon}} - E_{\text{aff}}$ ska dras av.
- **Fel tecken på elektronaffiniteten.** Affiniteten är energi som *frigörs*. Nettokostnaden för jonerna är $E_{\text{jon}} - E_{\text{aff}}$, inte summan.
- **Punktladdningsvärdet tas som exakt.** ke^2/r_0 överskattar bindningen, eftersom repulsionen från överlappande elektronmoln saknas. Faktorn $1 - 1/n$ korrigerar för det.
- **Enheterna i ke^2/r.** Med $ke^2 = 1{,}44$ eV·nm och r i nm blir svaret direkt i eV. Med SI-enheter blir det joule och måste räknas om.

---

3. Lösta exempel

Exempel — Kaliumbromid

Joniseringsenergin för kalium är $4{,}34$ eV och elektronaffiniteten för brom är $3{,}36$ eV. Jämviktsavståndet i en KBr-molekyl är $0{,}282$ nm. a) Vilken energi krävs för att bilda åtskilda joner K^+ och Br^- ur neutrala atomer? b) Vilken är den elektriska potentiella energin vid r_0 om jonerna

behandlas som punktladdningar? c) Uppskatta bindningsenergin med punktladdningsmodellen. d) Upprepa c) med repulsionen B/r^9, alltså $n = 9$.

Lösning

a)

$$E_{\text{jon}} - E_{\text{aff}} = 4{,}34\ \text{eV} - 3{,}36\ \text{eV} = \boxed{0{,}98\ \text{eV}}$$

b)

$$U = -\frac{ke^2}{r_0} = -\frac{1{,}44\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{0{,}282\ \text{nm}} = \boxed{-5{,}11\ \text{eV}}$$

c)

$$E_B = 5{,}11\ \text{eV} - 0{,}98\ \text{eV} = \boxed{4{,}13\ \text{eV}}$$

d) Med $n = 9$ minskar $|U(r_0)|$ med andelen $1/9$:

$$|U(r_0)| = 5{,}11 \cdot \frac{8}{9}\ \text{eV} = 4{,}54\ \text{eV}$$

$$E_B = 4{,}54\ \text{eV} - 0{,}98\ \text{eV} = \boxed{3{,}56\ \text{eV}}$$

Repulsionen sänker uppskattningen med ungefär $0{,}6$ eV, alltså runt $14\ \%$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Se jämförelsen i 6. Bindningstyperna jämförda.

Läsning

- 42.1 Types of Molecular Bonds

Van der Waals-bindning

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #molekylfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Dipolmoment, Jonbindning

Svaga elektrostatiska bindningar mellan atomer eller molekyler med partiella laddningar, i fyra varianter av avtagande styrka. Jon–dipol verkar när salt löser sig i vatten. Dipol–dipol är den grupp vätebindningen tillhör. Dipol–inducerad dipol uppstår när en molekyl med dipolmoment inducerar ett moment i en atom, som när H–Cl polariserar argon. Inducerad dipol–inducerad dipol, Londondispersion, är rent kvantmekanisk och verkar även mellan två heliumatomer. Var för sig är de svaga, men tillsammans kan de ge en stark bindning.

Formeln, symbol för symbol

$$U(r) = \underbrace{4\varepsilon}_{\substack{\varepsilon=\text{brunnens}\\ \text{djup}}} \left[\underbrace{\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12}}_{\substack{\text{repulsion när}\\ \text{molnen möts}}} - \underbrace{\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}}_{\substack{\text{London-}\\ \text{attraktion}}} \right]$$

Den branta r^{-12}-termen vinner på kort avstånd och den mjukare r^{-6}-termen på långt avstånd. Emellan finns ett minimum, vid $2^{1/6}\sigma$ med djupet ε.

1. Fyra varianter och deras räckvidd

Alla fyra varianterna är växelverkan mellan laddningsfördelningar som inte tar ut varandra: en jon, ett permanent dipolmoment eller ett moment som induceras av grannen. Ju mindre laddning som är inblandad, desto svagare blir växelverkan och desto snabbare avtar den med avståndet r.

variant	exempel	avtar ungefär som
jon–dipol	Na^+ i vatten	$1/r^2$
dipol–dipol	HCl–HCl, vätebindning	$1/r^3$ vid fast orientering

variant	exempel	avtar ungefär som
dipol–inducerad dipol	HCl–Ar	$1/r^6$
inducerad–inducerad (London)	He–He, Ar–Ar	$1/r^6$

Varför $1/r^6$ för inducerade dipoler. En dipol p ger på avståndet r ett elektriskt fält av storleken

$$E \propto \frac{p}{r^3}$$

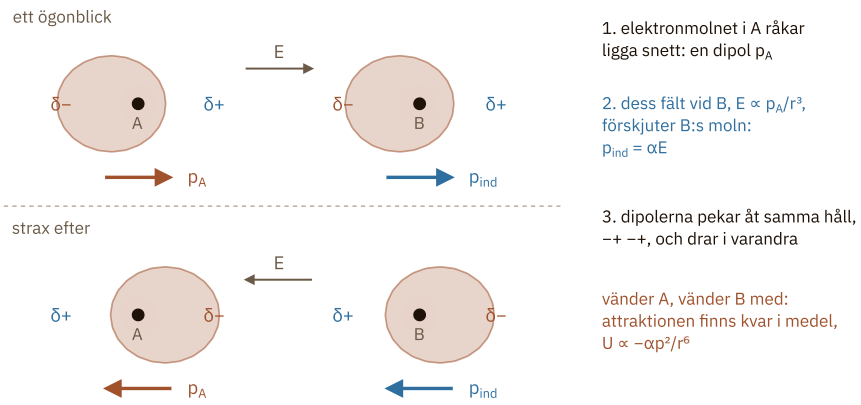
Fältet inducerar ett moment i grannatomen som är proportionellt mot fältet, med polariserbarheten α:

$$p_{\text{ind}} = \alpha E \propto \frac{\alpha p}{r^3}$$

Energin för det inducerade momentet i fältet blir

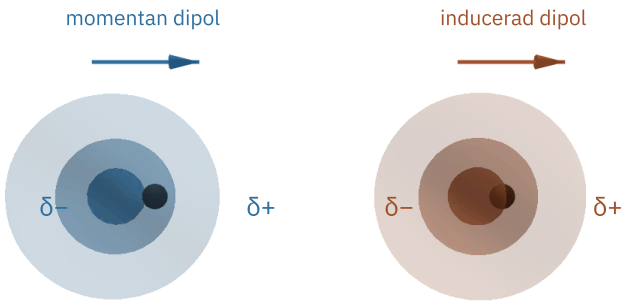
$$U \propto -p_{\text{ind}} E \propto -\frac{\alpha p^2}{r^6}$$

Ingen atom har ett permanent dipolmoment, men elektronmolnet fluktuerar hela tiden. Ett ögonblickligt moment i en atom inducerar ett moment i grannen, och växelverkan mellan dem är i medel attraktiv. Det är Londondispersionen, och den förklarar att ädelgaser och molekyler som H_2, O_2 och N_2 alls kan bli flytande och fasta.



Londondispersion. Elektronmolnet i A fluktuerar och ger en ögonblicklig dipol, vars fält polariserar B åt samma håll. När A:s dipol vänder följer B med, så attraktionen finns kvar i medel.

Samma sak som elektronmoln: i ögonblicket är molnet i A förskjutet åt ena hållet, och fältet från A drar molnet i B åt samma håll.



dra för att vrida

Två ädelgasatomer i 3D (vrid med musen). Molnet i A är för ögonblicket förskjutet åt vänster, så A får en dipol med $\delta+$ mot B. Fältet drar B:s moln mot A, och B får en inducerad dipol åt samma håll. $\delta+$ i A och $\delta-$ i B ligger närmast varandra, så atomerna attraheras. Förskjutningen är kraftigt överdriven, och modellen är kvalitativ (förskjutna exponentiella moln, isoytor vid 50, 20 och 5 % av maxtätheten).

---

2. Lennard-Jones-potentialen

En vanlig modell för två neutrala atomer kombinerar attraktionen $\propto -1/r^6$ med en brant repulsion när elektronmolnen överlappar. Repulsionen väljs av räknetekniska skäl som $1/r^{12}$:

$$U(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$$

Parametern σ är avståndet där $U = 0$, och ε är brunnens djup.

Härledning av minimum

Derivera.

$$\frac{dU}{dr} = 4\varepsilon\left[-\frac{12\,\sigma^{12}}{r^{13}} + \frac{6\,\sigma^{6}}{r^{7}}\right]$$

Sätt lika med noll och multiplicera med $r^{13}/(24\varepsilon\sigma^6)$:

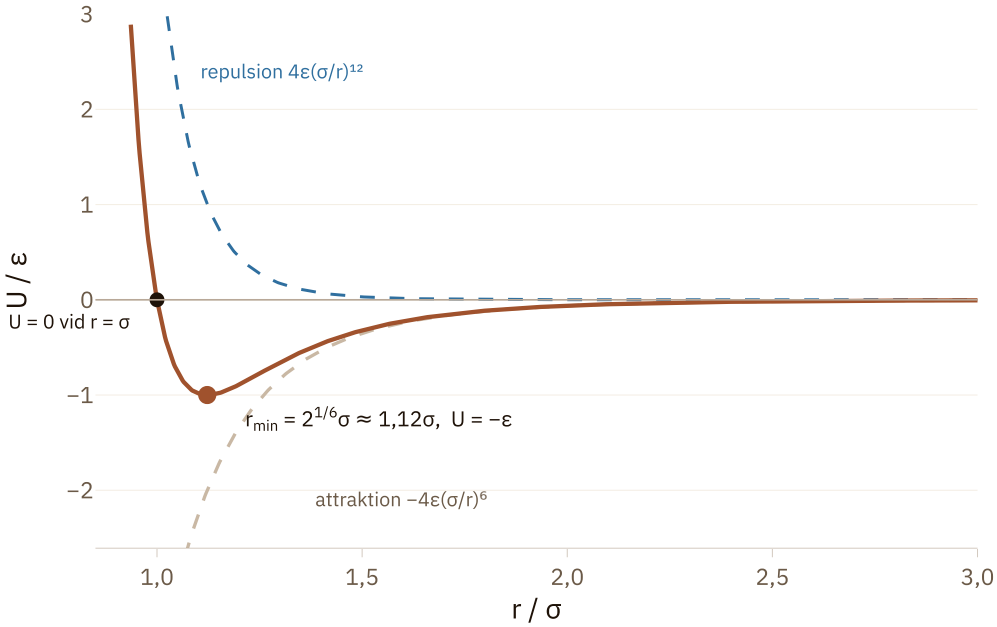
$$-2\sigma^6 + r^6 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r_{\min}^6 = 2\sigma^6$$

Energin i minimum. Där är $(\sigma/r_{\min})^6 = 1/2$:

$$U(r_{\min}) = 4\varepsilon\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = -\varepsilon$$

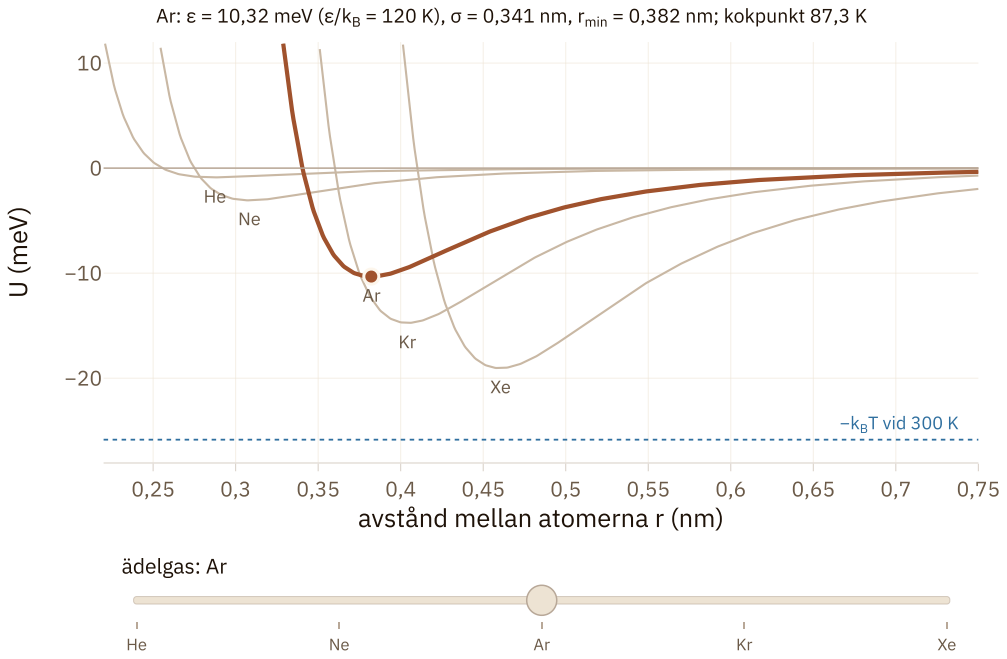
$$\boxed{r_{\min} = 2^{1/6}\,\sigma \approx 1{,}12\,\sigma \qquad U(r_{\min}) = -\varepsilon}$$

Bindningsenergin är alltså ε och jämviktsavståndet något större än σ.



Lennard-Jones-potentialen i dimensionslösa enheter. Den repulsiva termen dominerar innanför $r = \sigma$, den attraktiva utanför. Minimum ligger vid $2^{1/6}\sigma$ med djupet ε.

Parametrarna växer nedåt i ädelgasgruppen. Större atomer har fler och löst bundna elektroner, som är lättare att polarisera, så brunnen blir djupare och flyttas utåt.



Lennard-Jones-potentialen för ädelgaserna, med reglage för gasen. Brunnen djupnar från knappt 1 *meV för He till* 19 *meV för Xe, och kokpunkten följer med: för Ne–Xe ligger den vid ungefär* $0{,}7$*–*$0{,}8$ *gånger* ε/k_B*. Den prickade linjen är* $-k_BT$ *vid rumstemperatur, djupare än alla brunnarna. Parametrarna är typiska tabellvärden, kokpunkterna från Fysika T g3.*

---

3. Vätebindning

Vätebindningen är en särskilt stark variant. En väteatom som är kovalent bunden till en elektronegativ atom, som syre eller kväve, har fått sin elektron förskjuten så mycket att den nästan är en naken proton. Protonen är mycket mindre än någon annan positiv jon och kan därför komma riktigt nära en annan molekyl, polarisera den och binda de två molekylerna till varandra.

- Bindningsenergin är oftast under $0{,}5$ eV, större än för vanlig van der Waals-bindning men mindre än för starka bindningar.
- Den håller ihop de två strängarna i DNA, tvärbinder långa polymerkedjor och bidrar tillsammans med van der Waals-krafter till strukturen i is.
- Bara väte kan bilda den, eftersom bara väte blir en ren kärna när elektronen dras bort.

Mer om vätebindningen, med vatten, is och DNA, i Vätebindning.

---

4. Energiskalan mot k_BT

Om bindningen håller avgörs av jämförelsen med den termiska energin k_BT. Vid 300 K är

$$k_B T = \frac{1{,}381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1{,}602 \cdot 10^{-19}}\ \text{eV} = 0{,}0259\ \text{eV}$$

Fysika: Te

Starka bindningar på 1–5 eV är långt över det och bryts inte av värmerörelse. Van der Waals-bindningar på $0{,}1$ eV eller mindre ligger bara några gånger över, eller under, $k_B T$. Därför är ämnen som bara hålls ihop av van der Waals-krafter flytande eller fasta först vid låga temperaturer. Se också Temperatur och värme.

Vanliga fel

- **σ tas som jämviktsavståndet.** Vid $r = \sigma$ är $U = 0$. Minimum ligger vid $2^{1/6}\sigma \approx 1{,}12\sigma$.
- **Bindningsenergin tas som 4ε.** Faktorn 4 står framför parentesen, men djupet i minimum är ε.
- **Van der Waals tros kräva polära molekyler.** Londondispersionen verkar mellan alla atomer, även helium, eftersom den bygger på fluktuerande dipoler.
- **Vätebindning tros vara en kovalent bindning till väte.** Den kovalenta O–H-bindningen finns inom molekylen. Vätebindningen är den svaga bindningen *mellan* molekyler.
- **meV och eV blandas.** ε för ädelgaser ligger kring 10 meV $= 0{,}01$ eV.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Argon

Växelverkan mellan två argonatomer beskrivs med Lennard-Jones-potentialen med $\varepsilon = 0{,}0104$ eV och $\sigma = 0{,}340$ nm. a) Bestäm jämviktsavståndet. b) Bestäm bindningsenergin i meV. c) Vid vilken temperatur är $k_B T = \varepsilon$? Jämför med att argon stelnar vid ungefär 84 K.

Lösning

a)

$$r_{\min} = 2^{1/6} \cdot 0{,}340\ \text{nm} = 1{,}1225 \cdot 0{,}340\ \text{nm} = \boxed{0{,}382\ \text{nm}}$$

b) Bindningsenergin är brunnens djup:

$$E_B = \varepsilon = 0{,}0104\ \text{eV} = \boxed{10{,}4\ \text{meV}}$$

c)

$$T = \frac{\varepsilon}{k_B} = \frac{0{,}0104 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1{,}381 \cdot 10^{-23}\ \text{J/K}} \approx \boxed{121\ \text{K}}$$

Vid 84 K är $k_B T = 7{,}24$ meV, alltså av samma storlek som ε men något mindre. Det stämmer med att argon blir fast just där värmerörelsen inte längre räcker för att bryta de svaga bindningarna. Vid rumstemperatur är $k_B T$ två och en halv gånger ε, och argon är en gas.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Se jämförelsen i 6. Bindningstyperna jämförda.

Läsning

- 42.1 Types of Molecular Bonds

Vätebindning

19 okt. 2026, 8 min läsning

UTKAST

#fysik #molekylfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Dipolmoment, Van der Waals-bindning

---

En väteatom som är kovalent bunden till kväve, syre eller fluor har fått sin elektron så förskjuten att den nästan är en naken proton. Den lilla positiva änden kan komma mycket nära ett fritt elektronpar på en annan sådan atom och binda de två molekylerna till varandra. Det är vätebindningen. Med $0{,}1–0{,}4$ eV är den starkare än van der Waals-bindningen men mycket svagare än en kovalent bindning, och den är riktad. Den ger vatten dess höga kokpunkt, gör is lättare än vatten och håller ihop de två strängarna i DNA.

Formeln, symbol för symbol

$$U = \underbrace{-\frac{k\,\delta^2}{r_{\mathrm{HO}}}}_{\substack{\mathrm{H}^{\delta+}\text{ dras mot}\\ \text{grannens }\mathrm{O}^{\delta-}}} + \underbrace{\frac{k\,\delta^2}{r_{\mathrm{OO}}}}_{\substack{\text{de två }\mathrm{O}^{\delta-}\\ \text{stöter bort}\\ \text{varandra}}}$$

Partialladdningarna $\pm\delta$ sitter på atomerna som punktladdningar. Vätet ligger mellan de två syreatomerna, så attraktionen över det korta avståndet r_{HO} vinner över repulsionen över det längre r_{OO}.

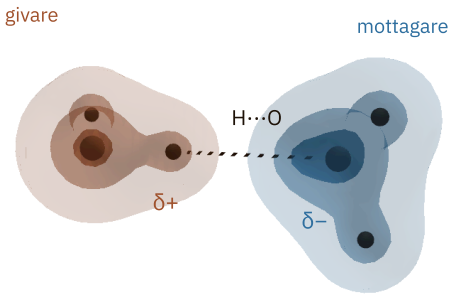
---

1. Mekanismen: en nästan naken proton

En vätebindning skrivs X–H···Y. Väteatomen sitter kovalent bunden till atomen X, **givaren**, och dras mot ett fritt elektronpar på atomen Y, **mottagaren**. Både X och Y är kväve, syre eller fluor.

- **Varför just N, O och F.** De drar starkt i elektronparet i bindningen till väte, så bindningen blir kraftigt polär, se Dipolmoment. De har också fria elektronpar som kan ta emot en vätebindning.
- **Varför bara väte.** Väte har bara en elektron. När den dras bort blir det kvar en ensam proton utan något inre elektronmoln, mycket mindre än någon annan positiv jon. Den kan därför komma riktigt nära mottagarens elektronpar.

Vätebindningen är alltså en extra stark variant av dipol–dipolbindningen i Van der Waals-bindning. Den kovalenta O–H-bindningen finns **inom** molekylen, vätebindningen **mellan** molekylerna.



dra för att vrida

Två vattenmolekyler i 3D (vrid med musen). Ett väte i givaren pekar rakt mot ett fritt elektronpar på mottagarens syre, och den prickade linjen är vätebindningen H···O, ungefär $0{,}19$ *nm. Givarens väte i bryggan har tunnare moln än det andra: elektronen är förskjuten mot syret. Båda molekylerna har vinkeln* $104{,}5^\circ$ *mellan sina O–H-bindningar. Kvalitativ modell (summor av atomtätheter), isoytor vid* 50*,* 20 *och* 5 *% av maxtätheten.*

---

2. Energi och riktning

Energin. En enkel modell placerar partialladdningar på atomerna och räknar med Coulombenergin mellan dem. I den linjära bryggan O–H···O har givarens väte $+\delta$ och båda syreatomerna $-\delta$. Givarens eget syre bidrar inte till energin mot vätet, eftersom de sitter i samma molekyl. Kvar blir attraktionen H···O och repulsionen O···O:

$$\boxed{U = k\,\delta^2\left(\frac{1}{r_{\mathrm{OO}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{HO}}}\right)}$$

Fysika: Fe1 (Coulombs lag, k*)*

För vatten ger modellen ungefär $-0{,}28$ eV, se exemplet nedan. Uppmätta vätebindningar ligger i intervallet

$$E_{\text{vätebindning}} \approx 0{,}1\text{–}0{,}4 \text{ eV}$$

alltså mellan van der Waals-bindningen, som är $0{,}1$ eV eller mindre, och den kovalenta bindningen på 1–5 eV. Se jämförelsen i 6. Bindningstyperna jämförda.

Vid rumstemperatur är $k_B T = 0{,}026$ eV, alltså några gånger till drygt tio gånger mindre än en vätebindning. Enskilda vätebindningar i flytande vatten bryts och bildas därför hela tiden, men många tillsammans håller.

Riktningen. Bindningen är starkast när X, H och Y ligger på en rad. Då ligger vätet mitt i bryggan och attraktionen H···Y vinner mest över repulsionen X···Y. Mottagarens fria elektronpar har dessutom bestämda riktningar, ungefär mot hörnen i en tetraeder som i metan. Vätebindningen är därför riktad, till skillnad från van der Waals-bindningen, och det är riktningen som bestämmer strukturen i is och DNA.

---

3. Vatten och is

En vattenmolekyl har två väten som kan ge vätebindningar och två fria elektronpar på syret som kan ta emot dem. Varje molekyl kan alltså delta i fyra vätebindningar, riktade ungefär mot hörnen i en tetraeder.

I **is** har varje molekyl precis fyra vätebindningar. Tetraedrarna fogas ihop till ett nätverk av sexkantiga ringar, den **hexagonala** isstrukturen, med mycket tomrum mellan molekylerna. När isen smälter bryts en del av bindningarna, nätverket faller delvis ihop, och molekylerna kommer närmare varandra. Därför är is lättare än vatten:

$$\rho_{\text{is}} = 916{,}2\ \text{kg/m}^3 \qquad \rho_{\text{vatten}} = 999{,}8\ \text{kg/m}^3 \qquad (0\ ^\circ\text{C})$$

Fysika: T h1

Vatten utvidgar sig alltså med $999{,}8/916{,}2 - 1 \approx 9\ \%$ när det fryser. Över smältpunkten fortsätter nätverket att falla ihop, och densiteten ökar till maximum vid $4\ ^\circ$C. Först därefter tar den vanliga värmeutvidgningen över. Det är **densitetsanomalin**: isen flyter, och sjöar fryser uppifrån.

---

4. Kokpunktsanomalin

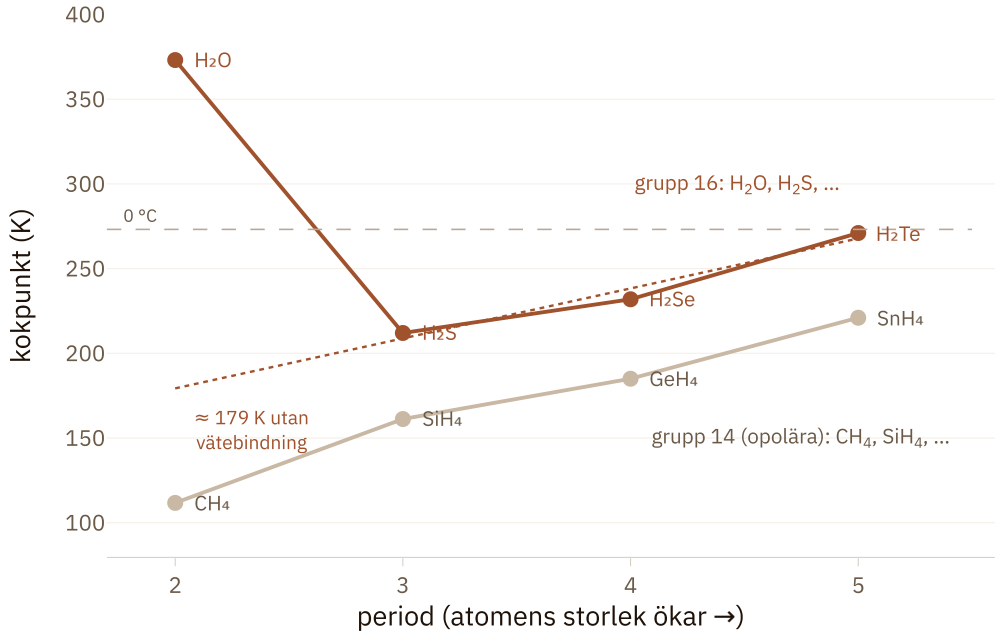
Vattnet och dess tyngre släktingar i grupp 16 har samma form, H–X–H, men olika stora centralatomer. Normalt stiger kokpunkten med molekylens storlek, eftersom större elektronmoln är lättare att polarisera och ger starkare Londondispersion, se Van der Waals-bindning.

ämne	period	kokpunkt
H_2O	2	373 K
H_2S	3	212 K
H_2Se	4	232 K

ämne	period	kokpunkt
H_2Te	5	271 K

Fysika: T g3 (H₂O, H₂S)

Från H_2S till H_2Te följer kokpunkten trenden. Förlängs trenden till H_2O hamnar kokpunkten kring 180 K, alltså nästan 200 K under den verkliga. Skillnaden är vätebindningarna: syre är tillräckligt elektronegativt för att bilda dem, svavel, selen och tellur är det inte. I grupp 14, där ingen av molekylerna bildar vätebindningar, stiger kokpunkten jämnt hela vägen från CH_4.



Kokpunkten för väteföreningarna i grupp 16 och, som jämförelse, grupp 14. Den prickade linjen är en rät linje anpassad till H_2S–H_2Te (minsta kvadratmetoden) och förlängd till period 2. Utan vätebindningar skulle vatten koka kring 180 K. Värdena för H_2O och H_2S är från Fysika, övriga är typiska tabellvärden.

---

5. DNA-basparen

DNA består av två strängar som hålls ihop av vätebindningar mellan baserna. Baserna passar ihop parvis, och antalet vätebindningar är bestämt av hur givare och mottagare sitter i molekylerna:

- **A–T**, adenin och tymin, binds med **två** vätebindningar.
- **G–C**, guanin och cytosin, binds med **tre** vätebindningar.

Varje enskild bindning är svag och kan brytas av värmerörelse, men en DNA-molekyl har tusentals baspar i rad, och tillsammans håller de ihop dubbelspiralen. Att bindningarna är svaga är samtidigt en förutsättning: strängarna måste kunna öppnas som ett blixtlås när DNA kopieras eller läses av, utan att

de kovalenta bindningarna inom strängarna bryts. Ett avsnitt med många G–C-par har fler vätebindningar och kräver högre temperatur för att separera.

⚠ Vanliga fel

- **Vätebindningen tas för O–H-bindningen.** O–H inom molekylen är en kovalent bindning på flera eV. Vätebindningen är den svaga bindningen H···O mellan två molekyler.
- **Allt väte tros bilda vätebindningar.** Vätet måste sitta på N, O eller F. Väte på kol, som i metan, ger ingen vätebindning, och därför följer $\mathrm{CH_4}$ den vanliga kokpunktstrenden.
- **Repulsionen glöms i punktladdningsmodellen.** Mottagarens syre stöter bort givarens syre. Utan termen $k\delta^2/r_{\mathrm{OO}}$ blir energin ungefär tre gånger för stor.
- **Fel avstånd.** r_{HO} i bryggan är avståndet O···O minus O–H-bindningens längd, inte O···O.
- **Tätheten i is tros vara större.** Det öppna hexagonala nätverket gör att is har *lägre* densitet än vatten, 916 mot 1000 kg/m³.
- **A–T och G–C blandas ihop.** A–T har två vätebindningar, G–C tre.

---

6. Lösta exempel

Exempel — Vätebindningen i en vattendimer

I en vattendimer pekar en O–H-bindning i den ena molekylen rakt mot syret i den andra. Avståndet O···O är $0{,}285$ nm och O–H-bindningen är $0{,}0958$ nm. Varje O–H-bindning har dipolmomentet $1{,}51$ D. a) Bestäm partialladdningen δ på väte, i enheter av e. b) Uppskatta bindningsenergin med punktladdningsmodellen $U = k\delta^2\,(1/r_{\mathrm{OO}} - 1/r_{\mathrm{HO}})$. c) Jämför med $k_B T$ vid 300 K.

Lösning

a) Dipolmomentet är $p = \delta\, d$ med d som bindningslängden, se Dipolmoment:

$$\delta = \frac{p}{d} = \frac{1{,}51 \cdot 3{,}336 \cdot 10^{-30}}{0{,}0958 \cdot 10^{-9}}\ \mathrm{C} = 5{,}26 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{C}$$

$$\frac{\delta}{e} = \frac{5{,}26 \cdot 10^{-20}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}} = \boxed{0{,}328}$$

Fysika: Te

b) Vätet ligger på linjen mellan syreatomerna:

$$r_{\mathrm{HO}} = 0{,}285\ \mathrm{nm} - 0{,}0958\ \mathrm{nm} = 0{,}189\ \mathrm{nm}$$

Med $ke^2 = 1{,}44$ eV·nm blir

$$U = 1{,}44 \cdot 0{,}328^2 \left(\frac{1}{0{,}285} - \frac{1}{0{,}189}\right)\ \mathrm{eV}$$
$$= 0{,}155 \cdot (-1{,}78)\ \mathrm{eV} \approx \boxed{-0{,}28\ \mathrm{eV}}$$

Bindningsenergin är alltså ungefär $0{,}28$ eV, mitt i intervallet $0{,}1$–$0{,}4$ eV.

c)

$$\frac{0{,}28\ \mathrm{eV}}{0{,}0259\ \mathrm{eV}} \approx \boxed{11}$$

Vätebindningen är ungefär tio gånger starkare än den termiska energin. Det räcker för att bindningarna ska spela stor roll, men inte för att varje enskild bindning ska överleva länge i flytande vatten.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Vätebindningar ur smält- och ångbildningsvärmet

I is deltar varje vattenmolekyl i fyra vätebindningar, och varje bindning delas av två molekyler. När isen smälter och vattnet sedan kokar bryts i stort sett alla bindningarna. Smältvärmet är 333 kJ/kg, ångbildningsvärmet 2260 kJ/kg och molmassan $18{,}02$ g/mol. a) Hur mycket energi krävs per molekyl för att först smälta isen och sedan förånga vattnet? b) Uppskatta energin per vätebindning. c) Hur stor andel av bindningarna bryts redan när isen smälter, om smältvärmet också går åt till att bryta vätebindningar?

Lösning

a) Energin per molekyl är värmet per kilogram gånger massan för en molekyl, M/N_A:

$$E_{\text{molekyl}} = \frac{(L_f + L_v)\,M}{N_A} = \frac{2593 \cdot 10^3 \cdot 0{,}01802}{6{,}022 \cdot 10^{23}}\ \text{J}$$
$$= 7{,}76 \cdot 10^{-20}\ \text{J} = \boxed{0{,}48\ \text{eV}}$$

Fysika: T g3 (L_f, L_v), Te (N_A, e)

b) Fyra bindningar per molekyl, var och en delad av två, ger två bindningar per molekyl:

$$E_{\text{bindning}} \approx \frac{0{,}48\ \text{eV}}{2} = \boxed{0{,}24\ \text{eV}}$$

Det stämmer med intervallet $0{,}1$–$0{,}4$ eV och med punktladdningsmodellen i föregående exempel. Uppskattningen är grov: en del av värmet går till van der Waals-bindningarna mellan molekylerna och till volymarbetet när ångan bildas, så den överskattar energin per vätebindning något.

c) Smältvärmets andel av hela energin är

$$\frac{L_f}{L_f + L_v} = \frac{333}{2593} \approx \boxed{0{,}13}$$

Bara omkring $13\ \%$ av vätebindningarna bryts när is smälter, och resten bryts först vid förångningen. Flytande vatten är alltså fortfarande ett nätverk av vätebindningar, och därför är vattnets kokpunkt så hög.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.1 Types of Molecular Bonds

Dipolmoment

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #molekylfysik #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Kovalent bindning

När elektronparet i en bindning fördelas ojämnt mellan två atomer — säg $60\ \%$ mot $40\ \%$ — får den ena änden ett överskott och den andra ett underskott av negativ laddning, betecknade δ^- och δ^+. Laddningsseparationen ger bindningen ett dipolmoment, och om molekylens geometri inte får bidragen att ta ut varandra blir hela molekylen polär.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\vec{p}}_{\substack{\text{dipol-}\\\text{moment}}} = \underbrace{q}_{\text{laddning}}\ \underbrace{\vec{d}}_{\substack{\text{avstånd, från}\\-\text{ till }+}}$$

$$\underbrace{p}_{\text{molekylen}} = 2\ \underbrace{p_{\mathrm{OH}}}_{\substack{\text{en}\\\text{bindning}}}\ \underbrace{\cos\frac{\theta}{2}}_{\substack{\text{andelen längs}\\\text{symmetriaxeln}}}$$

Ett dipolmoment är laddning gånger avstånd. I en molekyl adderas bindningarnas moment som vektorer, så det är geometrin som avgör hur mycket som blir kvar.

---

1. Definitionen

Två lika stora och motsatta laddningar $+q$ och $-q$ på avståndet d från varandra bildar en elektrisk dipol. Nettoladdningen är noll, men laddningen är inte fördelad symmetriskt, och det mäts med dipolmomentet:

$$\boxed{\vec{p} = q\,\vec{d}}$$

där $\vec{d}$ pekar **från den negativa till den positiva** laddningen. Storleken är $p = qd$.

Enheten är C·m. För molekyler är talen små, och man använder ofta enheten debye:

$$1\ \mathrm{D} = 3{,}336 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{C \cdot m}$$

Som riktmärke ger en elementarladdning på avståndet $0{,}1$ nm momentet $1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-10} = 1{,}6 \cdot 10^{-29}$ C·m, alltså ungefär $4{,}8$ D.

---

2. Partialladdning och jonkaraktär

I en polär bindning sitter den förskjutna laddningen inte som punktladdningar, men man kan beskriva bindningen som om partialladdningarna $\pm\delta$ satt på atomkärnorna, på bindningslängdens avstånd r_0. Ur det uppmätta momentet blir då

$$\delta = \frac{p}{r_0}$$

Kvoten mellan partialladdningen och en hel elementarladdning kallas bindningens **jonkaraktär**:

$$\boxed{\text{jonkaraktär} = \frac{\delta}{e} = \frac{p}{e\,r_0}}$$

En ren kovalent bindning mellan lika atomer har jonkaraktären 0. En fullständig jonbindning med en överförd elektron skulle ha 1. Verkliga bindningar ligger däremellan.

---

3. Molekylens geometri

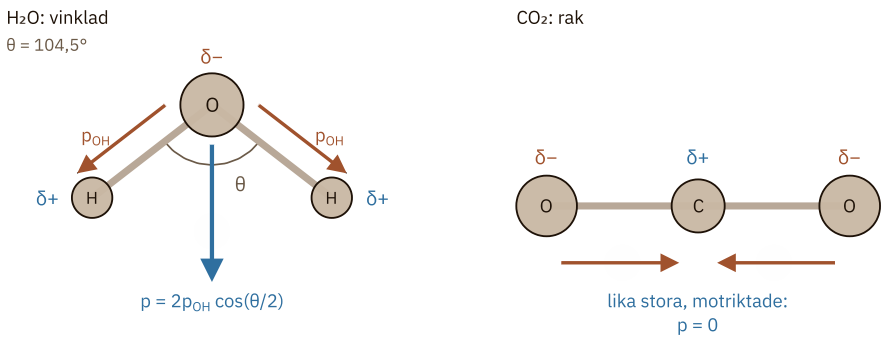
Molekylens totala dipolmoment är **vektorsumman** av bindningarnas moment. Om bidragen tar ut varandra är molekylen opolär, även om varje bindning är polär.

- $\mathrm{CO_2}$ **är linjär**, O=C=O. De två C=O-momenten är lika stora och pekar åt motsatta håll, så summan är noll.
- $\mathrm{H_2O}$ **är vinklad**, med bindningsvinkeln θ mellan de två O–H-bindningarna. Komposanterna vinkelrätt mot symmetriaxeln tar ut varandra, och komposanterna längs axeln adderas.

För vatten ger varje bindning bidraget $p_{\mathrm{OH}} \cos(\theta/2)$ längs symmetriaxeln:

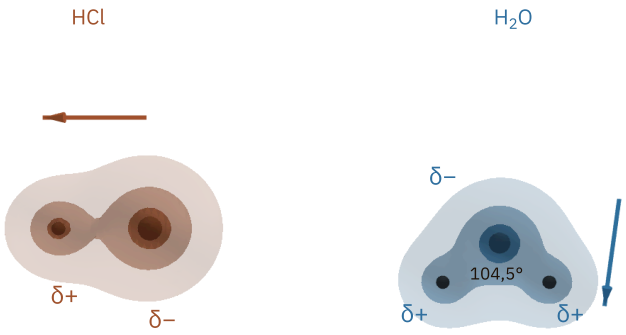
$$\boxed{p = 2\,p_{\mathrm{OH}} \cos\frac{\theta}{2}}$$

Det stora dipolmomentet hos vatten är skälet till vattnets stora dielektricitetskonstant och till att vatten löser salter så bra.



Bindningsdipolerna som vektorer från − till +. I vatten tar komposanterna vinkelrätt mot symmetriaxeln ut varandra, och resten adderas till $p = 2p_{\mathrm{OH}}\cos(\theta/2)$. *I den raka* $\mathrm{CO_2}$ *tar de två momenten ut varandra helt.*

Partialladdningarna syns som ett förskjutet elektronmoln. I HCl ligger det mesta av molnet kring klor, och vätet har bara ett tunt moln kvar. I vatten är molnet samlat kring syret, och de två vätena sticker ut som utbuktningar med vinkeln $104{,}5^\circ$ mellan sig.



dra för att vrida

Elektronmolnen för HCl *och* $\mathrm{H_2O}$ *i 3D (vrid med musen). Molnet är förskjutet mot den mer elektronegativa atomen, som blir* $\delta-$. *Pilarna är dipolmomenten, från − till +:* $1{,}08$ *D för* HCl *och* $1{,}85$ *D för* $\mathrm{H_2O}$. *Kvalitativ modell (summor av atomtätheter), isoytor vid* 50, 20 *och* 5 *% av maxtätheten.*

---

4. Dipolen i ett yttre fält

I ett homogent elektriskt fält $\vec{E}$ tar krafterna på $+q$ och $-q$ ut varandra, men de bildar ett kraftpar. Dipolen känner ett vridmoment och har en potentiell energi som beror på vinkeln ϕ mellan $\vec{p}$ och $\vec{E}$:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE\cos\phi$$

Energin är lägst när dipolen pekar längs fältet. I ett inhomogent fält, som fältet runt en jon, blir också nettokraften skild från noll, och dipolen dras in mot det starka fältet. Det är grunden för jon–dipol- och dipol–dipolbindningarna i Van der Waals-bindning.

⚠ Vanliga fel

- **Riktningen.** I fysiken pekar $\vec{p}$ från − till +. I kemin ritas ofta en pil åt motsatt håll, mot den negativa änden. Håll isär konventionerna.
- **Bindningsmomenten adderas som tal.** De är vektorer. I $\mathrm{CO_2}$ blir summan noll, och i $\mathrm{H_2O}$ måste vinkeln tas med.
- **Halva vinkeln glöms.** Varje O–H-bindning bildar vinkeln $\theta/2$ med symmetriaxeln, inte θ.
- **Debye räknas inte om.** $1\ \mathrm{D} = 3{,}336 \cdot 10^{-30}$ C·m. Med p i debye och r_0 i meter blir partialladdningen fel med en faktor 10^{30}.
- **Jonkaraktären tolkas som att en del av en elektron förs över.** Den är ett mått på hur ojämnt paret är fördelat, inte en bråkdel av en fysisk elektron som flyttat.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Jonkaraktären hos HCl

Vätekloridmolekylen har dipolmomentet $1{,}08$ D och bindningslängden $0{,}127$ nm. Bestäm partialladdningen på atomerna och bindningens jonkaraktär.

Lösning

Dipolmomentet i SI.

$$p = 1{,}08 \cdot 3{,}336 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{C \cdot m} = 3{,}60 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{C \cdot m}$$

Partialladdningen.

$$\delta = \frac{p}{r_0} = \frac{3{,}60 \cdot 10^{-30}}{0{,}127 \cdot 10^{-9}}\ \mathrm{C} = \boxed{2{,}84 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{C}}$$

Jonkaraktären.

$$\frac{\delta}{e} = \frac{2{,}84 \cdot 10^{-20}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 0{,}177 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{17{,}7\ \%}$$

Fysika: Te Bindningen är alltså till största delen kovalent, med klor som den negativa änden.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Vattnets bindningsdipoler

Vattenmolekylen har dipolmomentet $1{,}85$ D och bindningsvinkeln $104{,}5^\circ$. Bestäm dipolmomentet för en O–H-bindning. Förklara varför CO_2 saknar dipolmoment trots att C=O-bindningen är polär.

Lösning

Vatten. Lös ut p_{OH} ur $p = 2p_{OH}\cos(\theta/2)$ med $\theta/2 = 52{,}25^\circ$:

$$p_{OH} = \frac{p}{2\cos(\theta/2)} = \frac{1{,}85\ \text{D}}{2 \cdot 0{,}6122} = \boxed{1{,}51\ \text{D}}$$

Varje bindning är alltså starkare polär än molekylen som helhet antyder, eftersom en del av bidragen tar ut varandra.

Koldioxid. Molekylen är linjär, så de två C=O-momenten är lika stora och motriktade. Deras summa är

$$\vec{p} = \vec{p}_{CO} + (-\vec{p}_{CO}) = \boxed{\vec{0}}$$

Koldioxid är därför opolär, trots polära bindningar.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Se jämförelsen i 6. Bindningstyperna jämförda.

Läsning

- 42.1 Types of Molecular Bonds

Kristallstrukturer

19 okt. 2026, 9 min läsning

UTKAST

#fysik #fasta-tillståndets-fysik #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Metallisk bindning, Kovalent bindning

Varje grundämne i periodiska systemet i Fysika (T k3) har en kod för sin kristallstruktur: SC, BCC, FCC, HEX, DIA, TET, ORC, RHL, CUB eller MCL. Fem av dem räcker för nästan alla ämnen i kursen. De flesta metaller är bcc, fcc eller hcp, eftersom metallbindningen inte har någon riktning och atomerna därför packas så tätt som möjligt. Kol, kisel och germanium har diamantstruktur, eftersom den kovalenta bindningen är riktad och varje atom bara binder till fyra grannar. Den här noten går igenom alla strukturerna, de fem viktiga utförligt och de övriga kort.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{N}_{\substack{\text{atomer}\\ \text{per cell}}} = \frac{\overbrace{N_{\text{hörn}}}^{\text{delas av } 8}}{8} + \frac{\overbrace{N_{\text{sida}}}^{\text{delas av } 2}}{2} + \underbrace{N_{\text{inuti}}}_{\substack{\text{hela}\\ \text{atomer}}}$$

En atom räknas med den andel som ligger inne i cellen. Talen 8 och 2 gäller den kubiska cellen; i det hexagonala prismat (avsnitt 5) delas ett hörn av 6 prismor. Med N och gitterkonstanten a ur T k3 ger $\rho = NM/(N_A a^3)$ densiteten, se Kristallgitter.

1. Varför strukturerna ser olika ut

Strukturen bestäms av bindningen. Två fall täcker nästan hela periodiska systemet:

- **Oriktad bindning** (metaller, ädelgaser). I metallerna sitter jonerna i en elektrongas som binder lika bra åt alla håll, och ädelgaserna hålls ihop av van der Waals-bindning, som inte heller har någon riktning. Energin blir lägst när varje atom har så många grannar som möjligt, så strukturen blir tätpackad: fcc eller hcp med 12 grannar, eller bcc med 8.

- **Riktad bindning** (kovalenta ämnen). Kol, kisel och germanium har fyra valenselektroner och bildar fyra bindningar mot hörnen av en tetraeder. Det ger diamantstrukturen med bara 4 grannar, trots att den lämnar två tredjedelar av rummet tomt.

Kod i T k3	Struktur	Exempel ur T k3
SC	enkel kubisk	Po
BCC	rymdcentrerad kubisk	Li, Na, K, Fe, Cr, W
FCC	ytcentrerad kubisk	Al, Cu, Ag, Au, Ni, Pb
HEX	hexagonal (för metallerna oftast hcp)	Mg, Zn, Ti, Co (Se och Te är HEX men inte hcp)
DIA	diamant	C, Si, Ge
TET, ORC, RHL, CUB, MCL	övriga, se avsnitt 7	In, Ga, As, Mn, Pu

Fysika: T k3 (kristallstrukturen står i varje ruta i periodiska systemet)

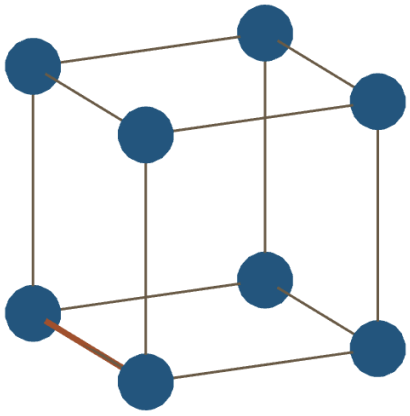
Atomerna ritas i figurerna som små klot så att cellen syns. I verkligheten är de så stora att närmaste grannar rör vid varandra, se Packningstäthet.

---

2. Enkel kubisk, sc

Bilden. En kub med en atom i varje hörn, och kuberna staplade som tärningar i en låda. Varje atom har en granne rakt framför, bakom, till höger, till vänster, ovanför och under sig.

sc (Po): 1 atom/cell · 6 grannar · packning 0,52



dra för att vrida

hörn (1/8) grannar rör vid varandra: kanten

Enkel kubisk enhetscell (vrid med musen, hover på atomerna). Hörnatomerna delas av åtta celler, så cellen har $8 \cdot \frac{1}{8} = 1$ *atom. Närmaste grannar rör vid varandra längs kanten.*

- **Atomer per cell:** $8 \cdot \frac{1}{8} = 1$.
- **Koordinationstal:** 6.
- **Närmaste granne:** a, längs kanten.
- **Packningstäthet:** $\pi/6 \approx 0{,}52$.
- **Exempel:** polonium, $a = 3{,}35$ Å, det enda grundämnet med SC i T k3.

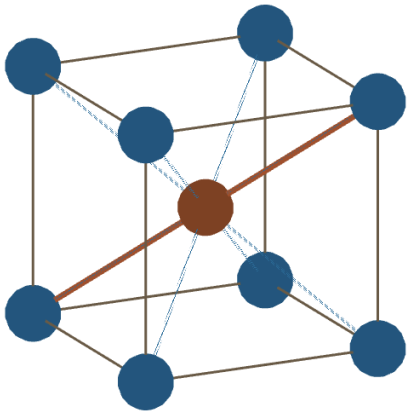
Nästan hälften av volymen är tom, och kuben av åtta atomer har ett stort hål i mitten. Därför är sc nästan aldrig lönsamt för en oriktad bindning.

---

3. Rymdcentrerad kubisk, bcc

Bilden. En atom i mitten av en kub med åtta grannar i hörnen. Mittatomen fyller hålet som sc lämnar. Varje hörnatom är i sin tur mittatom i en annan kub, så alla atomer har det likadant.

bcc (Fe, Na, W): 2 atomer/cell · 8 grannar · packning 0,68



dra för att vrida

hörn (1/8) mitt (1) grannar rör vid varandra: rymddiagonalen

Bcc-cellen. Mittatomen har sina åtta närmaste grannar i hörnen (prickade linjer), och atomerna rör vid varandra längs rymddiagonalen (orange).

- **Atomer per cell:** $8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2$.
- **Koordinationstal:** 8, och därtill 6 grannar bara lite längre bort, på avståndet a.
- **Närmaste granne:** $\sqrt{3}\,a/2$, en halv rymddiagonal.
- **Packningstäthet:** $\sqrt{3}\,\pi/8 \approx 0{,}68$.
- **Exempel:** alkalimetallerna Li, Na, K, Rb, Cs och Fe, Cr, V, Mo, W. Järn har $a = 2{,}87$ Å, så närmaste avståndet är $\sqrt{3} \cdot 2{,}87/2 = 2{,}49$ Å.

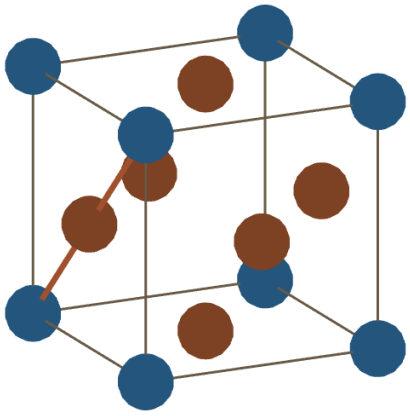
Bcc är inte tätpackad, men de sex grannarna på avståndet a ligger så nära att de också bidrar till bindningen. För flera metaller blir bcc därför ungefär lika gynnsam som fcc.

---

4. Ytcentrerad kubisk, fcc

Bilden. En kub med en atom i varje hörn och en mitt på varje sida. Lutar man kuben så att en rymddiagonal står lodrätt syns att atomerna ligger i tätpackade lager vinkelräta mot diagonalen, staplade ABCABC, se avsnitt 5.

fcc (Al, Cu, Ag, Au): 4 atomer/cell · 12 grannar · packning 0,74



dra för att vrida

hörn (1/8) sida (1/2) grannar rör vid varandra: sidodiagonalen

Fcc-cellen. Sidoatomerna (orange) delas av två celler, och atomerna rör vid varandra längs sidodiagonalen.

- **Atomer per cell:** $8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4$.
- **Koordinationstal:** 12.
- **Närmaste granne:** $\sqrt{2}\,a/2 = a/\sqrt{2}$, en halv sidodiagonal.
- **Packningstäthet:** $\pi/(3\sqrt{2}) \approx 0{,}74$, den största möjliga för lika stora klot.
- **Exempel:** Al, Cu, Ag, Au, Ni, Pt, Pb och ädelgaserna Ne, Ar, Kr, Xe. Koppar har $a = 3{,}61$ Å och närmaste avståndet $3{,}61/\sqrt{2} = 2{,}55$ Å.

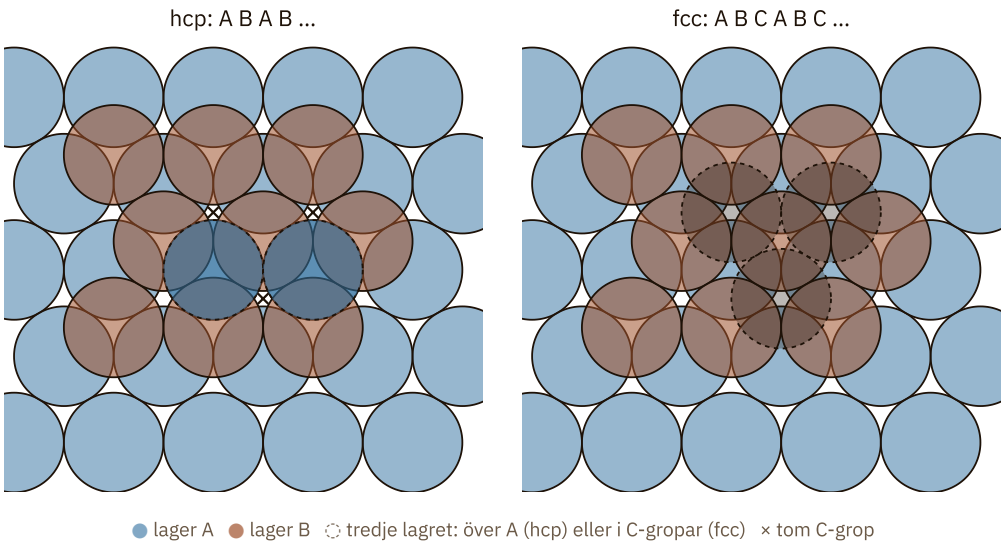
Fcc-metaller som koppar, guld och aluminium är mjuka och lätta att forma. De tätpackade lagren finns i fyra olika orienteringar, och i varje lager kan glidning ske i tre riktningar (12 glidsystem). Det är där dislokationerna rör sig. Hcp har bara en orientering av tätpackade lager.

---

5. Hexagonal tätpackning, hcp

Bilden. Lägg kulor tätt i ett plant lager: varje kula får sex grannar i lagret, och mellan dem bildas gropar. Nästa lager läggs i hälften av groparna. Det tredje lagret har två val:

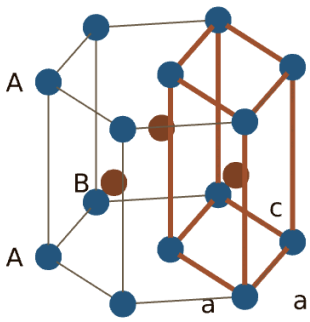
- **rakt över det första**, ABAB..., vilket är **hcp**,
- **i de gropar som ingen av de två första använt**, ABCABC..., vilket är **fcc**.



Tätpackade lager sedda uppifrån. Lager B (orange) ligger i groparna i lager A (blått). I hcp hamnar tredje lagret rakt över A, och C-groparna (×) står tomma genom hela kristallen. I fcc fyller tredje lagret C-groparna.

Båda staplingarna ger varje atom sex grannar i det egna lagret och tre i vart och ett av lagren ovanför och under, totalt 12. Packningstätheten blir densamma, $0{,}74$. Skillnaden syns först i det tredje lagret.

hcp (Mg, Zn, Ti): 2 atomer/primitiv cell · 12 grannar · packning 0,74



dra för att vrida

lager A lager B primitiv cell, γ = 120°

Hcp med Mg:s $c/a = 1{,}62$. Det hexagonala prismat innehåller tre primitiva celler. Den primitiva cellen i T k3 (orange) har $a = b$, höjden c och vinkeln $\gamma = 120°$ mellan a och b, och innehåller 2 atomer: en i lager A och en i lager B.

- **Atomer per cell:** 2 i den primitiva cellen, 6 i det hexagonala prismat ($12 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3$).

- **Koordinationstal:** 12.
- **Närmaste granne:** a, inom lagret.
- **Packningstäthet:** $0{,}74$, samma som fcc, när c/a har det ideala värdet.
- **Exempel:** Mg, Zn, Ti, Co, Cd, Be.

Avståndet mellan lager A och B är höjden i en regelbunden tetraeder med kanten a, och c är två sådana lager:

$$c = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,a \approx 1{,}633\,a$$

T k3 ger c/a för varje HEX-ämne. Magnesium ($1{,}62$) och titan ($1{,}59$) ligger nära idealet, medan zink ($1{,}86$) och kadmium ($1{,}89$) är utdragna längs c.

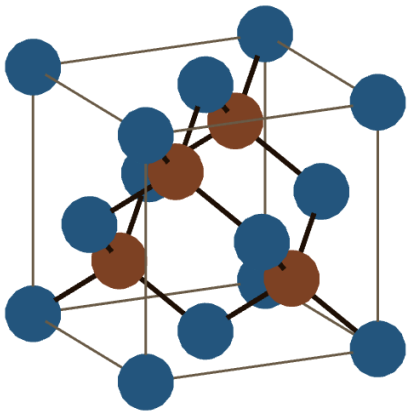
Fysika: T k3 (c/a för HEX)

---

6. Diamantstrukturen

Bilden. Två fcc-gitter inskjutna i varandra, det andra förskjutet en fjärdedel av rymddiagonalen, alltså $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})a$. Varje atom sitter mitt i en tetraeder av fyra grannar från det andra gittret och binder till dem med var sin kovalent bindning.

diamant (C, Si, Ge): 8 atomer/cell · 4 grannar · packning 0,34



dra för att vrida

fcc-gitter 1 fcc-gitter 2 (¼ rymddiagonal bort) bindning

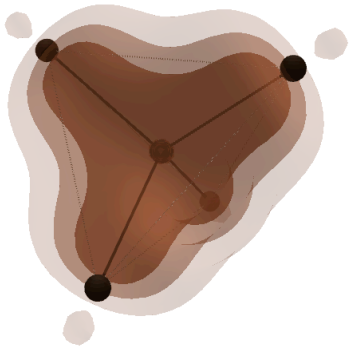
Diamantcellen. Det blå fcc-gittret ger 4 atomer, och de fyra orange atomerna inne i cellen hör till det förskjutna gittret. Varje atom har fyra bindningar (svarta) mot hörnen av en tetraeder.

- **Atomer per cell:** $4 + 4 = 8$.

- **Koordinationstal:** 4.
- **Närmaste granne:** $\sqrt{3}\,a/4$, en fjärdedel av rymddiagonalen.
- **Packningstäthet:** $\sqrt{3}\,\pi/16 \approx 0{,}34$.
- **Exempel:** C (diamant, $a = 3{,}57$ Å), Si ($5{,}43$ Å), Ge ($5{,}66$ Å).

Kol, kisel och germanium har konfigurationen s^2p^2 ytterst. I kristallen blandas s- och p-orbitalerna till fyra likvärdiga sp³-orbitaler som pekar mot tetraederns hörn med vinkeln $109{,}5°$ mellan sig. Varje sp³-orbital delar ett elektronpar med en granne. Bindningarna kan inte vridas, och därför bestämmer de grannarnas läge och inte packningen.

fyra riktade σ-bindningar mot hörnen av en tetraeder



dra för att vrida

De fyra σ-bindningarna kring en kolatom i diamant som elektronmoln (vrid med musen). Kvalitativ modell: sp³-hybrider $(s + \sqrt{3}\,p)/2$ med Slaterorbital (ζ ur Slaters regler), en bindningsorbital per granne. De små molnen bakom grannarna är baklober av grannarnas hybrider.

---

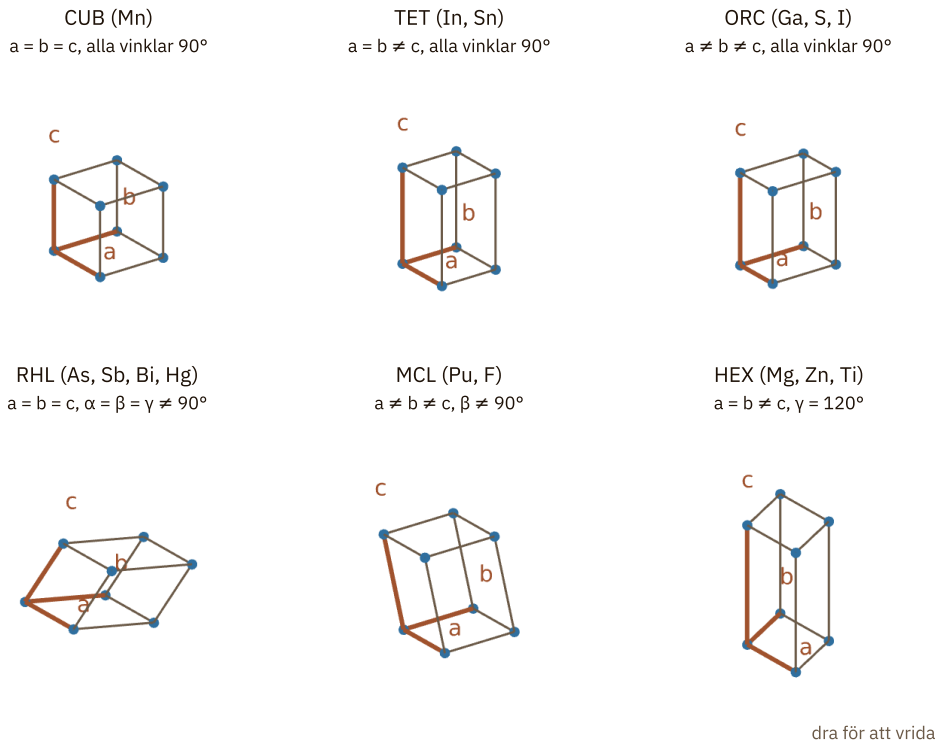
7. Övriga strukturer i T k3

Resten av koderna gäller ämnen med mer komplicerad bindning eller många atomer per cell. **Detaljerna ingår inte i kursen**, men koderna står i T k3 och beskriver cellens form:

Kod	Namn	Cellens form	Exempel ur T k3
CUB	komplex kubisk	$a = b = c$, alla vinklar $90°$, många atomer per cell	Mn, O, P

Kod	Namn	Cellens form	Exempel ur T k3
TET	tetragonal	$a = b \neq c$, alla vinklar $90°$	In, Sn, B
ORC	ortorombisk	$a \neq b \neq c$, alla vinklar $90°$	Ga, S, Cl, Br, I
RHL	romboedrisk	$a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma \neq 90°$	As, Sb, Bi, Hg
MCL	monoklin	$a \neq b \neq c$, en vinkel $\neq 90°$	F, Pu

Fysika: T k3



Cellformerna bakom koderna, med HEX som jämförelse (vrid med musen). Orange kanter är cellaxlarna a, b och c. Proportionerna är valda för att visa formen, inte ett bestämt ämne.

Tenn är ett exempel på att strukturen kan bero på temperaturen. Vitt tenn är tetragonalt (TET i T k3), men under 13 °C övergår det långsamt till grått tenn med diamantstruktur, som kisel.

8. Sammanfattning

Struktur	Atomer/cell	Koordinationstal	Närmaste granne	Packningstäthet	Exempe ur T k
sc	1	6	a	0,52	Po
bcc	2	8	$\sqrt{3}\,a/2$	0,68	Na, Fe,
fcc	4	12	$\sqrt{2}\,a/2$	0,74	Al, Cu, Ag, Au
hcp	2 (primitiv)	12	a	0,74	Mg, Zn,
diamant	8	4	$\sqrt{3}\,a/4$	0,34	C, Si, Ge

Fysika: T k3 (strukturer, atomer per cell 1, 2, 4, 2 och gitterkonstanter)

⚠ **Vanliga fel**

- **Hcp tas för kubisk.** HEX har två gitterkonstanter, a och c, och cellvolymen är inte a^3. Den primitiva cellen har volymen $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2c$.
- **Prismat och den primitiva cellen blandas.** Det hexagonala prismat har 6 atomer, den primitiva cellen i T k3 har 2. Båda ger samma densitet, så länge volymen hör till samma cell.
- **Diamant tas för fcc.** Gittret är fcc, men basen har två atomer. Cellen har 8 atomer, inte 4.
- **Fel diagonal.** Närmaste granne ligger längs rymddiagonalen i bcc ($\sqrt{3}\,a/2$), längs sidodiagonalen i fcc ($\sqrt{2}\,a/2$) och en fjärdedels rymddiagonal bort i diamant ($\sqrt{3}\,a/4$).
- **Tät packning tolkas som stark bindning.** Diamant har den lägsta packningstätheten i tabellen men är hårdast. Packningen speglar bindningens riktning, inte dess styrka.

9. Löst exempel

Exempel — Densiteten hos järn och aluminium ur T k3

Enligt T k3 är järn BCC med $a = 2{,}87$ Å och molmassan $55{,}845$ g/mol, och aluminium FCC med $a = 4{,}05$ Å och molmassan $26{,}98$ g/mol. Bestäm densiteten för båda. Varför är aluminium så mycket lättare, trots att det packas tätare?

Lösning

Järn. Bcc ger $N = 2$:

$$\rho_{\mathrm{Fe}} = \frac{N\,M}{N_A\,a^3} = \frac{2 \cdot 55{,}845 \cdot 10^{-3}}{6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot (2{,}87 \cdot 10^{-10})^3}$$

$$\rho_{\mathrm{Fe}} = \boxed{7{,}85 \cdot 10^{3}\ \mathrm{kg/m^3}}$$

Fysika: T k3, Te

Aluminium. Fcc ger $N = 4$:

$$\rho_{\mathrm{Al}} = \frac{4 \cdot 26{,}98 \cdot 10^{-3}}{6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot (4{,}05 \cdot 10^{-10})^3}$$

$$\rho_{\mathrm{Al}} = \boxed{2{,}70 \cdot 10^{3}\ \mathrm{kg/m^3}}$$

Jämförelsen. Antalet atomer per volym är

$$\frac{N}{a^3}: \quad 8{,}46 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}\ (\mathrm{Fe}), \qquad 6{,}02 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}\ (\mathrm{Al})$$

Aluminiumatomerna är större, så trots den tätare packningen får det färre atomer per volym än järn. Dessutom väger varje atom bara hälften så mycket (27 mot 56 g/mol). Densiteten bestäms alltså främst av atommassan och atomstorleken, inte av packningstätheten.

Rimlighetskoll. Typiska värden för järn och aluminium är $7{,}87 \cdot 10^3$ och $2{,}70 \cdot 10^3$ kg/m³.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.3 Structure of Solids

Molekylrotation

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #molekylfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Masströghetsmoment, Rörelsemängdsmoment, Reducerad massa

---

En diatomär molekyl kan rotera kring sitt masscentrum, och eftersom det inte finns någon potentiell energi är hela energin kinetisk: $E = K = L^2/2I$. Schrödingerekvationen kvantiserar rörelsemängdsmomentet på samma sätt som för väteatomen, vilket ger diskreta rotationsnivåer med växande avstånd. Övergångarna följer $\Delta l = \pm 1$ och ligger i mikrovågsområdet; $E = 0$ är tillåtet, så rotationen kan frysas ut. Det var så de första bindningsavstånden r_0 mättes.

$$\boxed{E_l = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I}, \qquad I = m_r r_0^2}$$

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{E_l}_{\substack{\text{bara rörelse-}\\\text{energi}}} = \frac{\overbrace{l(l+1)\hbar^2}^{L^2,\ \text{kvantiserat}}}{2I}$$

$$\underbrace{I}_{\substack{\text{tröghets-}\\\text{moment}}} = \underbrace{m_r}_{\substack{\text{reducerad}\\\text{massa}}}\ \underbrace{r_0^2}_{\substack{\text{bindnings-}\\\text{avståndet}^2}}$$

Det är den klassiska rörelseenergin $L^2/2I$ med L^2 kvantiserat. Nivåerna växer som $l(l+1)$ och glesnar uppåt, och eftersom I innehåller r_0^2 ger rotationsspektrumet bindningsavståndet.

---

1. Tröghetsmomentet och den reducerade massan

Vi behandlar molekylen som två punktmassor m_1 och m_2 på fast avstånd r_0 som roterar kring det gemensamma masscentrum. För att använda formeln i rutan behöver vi tröghetsmomentet uttryckt i r_0.

Masscentrum delar avståndet så att momenten balanserar:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

$$r_1 + r_2 = r_0$$

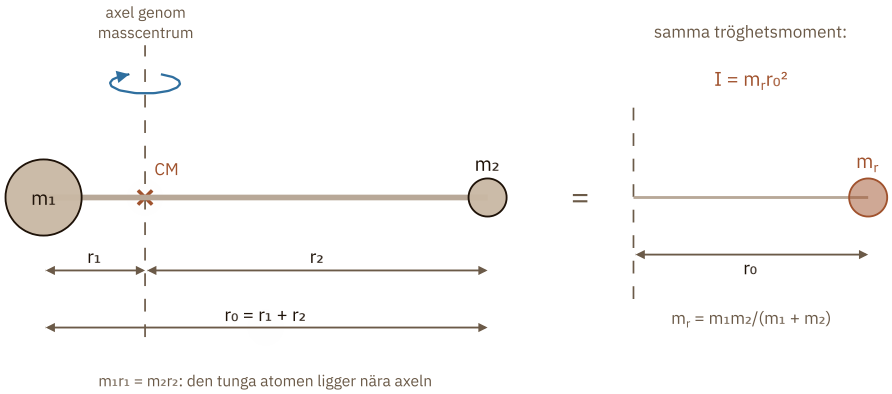
$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, r_0, \qquad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, r_0$$

Insatt i tröghetsmomentet för två punktmassor:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\, r_0^2$$

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, r_0^2 = m_r r_0^2$$

Rotationen av två kroppar blir alltså densamma som rotationen av en enda kropp med den reducerade massan m_r på avståndet r_0 från axeln. När den ena atomen är mycket lättare, som väte i HCl, blir m_r nästan lika med den lätta massan.



Molekylen som en hantel. Masscentrum ligger nära den tunga atomen, och rotationen kring det har samma tröghetsmoment som en enda kropp med den reducerade massan m_r på avståndet r_0 från axeln.

---

2. Nivåerna och avståndet mellan dem

All energi är kinetisk, $E = L^2/2I$, och rörelsemängdsmomentet är kvantiserat som $L^2 = l(l+1)\hbar^2$. Det ger formeln i rutan. För att slippa skriva bråket kortar vi

$$B = \frac{\hbar^2}{2I} \qquad \Rightarrow \qquad E_l = l(l+1)\, B$$

Avståndet mellan två grannivåer:

$$E_l - E_{l-1} = B\,[l(l+1) - (l-1)l]$$

$$E_l - E_{l-1} = 2l\,B$$

$$\boxed{E_l - E_{l-1} = \frac{l\,\hbar^2}{I}}$$

Avståndet växer linjärt med l: nivåerna $0,\ 2B,\ 6B,\ 12B,\ \ldots$ glesnar uppåt. Typiska värden på B är några tiondels till några meV, långt under $kT \approx 26$ meV vid rumstemperatur. Därför är många rotationsnivåer besatta samtidigt i en gas.

---

3. Urvalsregeln och rotationsspektrumet

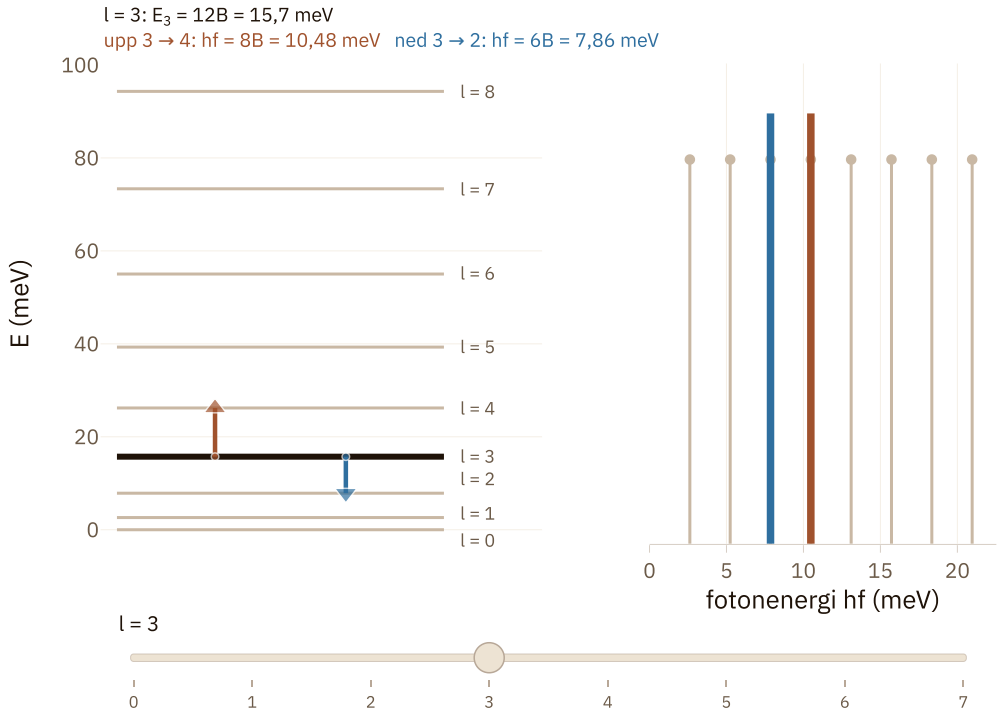
En foton bär rörelsemängdsmomentet $\hbar$, så vid absorption eller emission ändras l med exakt ett steg (se Urvalsregler):

$$\Delta l = \pm 1$$

Absorption från $l - 1$ till l kräver då fotonenergin

$$hf = E_l - E_{l-1} = 2lB, \qquad l = 1, 2, 3, \ldots$$

Det rena rotationsspektrumet är alltså en serie linjer vid $2B,\ 4B,\ 6B,\ \ldots$ med **konstant** avstånd $2B = \hbar^2/I$ mellan linjerna, trots att nivåerna glesnar. Fotonenergierna är några meV, vilket motsvarar våglängder från tiondels millimeter och uppåt: fjärr-IR och mikrovåg.



Rotationsnivåerna $E_l = l(l+1)B$ för HCl ($B = 1{,}31$ meV), med reglage för l. Absorptionen $l \to l+1$ (orange) och emissionen $l \to l-1$ (blå) följer $\Delta l = \pm 1$. Nivåerna glesnar uppåt, men linjerna till höger ligger med det konstanta avståndet $2B$.

Molekylen måste ha ett permanent dipolmoment för att fältet ska kunna vrida den. HCl och CO har ett rotationsspektrum, men $\mathrm{H_2}$, $\mathrm{N_2}$ och $\mathrm{O_2}$ har det inte.

---

4. Bindningsavståndet ur spektrumet

Mäter vi den lägsta linjen, övergången $0 \to 1$, går räkningen baklänges:

$$\Delta E_{0\to 1} = E_1 - E_0 = 2B = \frac{\hbar^2}{I}$$

$$I = \frac{\hbar^2}{\Delta E_{0\to 1}}$$

$$m_r r_0^2 = \frac{\hbar^2}{\Delta E_{0\to 1}}$$

$$\boxed{r_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{m_r\,\Delta E_{0\to 1}}}}$$

Med $\Delta E_{0\to 1} = hf$ räcker en frekvensmätning för att bestämma bindningsavståndet. Linjerna kan mätas med sex–sju värdesiffror, så r_0 blir mycket noggrant bestämt.

⚠ **Vanliga fel**

- **Atommassan i stället för den reducerade massan.** $I = m_r r_0^2$, inte $m_1 r_0^2$ eller $(m_1 + m_2) r_0^2$. För HCl är skillnaden mellan m_r och väteatomens massa bara $3\ \%$, men för CO är m_r knappt hälften av syreatomens massa.
- **l^2 i stället för $l(l+1)$.** Nivån $l = 1$ ligger på $2B$, inte på B.
- **Nivåavståndet tas som konstant.** Nivåerna glesnar ($2lB$). Det är *linjerna* i spektrumet som ligger med konstant avstånd $2B$.
- **Fel övergång läses av.** Frekvensen för $l \to l+1$ är $(l+1)\cdot 2B/h$. Står det “den tredje linjen” menas övergången $2 \to 3$, inte $3 \to 4$.
- **u omvandlas inte till kg.** $1\ \mathrm{u} = 1{,}661 \cdot 10^{-27}$ kg måste in innan I räknas i SI.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Rotationsnivåer i HCl

HCl-molekylen (^{1}H: $1{,}008$ u, ^{35}Cl: $34{,}969$ u) har bindningsavståndet $0{,}1275$ nm. Bestäm den reducerade massan, tröghetsmomentet, energin för nivån $l = 1$ och våglängden för övergången $l = 3 \to 2$.

Lösning

Reducerade massan.

$$m_r = \frac{1{,}008 \cdot 34{,}969}{1{,}008 + 34{,}969}\ \text{u} = 0{,}980\ \text{u} = 0{,}980 \cdot 1{,}661 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} = \boxed{1{,}63 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}$$

Fysika: Te

Tröghetsmomentet.

$$I = m_r r_0^2 = 1{,}627 \cdot 10^{-27} \cdot (0{,}1275 \cdot 10^{-9})^2 = \boxed{2{,}64 \cdot 10^{-47}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}$$

Energienheten B.

$$B = \frac{\hbar^2}{2I} = \frac{(1{,}0546 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 2{,}645 \cdot 10^{-47}} = 2{,}10 \cdot 10^{-22}\ \text{J} = 1{,}31\ \text{meV}$$

Nivån $l = 1$. $E_1 = 1 \cdot 2 \cdot B = \boxed{2{,}62\ \text{meV}}$.

Övergången $3 \to 2$. Nivåavståndet är $2lB$ med $l = 3$:

$$\Delta E = 6B = 7{,}87\ \text{meV}$$

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{7{,}87 \cdot 10^{-3}\ \text{eV}} = 1{,}58 \cdot 10^5\ \text{nm} = \boxed{158\ \mu\text{m}}$$

Våglängden ligger i fjärr-IR, som väntat för en rotationsövergång. Det är tillåtet enligt $\Delta l = -1$, så linjen syns i emission.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Bindningsavståndet i HF

Vätefluorid (^{1}H: 1,008 u, ^{19}F: 18,998 u) absorberar vid 1,233 THz i övergången $l = 0 \to 1$. Bestäm molekylens bindningsavstånd och frekvensen för övergången $l = 1 \to 2$.

Lösning

Reducerade massan.

$$m_r = \frac{1{,}008 \cdot 18{,}998}{1{,}008 + 18{,}998}\ \text{u} = 0{,}957\ \text{u} = 1{,}59 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

Energin för $0 \to 1$**.**

$$\Delta E_{0\to1} = hf = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 1{,}233 \cdot 10^{12} = 8{,}17 \cdot 10^{-22}\ \text{J} = 5{,}10\ \text{meV}$$

Tröghetsmomentet. $\Delta E_{0\to1} = \hbar^2/I$ ger

$$I = \frac{\hbar^2}{\Delta E_{0\to1}} = \frac{(1{,}0546 \cdot 10^{-34})^2}{8{,}17 \cdot 10^{-22}} = 1{,}36 \cdot 10^{-47}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Bindningsavståndet.

$$r_0 = \sqrt{\frac{I}{m_r}} = \sqrt{\frac{1{,}36 \cdot 10^{-47}}{1{,}59 \cdot 10^{-27}}} = 9{,}25 \cdot 10^{-11}\ \text{m} = \boxed{0{,}0925\ \text{nm}}$$

Övergången $1 \to 2$**.** Linjeenergin är $2lB$, så linjen för $l = 2$ har dubbla energin mot $l = 1$:

$$f_{1\to2} = 2f_{0\to1} = \boxed{2{,}47\ \text{THz}}$$

Rimlighetskoll. HF är kortare än HCl (0,1275 nm), vilket stämmer med att fluor är en mindre atom än klor.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.2 Molecular Spectra

Molekylvibration

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #molekylfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Kvantmekanisk harmonisk oscillator, Reducerad massa

---

Bindningen mellan två atomer kan ses som en fjäder, och molekylen behandlas därför som en kvantmekanisk harmonisk oscillator med kraftkonstanten k' i intervallet $100–2000$ N/m och den reducerade massan m_r. Nivåerna ligger jämnt fördelade, så alla övergångar har samma energi: $\Delta n = +1$ betyder att en foton absorberas, $\Delta n = -1$ att en emitteras. Fotonerna ligger i IR-området. Nollpunktsenergin $\frac{1}{2}\hbar\omega$ kan inte frysas ut.

$$\boxed{\Delta E = \hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{k'}{m_r}}}$$

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\Delta E}_{\text{ett steg}} = \hbar \underbrace{\omega}_{\substack{\text{fjäderns} \\ \text{vinkelfrekvens}}} = \hbar \sqrt{\frac{\overbrace{k'}^{\text{styvhet}}}{\underbrace{m_r}_{\substack{\text{reducerad} \\ \text{massa}}}}}$$

Det är samma vinkelfrekvens som för en massa i en fjäder, gånger $\hbar$. En styvare bindning ger större steg och tyngre atomer mindre, och stegen är lika stora hela vägen upp.

---

1. Fjädermodellen

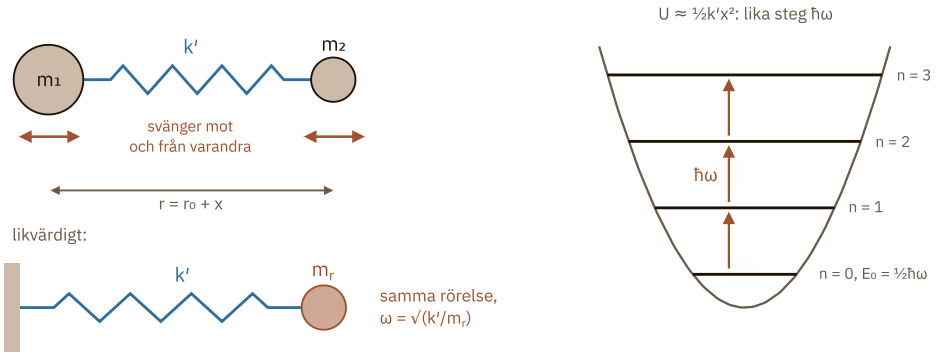
Nära jämviktsavståndet r_0 ser den potentiella energin mellan atomerna ut som botten av en parabel. Vi approximerar den med en fjäder:

$$U(r) \approx \frac{1}{2}k'(r - r_0)^2$$

Det är potentialen för en harmonisk oscillator med massan m_r, eftersom rörelsen av två kroppar mot varandra är densamma som för en kropp med den reducerade massan. Nivåerna blir därför de för en kvantmekanisk harmonisk oscillator med $m \to m_r$:

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\,\hbar\omega, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k'}{m_r}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Nivåerna ligger på samma avstånd $\hbar\omega$, vilket är formeln i rutan. Typiska värden är $\hbar\omega \approx 0{,}1$–$0{,}5$ eV, alltså fotoner med våglängder på några mikrometer.



Bindningen som en fjäder. Två atomer som svänger mot varandra rör sig som en enda kropp med den reducerade massan m_r, och nivåerna i den paraboliska brunnen ligger med lika steg $\hbar\omega$ ovanför nollpunktsenergin $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

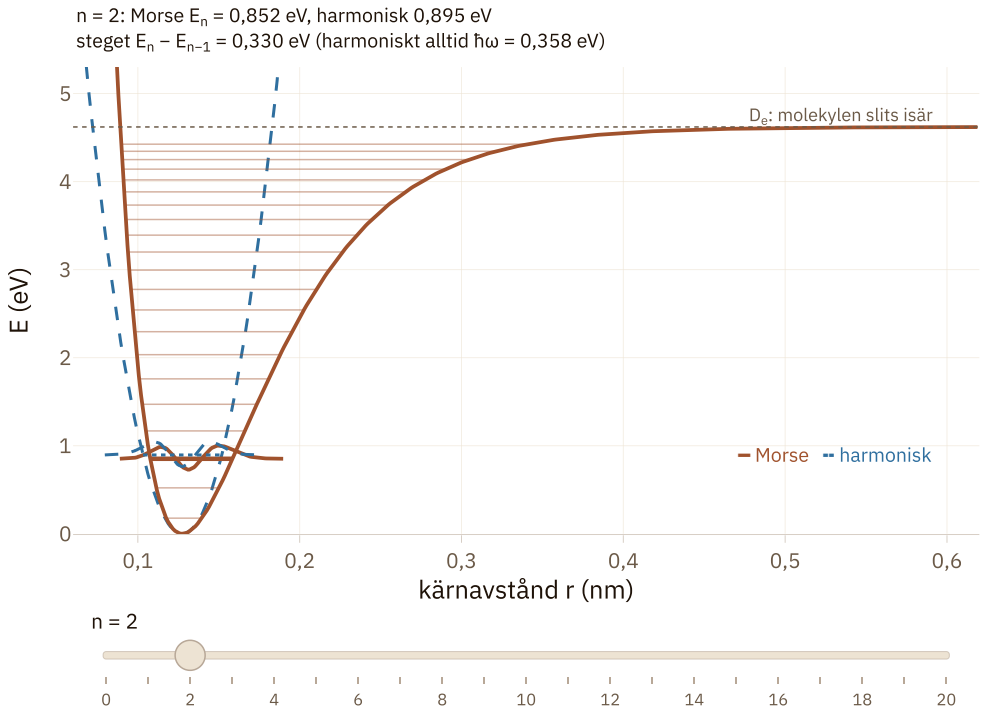
---

2. Nollpunktsenergin

Den lägsta nivån är inte botten av brunnen utan

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

En molekyl i vila med $r = r_0$ exakt skulle ha både bestämt läge och bestämd rörelsemängd, och det förbjuder osäkerhetsprincipen. Atomerna vibrerar därför även vid absoluta nollpunkten. En följd är att energin som krävs för att slita isär molekylen, dissociationsenergin, räknas från nivån $n = 0$ och inte från brunnens botten.



Fjädermodellen jämförd med en mer realistisk potential för HCl, Morsepotentialen, som planar ut vid dissociationsenergin ($D_e \approx 4{,}6$ eV räknat från botten, litteraturvärde). Reglaget väljer n och visar vågfunktionen ψ_n i båda potentialerna. Nära botten stämmer de, och $\hbar\omega$ blir densamma. Högre upp blir Morsebrunnen bredare än parabeln, och nivåerna tätnar tills molekylen slits isär. Det ligger utanför kursens modell.

---

3. Kraftkonstanten ur spektrumet

Urvalsregeln för en harmonisk oscillator är $\Delta n = \pm 1$, och alla sådana övergångar har samma energi. En enda absorptionslinje räcker då för att bestämma bindningens styvhet:

$$\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{\hbar\omega}{\hbar}$$

$$\boxed{k' = m_r\,\omega^2}$$

Kraftkonstanten är ett mått på hur snabbt bindningskraften växer när atomerna dras isär. Den bestäms av elektronerna i bindningen och inte av kärnorna.

---

4. Isotopeffekten

Byter vi en atom mot en isotop ändras bara massan, inte elektronerna, så k' är detsamma. Frekvensen skalar då med den reducerade massan:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sqrt{k'/m_r'}}{\sqrt{k'/m_r}}$$

$$\boxed{\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{m_r}{m_r'}}}$$

En tyngre isotop vibrerar långsammare och absorberar vid längre våglängd. I HCl-spektrumet syns detta som att varje linje är dubbel: klor förekommer naturligt som både ^{35}Cl och ^{37}Cl.

Vilken nivå är besatt? Kvoten mellan antalet molekyler i $n = 1$ och $n = 0$ ges av Boltzmannfaktorn $e^{-\hbar\omega/kT}$. Med $\hbar\omega = 0{,}36$ eV och $kT = 0{,}026$ eV blir den ungefär 10^{-6}. Vid rumstemperatur sitter alltså i praktiken alla molekyler i grundnivån, och absorptionen sker från $n = 0$.

⚠ **Vanliga fel**

- **ω och f blandas.** $\hbar\omega = hf$, men $k' = m_r\omega^2 = m_r(2\pi f)^2$. Stoppar vi in f i stället för ω blir k' en faktor $4\pi^2 \approx 39$ för litet.
- **Atommassan i stället för m_r.** Både ω och k' går via den reducerade massan.
- **Nollpunktsenergin glöms.** $E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega$, så $E_0 \neq 0$. Övergångsenergin $\hbar\omega$ påverkas däremot inte av halvan.
- **Olika linjer för olika n.** I den harmoniska modellen har $0 \to 1$, $1 \to 2$ och $2 \to 3$ samma energi $\hbar\omega$. Riktiga molekyler har något tätare nivåer högt upp, men det ligger utanför modellen.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Kraftkonstanten i HCl

HCl ($m_r = 0{,}980$ u) absorberar starkt vid $3{,}46$ μm i övergången $n = 0 \to 1$. Bestäm $\hbar\omega$, bindningens kraftkonstant och nollpunktsenergin. Hur stor är kvoten mellan antalet molekyler i $n = 1$ och $n = 0$ vid 300 K?

Lösning

Vibrationskvantumet.

$$\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{3460\ \text{nm}} = 0{,}3584\ \text{eV} \approx \boxed{0{,}358\ \text{eV}}$$

Fysika: Te

Vinkelfrekvensen.

$$\omega = \frac{0{,}3584 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1{,}0546 \cdot 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}} = 5{,}44 \cdot 10^{14}\ \text{rad/s}$$

Kraftkonstanten. Med $m_r = 0{,}980 \cdot 1{,}661 \cdot 10^{-27} = 1{,}627 \cdot 10^{-27}$ kg:

$$k' = m_r\omega^2 = 1{,}627 \cdot 10^{-27} \cdot (5{,}44 \cdot 10^{14})^2 = \boxed{482\ \text{N/m}}$$

Nollpunktsenergin. $E_0 = \tfrac{1}{2}\hbar\omega = \boxed{0{,}179\ \text{eV}}$.

Besättningen. Med $kT = 8{,}617 \cdot 10^{-5} \cdot 300 = 0{,}02585$ eV:

$$\frac{N_1}{N_0} = e^{-\hbar\omega/kT} = e^{-0{,}3584/0{,}02585} \approx \boxed{9{,}5 \cdot 10^{-7}}$$

Exponenten är $\approx 13{,}9$, så redan fjärde siffran i $\hbar\omega$ märks i svaret. Två värdesiffror är vad indata bär.

Rimlighetskoll. k' ligger i intervallet 100–2000 N/m, och en av en miljon molekyler i $n = 1$ bekräftar att absorptionen sker från grundnivån.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Isotopeffekten i DCl

I DCl är väteatomen utbytt mot deuterium ($2{,}014$ u, klor $34{,}969$ u). Bindningens kraftkonstant är densamma som i HCl, där $\hbar\omega = 0{,}358$ eV och $m_r = 0{,}980$ u. Vid vilken våglängd absorberar DCl i övergången $n = 0 \to 1$?

Lösning

Reducerade massan.

$$m_r' = \frac{2{,}014 \cdot 34{,}969}{2{,}014 + 34{,}969}\ \text{u} = 1{,}904\ \text{u}$$

Skalning. Samma k' ger

$$\hbar\omega' = \hbar\omega\sqrt{\frac{m_r}{m_r'}} = 0{,}358 \cdot \sqrt{\frac{0{,}980}{1{,}904}} = 0{,}358 \cdot 0{,}717 = \boxed{0{,}257\ \text{eV}}$$

Våglängden.

$$\lambda' = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{0{,}2568\ \text{eV}} = 4{,}83 \cdot 10^3\ \text{nm} = \boxed{4{,}83\ \mu\text{m}}$$

Rimlighetskoll. Deuterium är dubbelt så tungt som väte, men m_r ökar bara med en faktor $1{,}94$ eftersom klor är tungt. Våglängden ökar därför med nästan, men inte riktigt, $\sqrt{2}$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.2 Molecular Spectra

Molekylspektra

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #molekylfysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Molekylrotation, Molekylvibration, Linjespektrum

Molekylen har tre energiskalor ovanpå varandra, och storleksordningen avgör vilket våglängdsområde som sonderar vad: orbitalövergångar ligger i synligt ljus, vibrationer i IR och rotationer i mikrovåg. Eftersom varje vibrationsnivå bär rotationsnivåer blir ett vibrationsband uppdelat i en serie linjer. IR-spektrumet är unikt för varje molekyl och används för identifikation — och det är samma absorption som gör CO_2 till en växthusgas.

Formeln, symbol för symbol

$$E_{nl} = \underbrace{l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I}}_{\text{rotation, meV}} + \underbrace{(n+\frac{1}{2})\hbar\sqrt{\frac{k'}{m_r}}}_{\text{vibration, tiondels eV}}$$

Rörelserna är oberoende, så energierna adderas. Rotationstermen är ungefär hundra gånger mindre, så varje vibrationsnivå bär en stege av tätt liggande rotationsnivåer, och en vibrationsövergång blir ett band av linjer.

1. Tre energiskalor

Energierna för de tre rörelserna skiljer sig med ungefär en faktor hundra från skala till skala, och därför kan de studeras var för sig:

Rörelse	Typisk energi	Fotonens våglängd	Område
Elektronövergång	1–10 eV	100–1000 nm	synligt och UV
Vibration	0,1–0,5 eV	2–20 μm	IR

Rörelse	Typisk energi	Fotonens våglängd	Område
Rotation	0,1–10 meV	0,1–10 mm	fjärr-IR och mikrovåg

En foton som räcker till en vibration räcker alltid också till att ändra rotationen, men inte tvärtom. I IR-området ser vi därför inte en enda vibrationslinje utan ett helt band.

---

2. Rotation ovanpå vibration

Molekylen vibrerar och roterar samtidigt, och energierna adderas:

$$\boxed{E_{nl} = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I} + (n+\frac{1}{2})\hbar\sqrt{\frac{k'}{m_r}}}$$

Vid en vibrationsövergång gäller **båda** urvalsreglerna samtidigt: $\Delta n = \pm 1$ och $\Delta l = \pm 1$. Fotonen kan inte lämna l oförändrat. Med $B = \hbar^2/2I$ och absorption från $(n = 0,\ l)$ finns två möjligheter.

R-grenen, $l \to l+1$:

$$\Delta E_R = \hbar\omega + B[(l+1)(l+2) - l(l+1)]$$

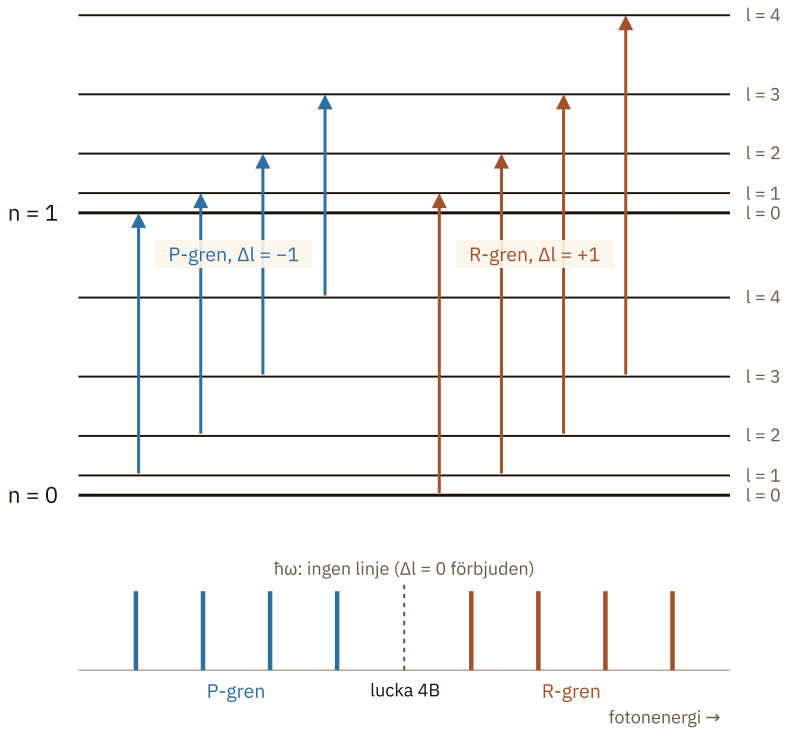
$$\boxed{\Delta E_R = \hbar\omega + 2B(l+1)}, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots$$

P-grenen, $l \to l-1$:

$$\Delta E_P = \hbar\omega + B[(l-1)l - l(l+1)]$$

$$\boxed{\Delta E_P = \hbar\omega - 2Bl}, \qquad l = 1, 2, 3, \ldots$$

R-grenen ger linjer vid $\hbar\omega + 2B,\ \hbar\omega + 4B,\ \ldots$ och P-grenen vid $\hbar\omega - 2B,\ \hbar\omega - 4B,\ \ldots$ Mitt i bandet, vid $\hbar\omega$, finns **ingen** linje, eftersom den skulle kräva $\Delta l = 0$. Luckan är $4B$ bred, dubbelt så bred som avståndet mellan övriga linjer.



Rotationsnivåer ovanpå vibrationsnivåerna $n = 0$ och $n = 1$, med rotationsavståndet kraftigt överdrivet. R-grenen (Δl = +1) och P-grenen (Δl = −1) ger var sin serie linjer med avståndet $2B$. Vid $\hbar\omega$ saknas linjen, så bandet får en lucka på $4B$.

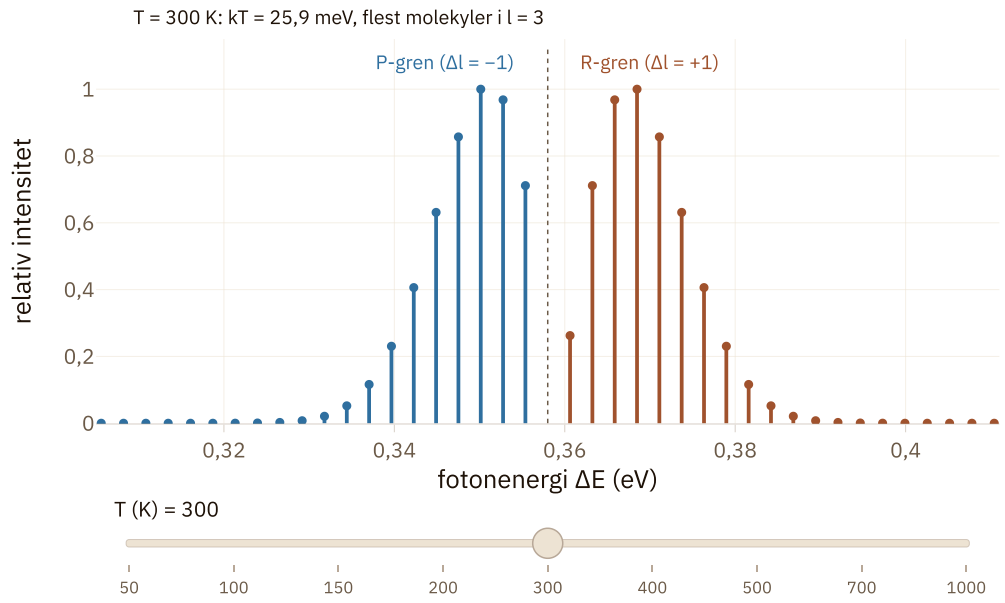
---

3. Vad spektrumet berättar

Ett enda IR-band ger två storheter på en gång:

- **Bandets mitt** ger $\hbar\omega$ och därmed kraftkonstanten $k' = m_r\omega^2$.
- **Linjeavståndet** $2B = \hbar^2/I$ ger tröghetsmomentet och därmed bindningsavståndet $r_0 = \sqrt{I/m_r}$.

Linjernas höjd följer hur många molekyler som sitter i varje startnivå l. Eftersom $B \ll kT$ är många rotationsnivåer besatta. Besättningen växer först med l, eftersom varje nivå rymmer $2l + 1$ tillstånd, och avtar sedan när Boltzmannfaktorn $e^{-E_l/kT}$ tar över. Båda grenarna blir därför ett “berg” av linjer på var sin sida om luckan.



HCl-bandet vid $\hbar\omega = 0{,}358$ eV med $B = 1{,}31$ meV. Linjernas höjd är $(2l+1)\,e^{-E_l/kT}$ för startnivån l, normerad så att den högsta linjen är 1. Reglaget ändrar T: vid låg temperatur sitter molekylerna i de lägsta nivåerna och linjerna samlas nära luckan, vid hög temperatur sprids de ut. Hover visar övergång, energi och våglängd.

---

4. IR-aktivitet och växthusgaser

En vibration absorberar IR bara om den ändrar molekylens dipolmoment, eftersom det är dipolen som det elektriska fältet kan skaka. Två identiska atomer, som $\mathrm{N_2}$ och $\mathrm{O_2}$, har ingen dipol hur de än vibrerar och är genomskinliga i IR. Molekyler med fler än två atomer har flera vibrationssätt, var och en med sin egen frekvens.

$\mathrm{CO_2}$ är rak och symmetrisk. När båda syreatomerna rör sig utåt samtidigt ändras inte dipolen, och den vibrationen syns inte i IR. Böjningen och den osymmetriska sträckningen, där kolatomen rör sig i förhållande till syreatomerna, ger däremot en dipol som svänger. De absorberar vid ungefär $15\ \mu$m och $4{,}3\ \mu$m, mitt i det område där jorden strålar ut värme. Det är därför $\mathrm{CO_2}$ är en växthusgas men inte $\mathrm{N_2}$.

⚠ Vanliga fel

- $\Delta l = \pm 1$ **glöms vid vibrationsövergången.** Linjen vid exakt $\hbar\omega$ finns inte. Den närmaste ligger $2B$ bort åt vardera hållet.
- **R och P förväxlas.** R-grenen ($\Delta l = +1$) ligger på högre energi och kortare våglängd, P-grenen på lägre energi och längre våglängd.
- **Fel startnivå i P-grenen.** P-grenen börjar i $l = 1$, eftersom $l = 0 \to -1$ inte finns. Den första P-linjen är $\hbar\omega - 2B$.

- **Luckan tas för linjeavståndet.** Luckan i mitten är $4B$, avståndet mellan övriga linjer $2B$. Den som använder luckan för att räkna ut I får hälften för litet.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Två linjer i HCl-bandet

För HCl är $\hbar\omega = 0{,}358$ eV och $B = \hbar^2/2I = 1{,}31$ meV. Bestäm fotonenergi och våglängd för övergångarna $(n=0,\ l=0) \to (n=1,\ l=1)$ och $(n=0,\ l=1) \to (n=1,\ l=0)$. Hur stor är energiluckan mellan dem, och varför finns det ingen linje där emellan?

Lösning

Övergång 1, R-grenen med $l = 0$.

$$\Delta E = \hbar\omega + 2B = 0{,}358 + 2 \cdot 0{,}00131 = \boxed{0{,}361\ \text{eV}}$$

$$\lambda = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{0{,}3606\ \text{eV}} = 3{,}44 \cdot 10^3\ \text{nm} = \boxed{3{,}44\ \mu\text{m}}$$

Fysika: Te

Övergång 2, P-grenen med $l = 1$.

$$\Delta E = \hbar\omega - 2B = 0{,}358 - 0{,}00262 = \boxed{0{,}355\ \text{eV}}$$

$$\lambda = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{0{,}3554\ \text{eV}} = 3{,}49 \cdot 10^3\ \text{nm} = \boxed{3{,}49\ \mu\text{m}}$$

Luckan.

$$\Delta E_R - \Delta E_P = 4B = \boxed{5{,}24\ \text{meV}}$$

En linje mitt emellan, vid $0{,}358$ eV, skulle kräva att n ändras men inte l. Det förbjuder urvalsregeln $\Delta l = \pm 1$, eftersom fotonen alltid för med sig rörelsemängdsmoment.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.2 Molecular Spectra

Kristallgitter

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #fasta-tillståndets-fysik #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Elektrondiffraktion

En kristall beskrivs av tre saker: gittret, som är de regelbundet ordnade punkterna; basen, som är atomen vid varje gitterpunkt; och enhetscellen, den minsta byggklossen som repeteras genom kristallen. Det finns fjorton generella typer av kristallgitter, och de som används i kursen är simple cubic, fcc och bcc.

Översikt över alla strukturer: Kristallstrukturer.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\rho}_{\text{densitet}} = \frac{\overbrace{N}^{\text{atomer/cell}} \cdot \overbrace{M/N_A}^{\text{massa/atom}}}{\underbrace{a^3}_{\substack{\text{cellens}\\\text{volym}}}}$$

Densiteten är massan i en enhetscell delad med cellens volym. Hela kristallen är samma cell upprepad, så det räcker att räkna på en.

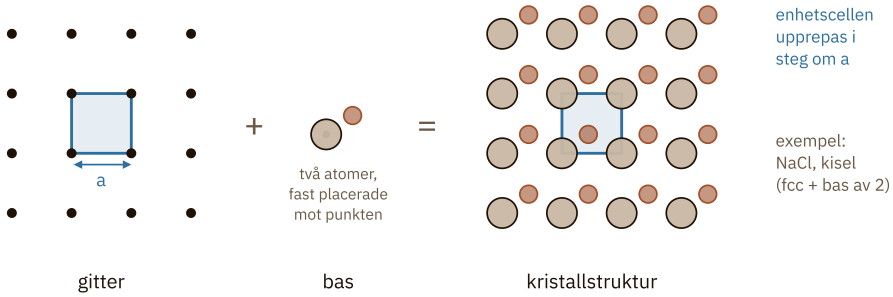
---

1. Gitter plus bas ger struktur

Gittret är ett rent geometriskt mönster av punkter som ser likadant ut från varje punkt. Basen är det som sitter vid varje punkt: en atom, två joner eller en hel molekyl. Först tillsammans beskriver de en verklig kristall:

$$\text{kristallstruktur} = \text{gitter} + \text{bas}$$

Enhetscellen är en låda som fyller rummet när den flyttas i steg om sin egen kantlängd. För de kubiska gittren är cellen en kub med kanten a, **gitterkonstanten**, som typiskt är några tiondels nanometer. Avstånd av den storleken mäts med röntgen- eller elektrondiffraktion.



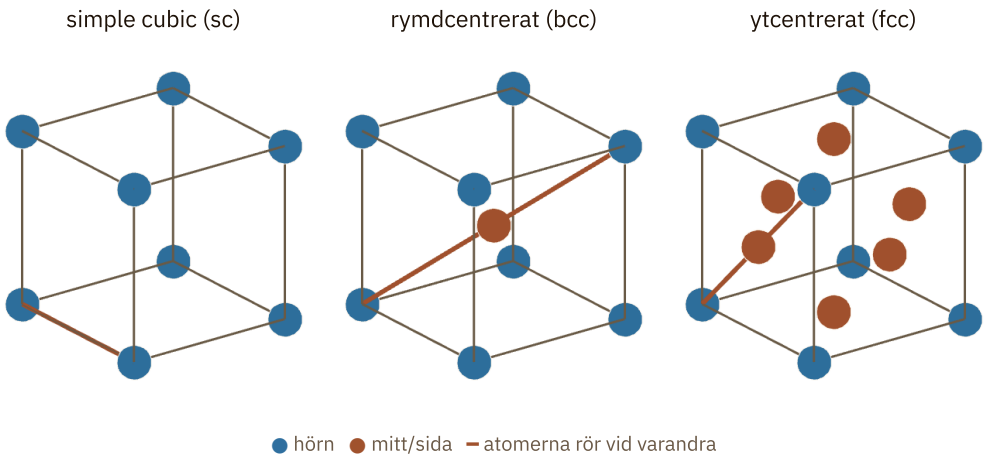
Kristallstruktur = gitter + bas. Gittret är bara punkter, och vid varje punkt sitter samma grupp atomer, basen. Den blå rutan är enhetscellen med kanten a.

---

2. De kubiska gittren

Gitter	Gitterpunkter	Närmaste grannar	Avstånd till närmaste granne	Exempel
Simple cubic (sc)	hörnen	6	a	polonium
Rymdcentrerat (bcc)	hörnen och kubens mitt	8	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	Fe, Na, W
Ytcentrerat (fcc)	hörnen och sidornas mitt	12	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	Cu, Al, Au

Avståndet till närmaste granne följer av var atomerna rör vid varandra: längs kanten i sc, längs rymddiagonalen $\sqrt{3}\,a$ i bcc (två halva avstånd) och längs sidodiagonalen $\sqrt{2}\,a$ i fcc (två halva avstånd). Den hexagonala tätpackningen, **hcp** (Mg, Zn, Ti), är inte kubisk men har också 12 närmaste grannar. Skillnaden mot fcc är hur tätpackade lager staplas, se Packningstäthet.



Enhetscellerna för sc, bcc och fcc (vrid med musen). Hörnatomerna är blå, atomerna i mitten eller på sidorna orange, och den orange linjen visar riktningen där atomerna rör vid varandra: kanten, rymddiagonalen och sidodiagonalen.

---

3. Atomer per enhetscell

En atom i ett hörn delas av de åtta celler som möts där, en atom mitt på en sida av två celler och en atom inne i cellen tillhör bara den. Antalet atomer N som hör till en cell blir

$$N_{\text{sc}} = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1$$

$$N_{\text{bcc}} = 8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2$$

$$N_{\text{fcc}} = 8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

Fysika: T k3 (atomer per cell och gitterkonstanter)

---

4. Densiteten ur gitterkonstanten

Cellen innehåller N atomer med molmassan M, och varje atom väger M/N_A. Cellens volym är a^3:

$$\rho = \frac{m_{\text{cell}}}{V_{\text{cell}}} = \frac{N \cdot M/N_A}{a^3}$$

$$\boxed{\rho = \frac{N\,M}{N_A\,a^3}}$$

Omvänt ger antalet atomer per volymenhet N/a^3 direkt, vilket vi behöver för elektronkoncentrationen i Ferminivån och dopkoncentrationen i Dopning.

---

5. Strukturer med bas

Natriumklorid. Na^+ och Cl^- växlar längs varje kant, så om vi bortser från vilken jon som är vilken ser det ut som ett sc-gitter med kanten $a/2$. Men gittret ska se likadant ut från varje punkt, och det gör det bara om vi tar med sorten. Strukturen är ett **fcc-gitter med en bas av två joner**: en Na^+ i gitterpunkten och en Cl^- ett halvt kantavstånd bort. Cellen innehåller fyra Na^+ och fyra Cl^-.

Diamantstrukturen (C, Si, Ge) är också ett fcc-gitter med en bas av två atomer, men den andra atomen sitter en fjärdedel längs rymddiagonalen. Cellen innehåller $4 \cdot 2 = 8$ atomer, och varje atom har bara fyra närmaste grannar i en tetraeder, som i en kovalent bindning med fyra valenselektroner.

Vanliga fel

- **Gitter och struktur blandas.** Fcc är ett gitter. Koppar är en fcc-*struktur* (en atom per gitterpunkt), och NaCl och kisel är fcc-gitter med en bas av två.
- **NaCl tas för sc.** Na^+ och Cl^- är olika, så grannpunkterna ser inte likadana ut. Gittret är fcc med kanten a, och varje gitterpunkt bär ett jonpar. Gitterkonstanten är alltså a, inte avståndet $a/2$ mellan närmaste joner.
- **Hörn- och sidoatomer räknas hela.** Ett hörn ger $\frac{1}{8}$, en sida $\frac{1}{2}$. Fcc har 4 atomer per cell, inte 14.
- **a tas för atomavståndet.** Det gäller bara i sc. I bcc och fcc är närmaste grannen närmare än a.

---

6. Lösta exempel

Exempel — Kopparns densitet

Koppar har fcc-struktur med gitterkonstanten $a = 0{,}3615$ nm och molmassan $63{,}55$ g/mol. Bestäm densiteten och avståndet mellan närmaste grannar.

Lösning

Atomer per cell. Fcc ger $N = 4$.

Densiteten.

$$\rho = \frac{N\,M}{N_A\,a^3} = \frac{4 \cdot 63{,}55 \cdot 10^{-3}}{6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot (0{,}3615 \cdot 10^{-9})^3} = \boxed{8{,}94 \cdot 10^{3}\ \text{kg/m}^3}$$

Fysika: Te

Närmaste granne. Atomerna rör vid varandra längs sidodiagonalen $\sqrt{2}\,a$, som rymmer två grannavstånd:

$$d = \frac{\sqrt{2}\,a}{2} = \frac{0{,}3615}{\sqrt{2}}\ \text{nm} = \boxed{0{,}256\ \text{nm}}$$

Rimlighetskoll. Tabellvärdet för koppar är $8{,}96$ g/cm³, så gittermodellen ger densiteten på några promille när.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Atomtätheten i kisel

Kisel har diamantstruktur med $a = 0{,}5431$ nm och molmassan $28{,}09$ g/mol. Bestäm antalet atomer per kubikmeter, densiteten och avståndet till närmaste granne, som ligger en fjärdedel av rymddiagonalen bort.

Lösning

Atomer per cell. Fcc-gitter med två atomer i basen ger $N = 8$.

Atomtätheten.

$$n_{\text{Si}} = \frac{N}{a^3} = \frac{8}{(0{,}5431 \cdot 10^{-9})^3} = \boxed{4{,}99 \cdot 10^{28}\ \text{m}^{-3}}$$

Densiteten.

$$\rho = \frac{n_{\text{Si}}\,M}{N_A} = \frac{4{,}99 \cdot 10^{28} \cdot 28{,}09 \cdot 10^{-3}}{6{,}022 \cdot 10^{23}} = \boxed{2{,}33 \cdot 10^{3}\ \text{kg/m}^3}$$

Närmaste granne.

$$d = \frac{\sqrt{3}\,a}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot 0{,}5431}{4}\ \text{nm} = \boxed{0{,}235\ \text{nm}}$$

Koppar har $4/a^3 = 8{,}47 \cdot 10^{28}$ atomer per m³. Kisel har alltså bara drygt hälften så många, trots att grannavståndet är kortare. Det beror på att de riktade bindningarna bara ger fyra grannar i stället för tolv.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.3 Structure of Solids

Packningstäthet

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #fasta-tillståndets-fysik #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Kristallgitter

Packningstätheten är kvoten mellan atomernas volym och enhetscellens volym. Den beräknas genom att räkna hur många atomer som faktiskt tillhör cellen — en hörnatom delas av åtta celler, en sidatom av två — och sedan koppla atomradien r till gitterkonstanten a genom inspektion av geometrin. Simple cubic ger $a = 2r$ och tätheten $0{,}52$, bcc ger $a = 4r/\sqrt{3}$ och $0{,}68$, fcc ger $a = \sqrt{8}\,r$ och $0{,}74$. Hcp har samma täthet som fcc.

$$\boxed{\text{Packningstäthet} = \frac{N \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}}$$

Översikt över alla strukturer: Kristallstrukturer.

Formeln, symbol för symbol

$$\text{Packningstäthet} = \frac{\overbrace{N}^{\text{atomer/cell}} \cdot \overbrace{\frac{4}{3}\pi r^3}^{\text{volym/atom}}}{\underbrace{a^3}_{\substack{\text{cellens}\\\text{volym}}}}$$

Kvoten är den andel av cellen som atomerna fyller. a skrivs om i r via riktningen där atomerna rör vid varandra, och då förkortas r bort.

---

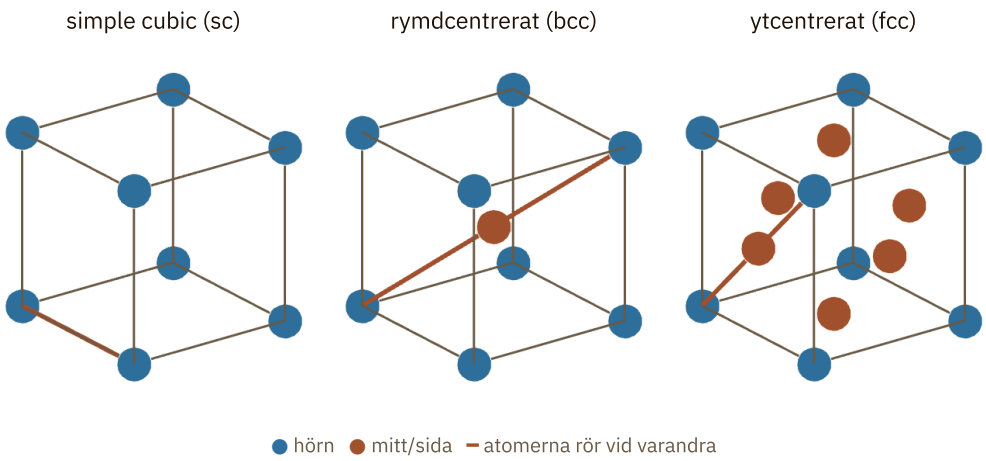
1. Receptet

Varje beräkning följer samma tre steg, och alla tre finns i formeln i rutan:

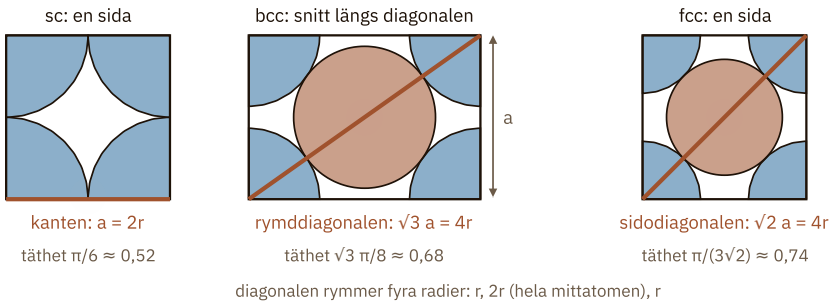
1. **Räkna** N, antalet atomer som hör till cellen (hörn $\frac{1}{8}$, sida $\frac{1}{2}$, inuti 1), se Kristallgitter.

2. **Hitta riktningen där atomerna rör vid varandra**, och skriv längden av den riktningen på två sätt: i a och i r.
3. **Sätt in** a uttryckt i r i formeln. Radien förkortas bort, så tätheten beror bara på geometrin.

Att r förkortas bort betyder att packningstätheten är densamma för alla ämnen med samma struktur, oavsett hur stora atomerna är.



De tre kubiska enhetscellerna (vrid med musen). Den orange linjen är steg 2 i receptet: riktningen där atomerna rör vid varandra, längs kanten i sc, rymddiagonalen i bcc och sidodiagonalen i fcc.



Snitten där atomerna rör vid varandra: en sida i sc, planet genom rymddiagonalen i bcc och en sida i fcc. Den orange linjen är $2r$ i sc och $4r$ i bcc och fcc, och det ger sambandet mellan a och r.

---

2. Simple cubic

Atomerna rör vid varandra längs kanten.

Härledning av packningstätheten för sc

Åtta hörnatomer ger $N = 1$. Längs kanten ligger två halva atomer:

$$a = 2r$$

$$\frac{N \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{8r^3}$$

$$= \frac{\pi}{6} \approx 0{,}524$$

Nästan hälften av volymen är tom, och det är därför sc nästan aldrig förekommer i naturen.

---

3. Rymdcentrerat, bcc

Hörnatomerna rör inte vid varandra längs kanten. I stället rör de vid atomen i mitten, längs rymddiagonalen.

Härledning av packningstätheten för bcc

$N = 8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2$. Rymddiagonalen har längden $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}\,a$ och rymmer en halv hörnatom, hela mittatomen och en halv hörnatom till, alltså fyra radier:

$$\sqrt{3}\,a = 4r$$

$$a = \frac{4r}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{(4r/\sqrt{3})^3} = \frac{\frac{8}{3}\pi r^3 \cdot 3\sqrt{3}}{64\,r^3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,\pi}{8} \approx 0{,}680$$

---

4. Ytcentrerat, fcc

Atomerna rör vid varandra längs sidodiagonalen: hörn, sidans mitt, hörn.

Härledning av packningstätheten för fcc

$N = 8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4$. Sidodiagonalen har längden $\sqrt{2}\,a$ och rymmer fyra radier:

$$\sqrt{2}\,a = 4r$$

$$a = \frac{4r}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,r = \sqrt{8}\,r$$

$$\frac{4 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{(2\sqrt{2}\,r)^3} = \frac{\frac{16}{3}\pi r^3}{16\sqrt{2}\,r^3}$$

$$= \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0{,}740$$

5. Varför metaller väljer fcc och hcp

Lägger vi lika stora kulor i ett plant lager blir det tätast om varje kula har sex grannar i lagret. Nästa lager lägger sig i gropar i det första. För det tredje lagret finns två val: rakt över det första (ABAB…, **hcp**) eller i de gropar som inte används (ABCABC…, **fcc**). Båda ger tolv grannar och tätheten $0{,}740$, den största möjliga för lika stora kulor.

Metallbindningen är inte riktad (se Metallisk bindning). Jonerna vill bara ha så många grannar som möjligt, och därför är de flesta metaller fcc, hcp eller bcc. Kovalenta kristaller gör tvärtom. I diamantstrukturen har varje atom bara fyra grannar, eftersom bindningarna pekar mot hörnen av en tetraeder. Med $N = 8$ och närmaste avståndet $\sqrt{3}\,a/4 = 2r$ blir

$$\frac{8 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{32\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^3$$

$$\boxed{\text{diamant: } \frac{\sqrt{3}\,\pi}{16} \approx 0{,}340}$$

Två tredjedelar av en diamant är alltså tom, men den är ändå det hårdaste naturliga materialet. Packningstätheten säger ingenting om bindningarnas styrka.

Vanliga fel

- **Fel diagonal.** I bcc rör atomerna vid varandra längs *rymd*diagonalen $\sqrt{3}\,a$, i fcc längs *sido*diagonalen $\sqrt{2}\,a$. Byter vi dem blir a fel och tätheten orimlig, ibland större än 1.
- **Diametern i stället för radien.** Diagonalen rymmer fyra *radier*. Den som skriver $\sqrt{3}\,a = 4d$ får en atom som är dubbelt så stor som cellen tillåter.
- **Fel N.** Hörnatomerna räknas som $\frac{1}{8}$ var, och bcc har $N = 2$, fcc $N = 4$.
- **Tätheten jämförs med densiteten.** Packningstätheten är ett rent tal utan enhet. Två metaller med samma struktur har samma packningstäthet men olika densitet.

6. Lösta exempel

Exempel — Atomradien i järn

Järn har bcc-struktur vid rumstemperatur, med $a = 0{,}2866$ nm och molmassan $55{,}85$ g/mol. Bestäm atomradien, densiteten och packningstätheten.

Lösning

Atomradien. I bcc är $\sqrt{3}\,a = 4r$:

$$r = \frac{\sqrt{3}\,a}{4} = \frac{\sqrt{3}\cdot 0{,}2866}{4}\ \text{nm} = \boxed{0{,}124\ \text{nm}}$$

Densiteten. $N = 2$:

$$\rho = \frac{N\,M}{N_A\,a^3} = \frac{2\cdot 55{,}85\cdot 10^{-3}}{6{,}022\cdot 10^{23}\cdot (0{,}2866\cdot 10^{-9})^3} = \boxed{7{,}88\cdot 10^{3}\ \text{kg/m}^3}$$

Fysika: Te

Packningstätheten. Direkt ur siffrorna:

$$\frac{2\cdot \frac{4}{3}\pi\,(0{,}1241)^3}{(0{,}2866)^3} = \boxed{0{,}680}$$

vilket är bcc-värdet $\sqrt{3}\,\pi/8$, som det ska.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Järn blir fcc vid 912 °C

Vid 912 °C övergår järn till fcc-struktur. Anta att atomradien är densamma som i föregående exempel, $r = 0{,}1241$ nm. Bestäm den nya gitterkonstanten och hur många procent densiteten ändras.

Lösning

Gitterkonstanten. I fcc är $\sqrt{2}\,a = 4r$:

$$a_{\text{fcc}} = 2\sqrt{2}\,r = 2\sqrt{2}\cdot 0{,}1241\ \text{nm} = \boxed{0{,}351\ \text{nm}}$$

Densiteten. $N = 4$:

$$\rho_{\text{fcc}} = \frac{4\cdot 55{,}85\cdot 10^{-3}}{6{,}022\cdot 10^{23}\cdot (0{,}3510\cdot 10^{-9})^3} = 8{,}58\cdot 10^{3}\ \text{kg/m}^3$$

Ändringen.

$$\frac{\rho_{\text{fcc}}}{\rho_{\text{bcc}}} = \frac{8{,}58}{7{,}88} = 1{,}089$$

Densiteten **ökar** med $\boxed{8{,}9\ \%}$.

Kontroll med packningstätheterna. Med samma atomer och samma radie är densiteten proportionell mot packningstätheten, så kvoten ska vara

$$\frac{0{,}740}{0{,}680} = 1{,}089$$

vilket stämmer.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.3 Structure of Solids

Kristalldefekter

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #fasta-tillståndets-fysik #fenomen

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Kristallgitter

Verkliga material är sällan perfekta enkristaller. En dislokation är ett inskjutet halvt atomplan som gör gittret lokalt förskjutet, och de flesta material är dessutom polykristallina — uppbyggda av många korn med olika orientering och gränsytor emellan.

---

1. Punktdefekter

Den enklaste defekten gäller en enda gitterplats. Tre typer räcker för kursen:

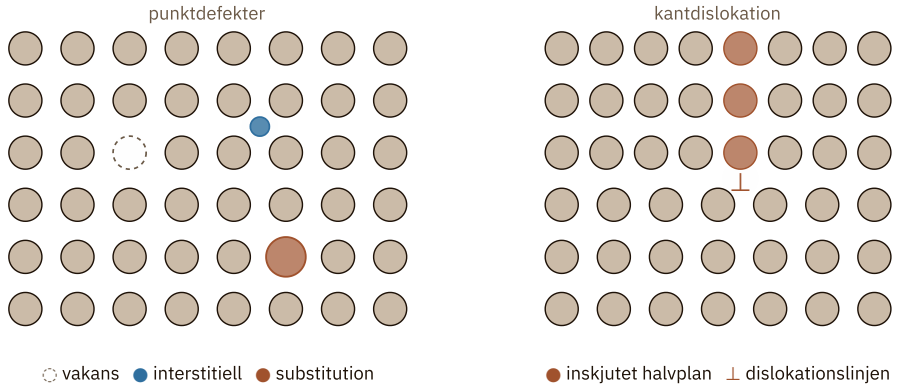
- **Vakans.** En atom saknas på sin plats. Vid varje temperatur över noll finns det vakanser i jämvikt, eftersom värmerörelsen då och då slår ut en atom. Det är genom att hoppa in i vakanser som atomer diffunderar genom en fast kropp.
- **Interstitiell atom.** En atom sitter i ett mellanrum mellan gitterplatserna. Det fungerar bäst för små atomer, som kol i järn: kolet trycker isär järnatomerna och gör stålet hårdare.
- **Substitutionell förorening.** En främmande atom har tagit en ordinarie plats, som en fosforatom i kisel. Det är precis vad dopning är.

I en jonkristall måste laddningen gå jämnt ut. Saknas en Na^+-jon i NaCl saknas därför oftast också en Cl^--jon någon annanstans, eller så kompenseras laddningen på annat sätt.

---

2. Dislokationer

En **kantdislokation** är ingressens inskjutna halvplan: ett extra atomplan som slutar mitt i kristallen. Längs kanten av halvplanet, dislokationslinjen, är gittret ihoptryckt på ena sidan och utdraget på den andra. Det är en linjedefekt, eftersom störningen följer en linje genom kristallen.



Vänster: tre punktdefekter i ett gitter, en vakans, en interstitiell atom och en substitutionell främmande atom. Höger: en kantdislokation, där ett extra halvplan av atomer slutar mitt i kristallen.

Varför metaller går att böja. För att förskjuta ett helt atomplan längs ett annat på en gång måste alla bindningar över planet brytas samtidigt, och det kräver en skjuvspänning som är hundratals gånger större än vad metaller i själva verket tål. Med en dislokation behöver bara en rad bindningar i taget bytas: halvplanet kopplar om till grannplanet, dislokationen flyttar ett atomavstånd och processen upprepas. Resultatet blir samma förskjutning, men med en bråkdel av kraften, ungefär som när man flyttar en matta genom att skjuta en veck längs den i stället för att dra hela mattan.

Allt som hindrar dislokationerna från att röra sig gör materialet hårdare: främmande atomer, korngränser och andra dislokationer. Därför hårdnar en metall när den bearbetas kallt, eftersom dislokationerna då trasslar in sig i varandra.

---

3. Korngränser och ytor

De flesta material är **polykristallina**. När en smälta stelnar börjar kristaller växa på många ställen samtidigt, med olika orientering, och där de möts uppstår **korngränser** där gittret byter riktning. En korngräns är en ytdefekt. Den största ytdefekten av alla är kristallens egen yta, där atomerna saknar grannar på ena sidan.

En **enkristall** saknar korngränser helt. Kiselskivor för elektronik sågas ur enkristaller, eftersom korngränser skulle fånga upp laddningsbärarna och förstöra komponenterna.

⚠ Vanliga fel

- **Dislokation och vakans förväxlas.** En vakans är en enda saknad atom (punkt). En dislokation är ett extra *halvplan* med en kant som löper genom kristallen (linje).
- **Interstitiell och substitutionell förväxlas.** Substitutionell betyder att atomen sitter *på* en gitterplats, interstitiell att den sitter *mellan* dem.
- **“Defekter är alltid dåliga.”** Dopning är avsiktliga punktdefekter, och kol i järn gör stål. Utan defekter skulle metaller varken gå att forma eller förstärka.

4. Lösta exempel

Exempel — Klassificera defekterna

Klassificera defekterna:

a) en arsenikatom på en kiselplats i en kiselkristall, b) en kolatom mellan järnatomerna i stål, c) en saknad Na^+-jon i NaCl, d) ett extra halvplan av atomer i en kopparkristall.

Vilken av dem påverkar främst kislets elektriska ledningsförmåga, och vilken förklarar att koppar går att böja?

Lösning

a) Arsenik tar en ordinarie plats: substitutionell förorening. Arsenik har fem valenselektroner mot kislets fyra, så den är en donator.

b) Kol är liten och sitter mellan gitterplatserna: interstitiell atom.

c) En tom gitterplats: vakans.

d) Ett inskjutet halvplan: kantdislokation.

Ledningsförmågan. Det är **a)**. Den femte elektronen är så löst bunden att den nästan alltid är fri vid rumstemperatur, och redan en arsenikatom per miljon kiselatomer ger miljontals gånger fler ledningselektroner än rent kisel.

Böjligheten. Det är **d)**. Dislokationen kan vandra genom kristallen en atomrad i taget, så kopparplanen kan glida mot varandra med liten kraft.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.3 Structure of Solids

Energiband

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #fasta-tillståndets-fysik #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Atomorbitaler, Paulis uteslutningsprincip

---

Sätter man ihop ett stort antal identiska atomer händer ingenting så länge avståndet är stort, men vid jämviktsavståndet växelverkar orbitalerna. Eftersom Pauliprincipen förbjuder identiska tillstånd måste de skarpa atomära nivåerna spridas ut till band av tätt liggande nivåer, och spektrumet går från linjespektrum till kontinuerligt. Valensbandet är det högsta helt fyllda bandet och ledningsbandet det närmast ovanför; deras kanter kallas VBM och CBM. Core-nivåerna ligger djupt och påverkas inte, vilket är varför röntgenspektrum fortfarande ger linjer.

Formeln, symbol för symbol

$$\text{tillstånd i bandet} = \underbrace{2}_{\text{spinn}} \cdot \underbrace{(2l+1)}_{\substack{\text{orbitaler} \\ \text{per nivå}}} \cdot \underbrace{N}_{\substack{\text{antal} \\ \text{atomer}}}$$

Varje atom tar med sig sina $2(2l+1)$ platser in i bandet. Platserna försvinner inte, de sprids bara ut över bandets bredd.

---

1. Från en atom till N atomer

Två identiska atomer långt ifrån varandra har exakt samma nivåer. När de närmar sig överlappar de yttre vågfunktionerna, och varje nivå delar upp sig i två: en där vågfunktionerna adderas och en där de subtraheras, som vid kovalent bindning. Med N atomer delar varje atomär nivå upp sig i N nivåer.

Varje nivå rymmer två elektroner med motsatt spinn enligt Pauliprincipen. En atomär nivå med rörelsemängdsmomentet l har $2l+1$ orbitaler, och antalet tillstånd i bandet blir

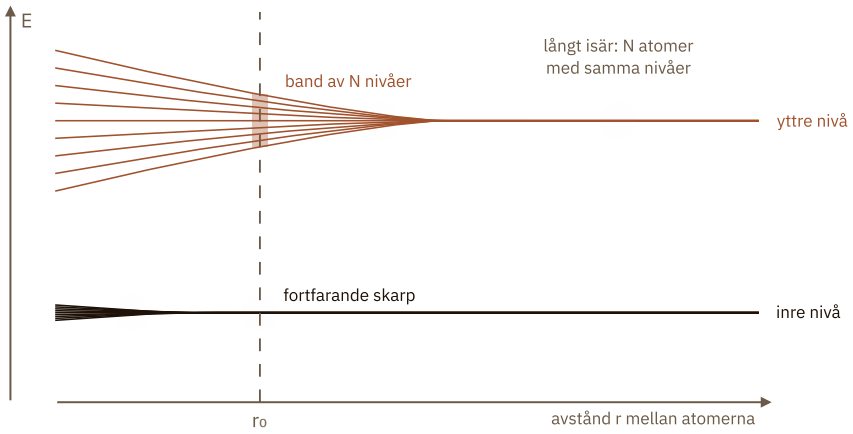
$$\text{nivåer i bandet} = (2l+1)\,N$$

$$\boxed{\text{tillstånd i bandet} = 2(2l+1)\,N}$$

Fysika: Fd3 (kvanttalen m och s ger faktorerna 2l + 1 och 2)

Ett s-band ($l = 0$) rymmer alltså $2N$ elektroner och ett p-band ($l = 1$) $6N$.

Bandets bredd bestäms av hur mycket grannatomernas vågfunktioner överlappar, alltså av avståndet mellan atomerna, och inte av hur många atomer kristallen innehåller. Typiskt är ett band några eV brett. Med $N \approx 10^{23}$ nivåer i ett band på några eV ligger nivåerna 10^{-23} eV från varandra, långt under $kT \approx 0{,}026$ eV. I praktiken beter sig bandet som ett kontinuum.



En atomär nivå för N atomer som funktion av avståndet mellan dem. Långt isär är nivån densamma för alla. När vågfunktionerna börjar överlappa delar den upp sig i N nivåer, som vid r_0 bildar ett band. De inre nivåerna överlappar inte och förblir skarpa.

---

2. Därför förblir de inre nivåerna skarpa

De inre elektronerna sitter nära sin kärna, och deras vågfunktioner når inte fram till grannatomen. Utan överlapp blir bandet extremt smalt och nivån är i praktiken densamma som i den fria atomen. Det är därför röntgenstrålningens karakteristiska linjer, som kommer från övergångar mellan inre skal, är lika skarpa i en fast metall som i en gas.

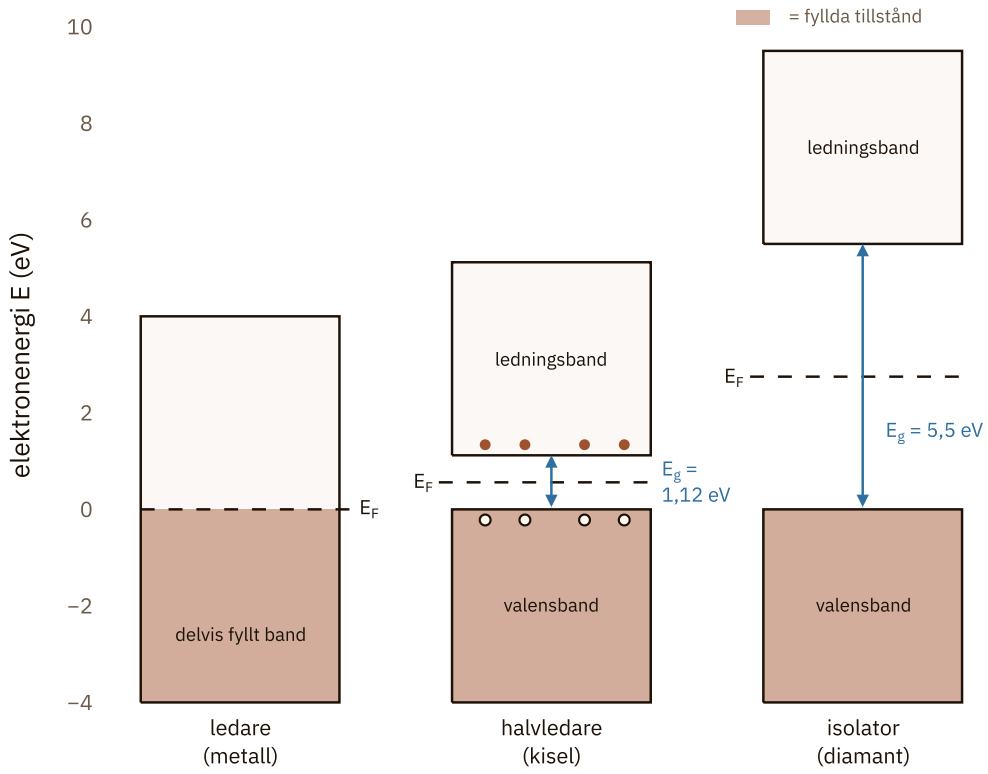
---

3. Fyllnaden avgör materialet

Ett elektriskt fält försöker ge elektronerna lite extra energi och rörelsemängd i fältets riktning. Det går bara om det finns lediga tillstånd strax ovanför de besatta. I ett **fullt** band är alla tillstånd tagna. För varje elektron som rör sig åt ena hållet finns en som rör sig åt det andra, och det blir ingen nettoström.

- **Delvis fyllt band:** lediga tillstånd direkt ovanför de besatta. Materialet är en **ledare**.
- **Fullt valensband, tomt ledningsband och ett** bandgap **emellan:** ingen ledning vid $T = 0$. Är gapet stort är materialet en **isolator**, är det litet en **halvledare**.

Var gränsen mellan besatt och ledigt går beskrivs av ferminivån.



Banden i en ledare, en halvledare och en isolator, med fyllda tillstånd skuggade. I ledaren ligger E_F inne i ett delvis fyllt band; i halvledaren och isolatorn ligger den i gapet, och det är gapets storlek ($1{,}12$ eV mot $5{,}5$ eV) som skiljer dem åt.

---

4. Natrium och magnesium

Natrium har en valenselektron, $3s^1$. Med N atomer rymmer $3s$-bandet $2N$ elektroner men får bara N. Bandet är halvfullt och natrium är en metall. Dessutom överlappar $3s$-bandet med $3p$-bandet i kristallen. Tillsammans rymmer de $2N + 6N = 8N$ elektroner, och N elektroner fyller en åttondel av dem.

Magnesium har två valenselektroner, $3s^2$. Räknar vi bara $3s$-bandet blir det exakt fullt, och då borde magnesium vara en isolator. Men $3s$- och $3p$-banden överlappar även här, så de $2N$ elektronerna fördelar sig i ett gemensamt band med $8N$ tillstånd, som då är en fjärdedel fullt. Överlappande band är orsaken till att även atomer med jämnt antal valenselektroner kan bilda metaller.

⚠ Vanliga fel

- **“Bandet är kontinuerligt.”** Det är N diskreta nivåer, bara så tätt liggande att skillnaden inte märks. Antalet tillstånd är ändligt och går att räkna, och det är det Pauliprincipen och fyllnadsgraden bygger på.
- **Spinnfaktorn 2 glöms.** Ett s-band med N nivåer rymmer $2N$ elektroner, inte N.

- **Bredden tros växa med N.** Fler atomer ger fler nivåer i *samma* band, som då blir tätare, inte bredare.
- **Jämnt antal elektroner betyder isolator.** Det gäller bara om banden inte överlappar. Magnesium, kalcium och zink är metaller.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Bandet i en mol magnesium

En kristall innehåller $1{,}00$ mol magnesium, med två $3s$-elektroner per atom.

a) Hur många tillstånd rymmer $3s$-bandet, och hur många elektroner finns det att fylla det med? b) Om bandet är $5{,}0$ eV brett, ungefär hur tätt ligger nivåerna? Jämför med kT vid rumstemperatur. c) Varför leder magnesium ström trots svaret i a)?

Lösning

a) $N = N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ atomer. Ett s-band har $l = 0$:

$$\text{tillstånd} = 2(2 \cdot 0 + 1)\,N = 2N_A = \boxed{1{,}20 \cdot 10^{24}}$$

Fysika: Te Elektronerna är två per atom, alltså också $\boxed{1{,}20 \cdot 10^{24}}$. Bandet är exakt fullt.

b) Bandet innehåller N_A nivåer (två tillstånd var):

$$\Delta E \approx \frac{5{,}0\ \text{eV}}{6{,}022 \cdot 10^{23}} = \boxed{8{,}3 \cdot 10^{-24}\ \text{eV}}$$

Det är ungefär $3 \cdot 10^{-22}$ gånger $kT = 0{,}026$ eV, så bandet är i praktiken kontinuerligt.

c) I kristallen överlappar $3s$-bandet med $3p$-bandet, som rymmer $6N_A$ elektroner till. Det gemensamma bandet har $8N_A$ tillstånd och $2N_A$ elektroner. Det är bara en fjärdedel fyllt, så det finns gott om lediga tillstånd direkt ovanför de besatta, och magnesium är en ledare.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.4 Energy Bands

Bandgap

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #fasta-tillståndets-fysik #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Energiband

Bandgapet är energiavståndet mellan valensbandets topp och ledningsbandets botten, och det ensamt avgör om ett material leder ström. I en isolator, till exempel en oxid, är valensbandet fullt och excitationen kostar över 5 eV, så elektronerna kan inte byta tillstånd. I en halvledare är gapet 1–2 eV, tillräckligt litet för att excitera elektroner. I en ledare finns inget gap att passera — ledningsbandet är redan delvis fyllt, och excitationerna sker inom bandet.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{\lambda_{\max}}_{\substack{\text{längsta våglängd}\\ \text{som absorberas}}} = \frac{hc}{\underbrace{E_g}_{\text{bandgapet}}}$$

Fotonen måste ensam lyfta en elektron över hela gapet. Längre våglängd betyder mindre energi per foton, så över $\lambda_{\max}$ passerar ljuset rakt igenom.

---

1. Absorptionskanten

En foton kan lyfta en elektron från valensbandet till ledningsbandet bara om den har minst gapets energi. Precis som vid fotoelektriska effekten finns en tröskel, men här är den gapet i stället för utträdesarbetet:

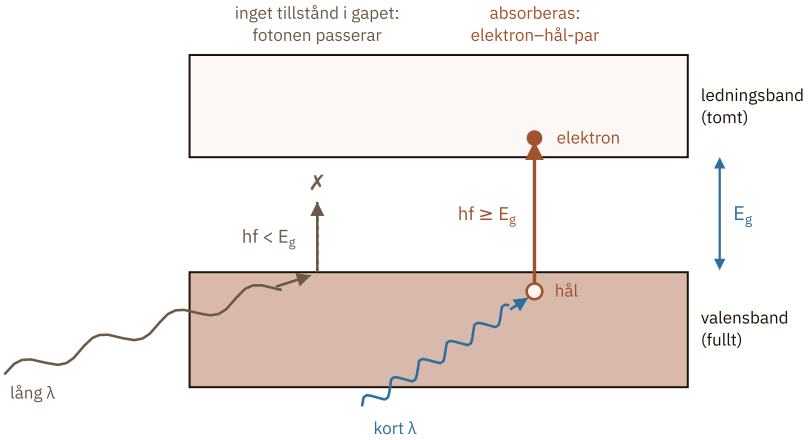
$$hf \geq E_g$$

$$\frac{hc}{\lambda} \geq E_g$$

$$\boxed{\lambda_{\max} = \frac{hc}{E_g}}$$

Fysika: Fd3 (fotonenergin E = hc/λ)

Ljus med längre våglängd än $\lambda_{\max}$ passerar rakt igenom, och ljus med kortare våglängd absorberas. Materialet får en skarp **absorptionskant**, och genom att mäta var den ligger bestämmer vi E_g.



Absorptionskanten. En foton med $hf < E_g$ skulle lyfta elektronen in i gapet, där det inte finns några tillstånd, och passerar därför. Med $hf \geq E_g$ hamnar elektronen i ledningsbandet och lämnar ett hål efter sig.

---

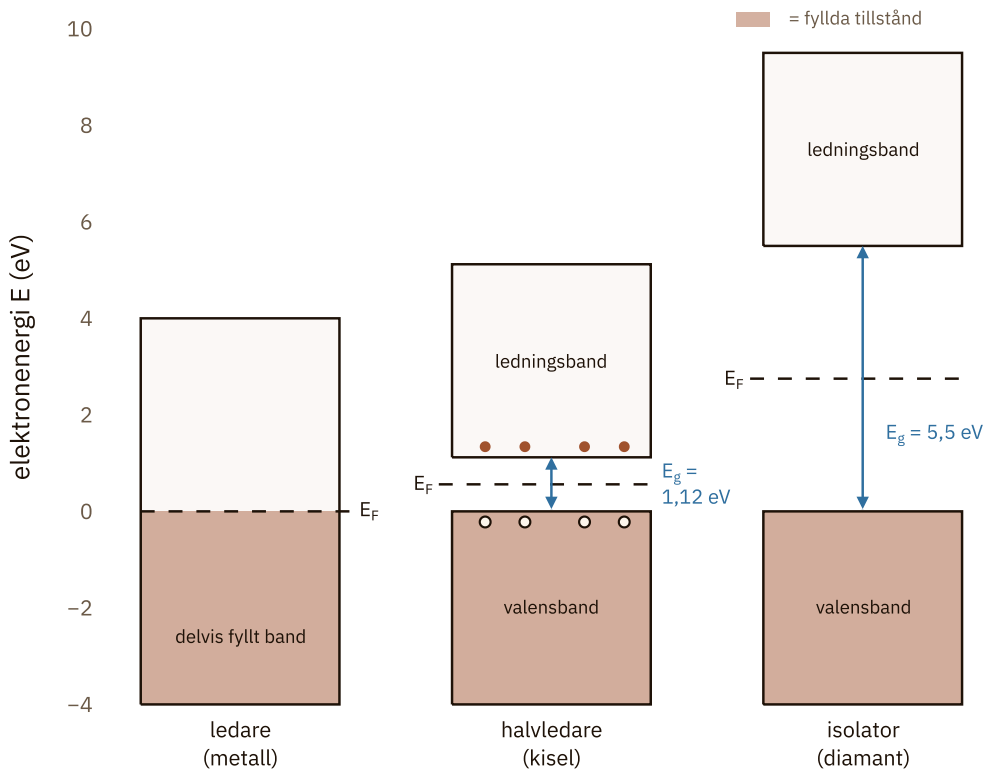
2. Termisk excitation

Värmerörelsen har energiskalan kT, som vid rumstemperatur är

$$kT = 8{,}617 \cdot 10^{-5}\ \text{eV/K} \cdot 300\ \text{K} = 0{,}0259\ \text{eV}$$

Fysika: Te

Det är långt under alla bandgap, men sannolikheten för excitation avtar exponentiellt med kvoten E_g/kT, ungefär som $e^{-E_g/2kT}$ (se Halvledare). Kvoten är 43 för kisel och 210 för diamant. För kisel blir sannolikheten liten men inte försumbar med omkring $2 \cdot 10^{23}$ valenselektroner per kubikcentimeter att ta av. För diamant är den i praktiken noll. Det är därför gapets storlek skiljer halvledare från isolatorer.



Ledare, halvledare och isolator på samma energiskala. Kislets smala gap räcker för att några elektroner ska exciteras termiskt och lämna hål efter sig; över diamantens gap på $5{,}5$ eV sker det i praktiken aldrig.

---

3. Lysdioder och direkt eller indirekt gap

Faller en elektron från ledningsbandets botten ner i ett hål i valensbandet kan energin sändas ut som en foton med $hf \approx E_g$. Det är principen för lysdioden. Färgen bestäms av gapet:

$$\lambda \approx \frac{hc}{E_g}$$

Fotonen har nästan ingen rörelsemängd jämfört med elektronerna i kristallen, så övergången måste ske utan att elektronens rörelsemängd ändras. I ett material med **direkt bandgap**, som GaAs, ligger ledningsbandets botten och valensbandets topp vid samma rörelsemängd, och elektronen kan falla rakt ner. I ett material med **indirekt bandgap**, som kisel, ligger de vid olika rörelsemängd. Då måste också en gittervibration ta upp skillnaden, vilket är mycket mindre sannolikt. Därför görs lysdioder och halvledarlasrar av material med direkt gap, medan kisel lyser dåligt.

---

4. Genomskinligt, färgat eller ogenomskinligt

Synligt ljus sträcker sig från 400 till 700 nm, alltså fotonenergier från $1{,}77$ till $3{,}10$ eV. Gapet avgör hur materialet ser ut:

Gap	Synligt ljus	Utseende	Exempel
$E_g > 3{,}10$ eV	inget absorberas	genomskinligt	diamant, glas, de flesta oxider
$1{,}77 < E_g < 3{,}10$ eV	den blå änden absorberas	färgat, gult till rött	CdS
$E_g < 1{,}77$ eV	allt absorberas	ogenomskinligt, grått	kisel, germanium, GaAs

⚠ **Vanliga fel**

- **Största och minsta våglängden förväxlas.** hc/E_g är den *längsta* våglängd som absorberas. Kortare våglängd har mer energi och absorberas också.
- **”kT räcker inte, alltså ingen excitation.”** kT är alltid mycket mindre än E_g. Excitationen sker ändå, med sannolikheten $e^{-E_g/2kT}$, och det är den exponentiella känsligheten som gör skillnaden.
- **Bandgap i en metall.** En metall har ett delvis fyllt band, och det finns inget gap att passera vid Ferminivån. Metallens gap mellan två *andra* band påverkar inte ledningen.
- **eV och J blandas.** Med $hc = 1240$ eV·nm och E_g i eV blir λ direkt i nm.

5. Lösta exempel

Exempel — Absorptionskanten för tre material

Bestäm den längsta våglängd som absorberas i kisel ($E_g = 1{,}12$ eV), GaAs ($1{,}42$ eV) och diamant ($5{,}5$ eV). Vilka av dem är genomskinliga för synligt ljus? Kan en solcell av kisel utnyttja ljus med våglängden $1{,}5\ \mu$m?

Lösning

Gränsvåglängderna. $\lambda_{\max} = hc/E_g$ med $hc = 1240$ eV·nm:

$$\text{Si: } \lambda_{\max} = \frac{1240}{1{,}12}\ \text{nm} = \boxed{1{,}11\ \mu\text{m}}$$

$$\text{GaAs: } \lambda_{\max} = \frac{1240}{1{,}42}\ \text{nm} = \boxed{873\ \text{nm}}$$

$$\text{diamant: } \lambda_{\max} = \frac{1240}{5{,}5}\ \text{nm} = \boxed{225\ \text{nm}}$$

Genomskinlighet. Kisel och GaAs absorberar allt under $1{,}11\ \mu$m respektive 873 nm, alltså hela det synliga området. Diamant absorberar bara under 225 nm, i UV, och är **genomskinlig**.

Solcellen. $1{,}5\ \mu\text{m} > 1{,}11\ \mu$m, så fotonerna har för lite energi, $1240/1500 = 0{,}83$ eV. Kisel är genomskinligt för det ljuset, och solcellen kan **inte** utnyttja det.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Bandgap för en röd och en blå lysdiod

En röd lysdiod lyser vid 650 nm och en blå vid 450 nm. Ungefär hur stort bandgap måste halvledaren ha i var och en? Kan någon av dem göras av GaAs ($1{,}42$ eV)?

Lösning

Gapen. $E_g \approx hc/\lambda$:

$$\text{röd: } E_g = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{650\ \text{nm}} = \boxed{1{,}91\ \text{eV}}$$

$$\text{blå: } E_g = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{450\ \text{nm}} = \boxed{2{,}76\ \text{eV}}$$

GaAs. Gapet $1{,}42$ eV ger 873 nm, i nära IR. Ingen av lysdioderna kan göras av ren GaAs. GaAs används i stället för IR-dioder, till exempel i fjärrkontroller, och röda dioder görs av legeringar med större gap.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.4 Energy Bands

Ferminivån

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #fasta-tillståndets-fysik #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Energiband

Ferminivån E_F skiljer ockuperade från icke-ockuperade tillstånd. I en metall ligger den inne i ledningsbandet, och avståndet upp till vakuumnivån är just utträdesarbetet ϕ från fotoelektriska effekten. Det är samma storhet som brunnsdjupet i modellen partikel i potentialbrunn — bandet svarar mot brunnen, och ϕ mot kanten.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{E_{F0}}_{\substack{\text{högsta fyllda}\\ \text{energin vid } T=0}} = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}}_{\text{fri elektron}} \left(3\pi^2 \underbrace{n}_{\substack{\text{elektroner}\\ \text{per m}^3}}\right)^{2/3}$$

Ju tätare elektronerna sitter, desto högre måste de fylla upp, eftersom Pauliprincipen bara tillåter två per rumsligt tillstånd. Metallbitens storlek spelar ingen roll, bara tätheten.

---

1. Ferminivån i frielektronmodellen

I en metall är valenselektronerna inte bundna till någon atom. Vi ser dem som fria partiklar i en låda med metallens form, en tredimensionell version av partikel i låda. Vid $T = 0$ fylls tillstånden nerifrån, två elektroner per rumsligt tillstånd, tills alla N elektroner fått plats. Den högsta besatta energin är ferminivån vid absoluta nollpunkten, E_{F0}.

Antalet tillstånd med energi upp till E räknas fram i Tillståndstäthet:

$$n(E) = \frac{(2m)^{3/2}\, V\, E^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}$$

Vid $T = 0$ är precis N av dem fyllda, så $n(E_{F0}) = N$:

$$N = \frac{(2m)^{3/2}\, V\, E_{F0}^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}$$

$$E_{F0}^{3/2} = \frac{3\pi^2\hbar^3}{(2m)^{3/2}} \cdot \frac{N}{V}$$

$$E_{F0} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

Kvoten N/V är **elektronkoncentrationen**, som vi skriver *n*:

$$\boxed{E_{F0} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}}$$

Ferminivån beror alltså bara på hur tätt elektronerna sitter, inte på hur stor metallbiten är. Elektronkoncentrationen får vi ur densiteten ρ, molmassan M och antalet fria elektroner z per atom:

$$n = z \cdot \frac{\rho}{M} \cdot N_A$$

Fysika: T k3 (n tabellerad per grundämne)

För vanliga metaller blir $n \approx 10^{28}$–10^{29} m⁻³ och E_F några eV. Två storheter till gör storleken tydlig:

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}}, \qquad T_F = \frac{E_F}{k}$$

Fermifarten v_F är runt 10^6 m/s, och det är farten hos de snabbaste elektronerna *vid absoluta nollpunkten*. Fermitemperaturen T_F är några tiotusentals kelvin. Den säger att en klassisk gas skulle behöva så hög temperatur för att ha lika mycket rörelseenergi.

---

2. Medelenergin

Vid $T = 0$ är alla tillstånd under E_{F0} fyllda och alla över tomma. Med tillståndstätheten $g(E) = C\sqrt{E}$ blir den totala energin och antalet elektroner

$$E_{\text{tot}} = \int_0^{E_{F0}} E\, g(E)\, dE = C\int_0^{E_{F0}} E^{3/2}\, dE = \frac{2}{5}\, C\, E_{F0}^{5/2}$$

$$N = \int_0^{E_{F0}} g(E)\, dE = C\int_0^{E_{F0}} E^{1/2}\, dE = \frac{2}{3}\, C\, E_{F0}^{3/2}$$

Kvoten ger medelenergin per elektron:

$$E_{\text{av}} = \frac{E_{\text{tot}}}{N} = \frac{2/5}{2/3}\, E_{F0}$$

$$\boxed{E_{\text{av}} = \frac{3}{5} E_{F0}}$$

Konstanten C förkortas bort. En klassisk gas vid 300 K har medelenergin $\frac{3}{2}kT = 0{,}039$ eV, alltså ungefär femtio gånger mindre. Elektrongasen i en metall är långt ifrån klassisk, och det är Pauliprincipen som tvingar upp elektronerna i energi.

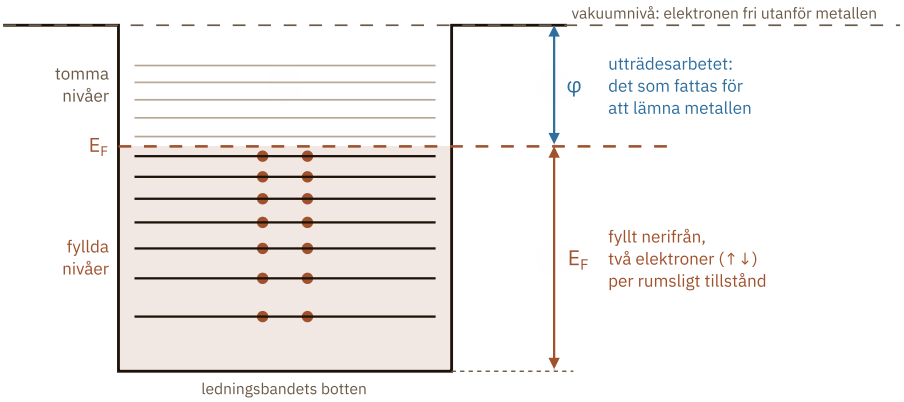
---

3. Ferminivån och temperaturen

Eftersom E_F är några eV och kT bara $0{,}026$ eV ändras nästan ingenting när metallen värms upp. Bara elektroner inom några kT från E_F kan flytta sig till lediga tillstånd ovanför, se Fermi-Dirac-fördelningen. För en metall kan vi därför använda E_{F0} vid alla vanliga temperaturer.

Det förklarar också varför elektronerna nästan inte bidrar till metallens värmekapacitet: de flesta sitter djupt under E_F och har inga lediga tillstånd att värmas upp till.

Bilden i ingressen går att göra kvantitativ. Räknat från ledningsbandets botten ligger de översta elektronerna på E_F, och de behöver ytterligare utträdesarbetet ϕ för att lämna metallen. Brunnens djup i modellen partikel i potentialbrunn blir då $E_F + \phi$.



Frielektronmodellen som en brunn. Vid $T = 0$ fyller elektronerna nivåerna nerifrån, två per rumsligt tillstånd, upp till E_F. Ovanför återstår utträdesarbetet ϕ upp till vakuumnivån, så brunnens djup är $E_F + \phi$.

⚠ Vanliga fel

- **n betyder två saker.** Här är n elektronkoncentrationen i m⁻³, inte ett kvanttal. I noten om tillståndstäthet används $n(E)$ för antalet tillstånd upp till E.
- **Fel antal fria elektroner per atom.** Na och Cu har en, Mg och Zn två, Al tre. Glömmer vi faktorn z blir E_F en faktor $z^{2/3}$ för liten.
- **Atomtätheten i fel enhet.** ρ/M måste vara i mol/m³: ρ i kg/m³ och M i kg/mol, inte g/mol.

- E_F **tas för en termisk energi.** E_F finns även vid $T = 0$ och är ungefär hundra gånger större än kT vid rumstemperatur.

---

4. Lösta exempel

Exempel — Ferminivån i natrium

Natrium har densiteten 971 kg/m³, molmassan $22{,}99$ g/mol och en fri elektron per atom. Bestäm elektronkoncentrationen, ferminivån, fermifarten och medelenergin vid $T = 0$.

Lösning

Elektronkoncentrationen.

$$n = 1 \cdot \frac{971}{22{,}99 \cdot 10^{-3}} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = \boxed{2{,}54 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}}$$

Fysika: Te

Ferminivån. Vi räknar faktorerna var för sig:

$$\frac{\hbar^2}{2m} = \frac{(1{,}0546 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}} = 6{,}10 \cdot 10^{-39}\ \mathrm{J \cdot m^2}$$

$$(3\pi^2 n)^{2/3} = (7{,}53 \cdot 10^{29})^{2/3} = 8{,}28 \cdot 10^{19}\ \mathrm{m^{-2}}$$

$$E_{F0} = 6{,}10 \cdot 10^{-39} \cdot 8{,}28 \cdot 10^{19} = 5{,}05 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = \boxed{3{,}15\ \mathrm{eV}}$$

Fermifarten.

$$v_F = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}05 \cdot 10^{-19}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}}} = \boxed{1{,}05 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m/s}}$$

Medelenergin.

$$E_{\text{av}} = \frac{3}{5} \cdot 3{,}15\ \text{eV} = \boxed{1{,}89\ \text{eV}}$$

Rimlighetskoll. v_F är $0{,}35\ \%$ av ljushastigheten, så den klassiska formeln för rörelseenergi duger. Fermitemperaturen blir $E_F/k = 3{,}66 \cdot 10^4$ K.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Ferminivån i aluminium

Aluminium har densiteten 2700 kg/m³, molmassan $26{,}98$ g/mol och tre fria elektroner per atom. Bestäm ferminivån och fermifarten.

Lösning

Elektronkoncentrationen. Med $z = 3$:

$$n = 3 \cdot \frac{2700}{26{,}98 \cdot 10^{-3}} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 1{,}81 \cdot 10^{29}\ \text{m}^{-3}$$

Ferminivån.

$$(3\pi^2 n)^{2/3} = (5{,}35 \cdot 10^{30})^{2/3} = 3{,}06 \cdot 10^{20}\ \text{m}^{-2}$$

$$E_{F0} = 6{,}10 \cdot 10^{-39} \cdot 3{,}06 \cdot 10^{20} = 1{,}87 \cdot 10^{-18}\ \text{J} = \boxed{11{,}7\ \text{eV}}$$

Fermifarten.

$$v_F = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}87 \cdot 10^{-18}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}}} = \boxed{2{,}03 \cdot 10^6\ \text{m/s}}$$

Rimlighetskoll. Aluminium har $7{,}1$ gånger fler fria elektroner per volym än natrium, och $7{,}1^{2/3} = 3{,}7$, vilket är kvoten $11{,}7/3{,}15$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.5 Free-Electron Model of Metals

Tillståndstäthet

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #fasta-tillståndets-fysik #storhet

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Energiband

Tillståndstätheten dn/dE anger hur många tillstånd dn som ryms i energiintervallet dE. Den beskriver bandens form som funktion av energin och är den ena av de två faktorer som avgör hur många elektroner som faktiskt sitter var; den andra är Fermi-Dirac-fördelningen.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{g(E)}_{\substack{\text{tillstånd}\\ \text{per energi}}} = \underbrace{\frac{(2m)^{3/2}\,V}{2\pi^2\hbar^3}}_{\substack{\text{konstant för}\\ \text{en given bit}}} \underbrace{E^{1/2}}_{\substack{\text{växer uppåt}\\ \text{i bandet}}}$$

Tillstånden är punkter i ett rum av kvanttal, och energin bestämmer radien. Ett tunt skal mellan E och $E + dE$ rymmer fler punkter ju längre ut det ligger, och därför växer tätheten som $\sqrt{E}$.

---

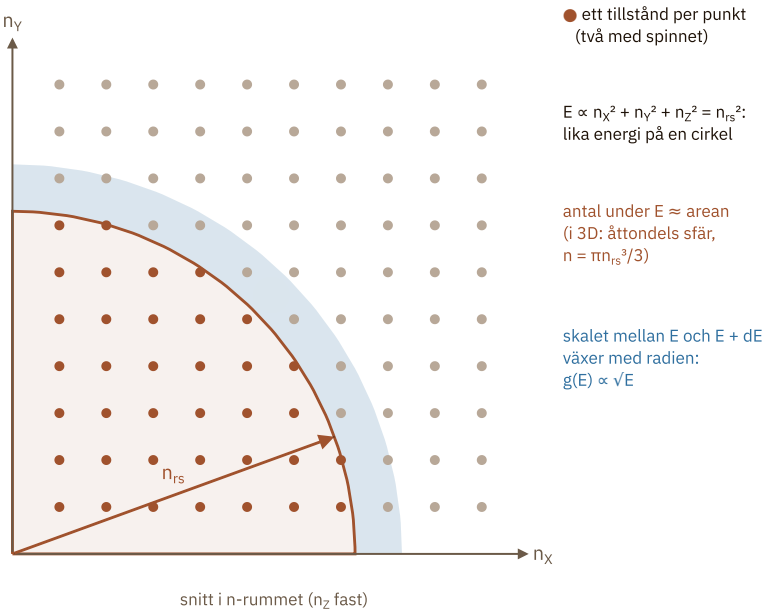
1. Att räkna tillstånden

I frielektronmodellen sitter elektronerna i en kub med sidan L och volymen $V = L^3$. Det är den tredimensionella partikeln i låda, med nivåerna

$$E = \frac{(n_X^2 + n_Y^2 + n_Z^2)\,\pi^2\hbar^2}{2mL^2}, \qquad n_X, n_Y, n_Z = 1, 2, 3, \ldots$$

Fysika: Fd3 (i formen för en endimensionell låda)

Varje tillstånd är en punkt med heltalskoordinater i ett rum med axlarna n_X, n_Y, n_Z. Alla tillstånd med energi upp till E ligger innanför en sfär med radien $n_{rs} = \sqrt{n_X^2 + n_Y^2 + n_Z^2}$. I stället för att räkna punkterna en och en räknar vi volymen, eftersom varje punkt tar upp en enhetskub.



snitt i n-rummet (n_Z fast)

Tillstånden som gitterpunkter i ett snitt av n-rummet. Alla med energi under E ligger innanför kvartscirkeln med radien n_{rs}, i tre dimensioner en åttondels sfär. Där växer volymen av skalet mellan E och $E + dE$ med radien, som $\sqrt{E}$.

Härledning av antalet tillstånd upp till E

Bara positiva kvanttal räknas, alltså en åttondel av sfären. Två spinnriktningar per punkt ger faktorn 2:

$$n = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi n_{rs}^3 = \frac{\pi n_{rs}^3}{3}$$

Energin på sfärens yta ger radien:

$$E = \frac{n_{rs}^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$n_{rs} = \frac{(2mL^2E)^{1/2}}{\pi\hbar}$$

Insatt:

$$n = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(2mL^2E)^{3/2}}{\pi^3\hbar^3} = \frac{(2m)^{3/2}L^3E^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}$$

Med $L^3 = V$:

$$\boxed{n(E) = \frac{(2m)^{3/2}\, V\, E^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}}$$

Räkningen med volym i stället för punkter kräver att n_{rs} är stort. För en centimeterstor metallbit är det vid E_F i storleksordningen 10^7, så approximationen är utmärkt.

---

2. Tillståndstätheten

Tillståndstätheten är derivatan av antalet tillstånd med avseende på energin:

$$g(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{(2m)^{3/2}\, V}{3\pi^2\hbar^3} \cdot \frac{3}{2} E^{1/2}$$

$$\boxed{g(E) = \frac{(2m)^{3/2}\, V}{2\pi^2\hbar^3} E^{1/2}}$$

Tätheten växer som $\sqrt{E}$: högre upp i bandet finns fler tillstånd per energiintervall. Den är proportionell mot V, så en dubbelt så stor bit har dubbelt så många tillstånd i varje intervall.

---

3. En kompakt form

Vid $T = 0$ är de N lägsta tillstånden fyllda, upp till ferminivån, så $n(E_F) = N$. Eftersom $n \propto E^{3/2}$ kan vi skriva

$$n(E) = N \left(\frac{E}{E_F}\right)^{3/2}$$

$$\boxed{g(E) = \frac{3N}{2} \cdot \frac{E^{1/2}}{E_F^{3/2}}}, \qquad g(E_F) = \frac{3N}{2E_F}$$

Den formen slipper m, $\hbar$ och V, och den säger direkt hur många tillstånd som finns nära E_F, där allt intressant händer.

---

4. Antalet elektroner i ett energiintervall

$g(E)\,dE$ är antalet **tillstånd** i intervallet. Hur många av dem som faktiskt är besatta ges av sannolikheten $f(E)$ från Fermi-Dirac-fördelningen:

$$\boxed{dN = g(E)\,f(E)\,dE}$$

Vid $T = 0$ är $f = 1$ under E_F och 0 över, och $g \cdot f$ blir en $\sqrt{E}$-kurva som klipps av vid E_F. Vid högre temperatur rundas kanten av inom några kT. Figuren finns i noten om Fermi-Dirac-fördelningen.

$\sqrt{E}$-formen gäller fria elektroner. I ett verkligt band är $g(E)$ mer komplicerad, och i ett bandgap är den noll: där finns inga tillstånd att besätta.

⚠ Vanliga fel

- **Åttondelen eller spinnfaktorn glöms.** Bara positiva n_X, n_Y, n_Z räknas ($\frac{1}{8}$ av sfären), och varje punkt rymmer två elektroner. Tillsammans ger de faktorn $\frac{1}{4}$ framför sfärens volym.
- $g(E)$ **tas för ett antal.** g har enheten tillstånd per energi. Antalet i ett intervall är $g(E)\,\Delta E$, och bara om intervallet är litet.
- **Tillstånd och elektroner blandas.** $g(E)$ räknar platser. Elektronerna i intervallet är $g(E)f(E)\,dE$.
- **Fel enhet på energin.** I $g(E) = (2m)^{3/2}V\sqrt{E}/(2\pi^2\hbar^3)$ ska E vara i joule, och svaret blir tillstånd per joule. Delas det med $6{,}24 \cdot 10^{18}$ fås tillstånd per eV.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Tillstånden nära Ferminivån i natrium

Natrium har elektronkoncentrationen $2{,}54 \cdot 10^{28}$ m⁻³ och ferminivån $3{,}15$ eV. Bestäm tillståndstätheten vid E_F för en bit på $1{,}00$ cm³, i tillstånd per eV. Ungefär hur stor andel av elektronerna ligger inom kT under E_F vid 300 K?

Lösning

Antalet elektroner.

$$N = nV = 2{,}54 \cdot 10^{28} \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-6} = 2{,}54 \cdot 10^{22}$$

Tillståndstätheten. Med den kompakta formen:

$$g(E_F) = \frac{3N}{2E_F} = \frac{3 \cdot 2{,}54 \cdot 10^{22}}{2 \cdot 3{,}15\ \text{eV}} = \boxed{1{,}21 \cdot 10^{22}\ \text{eV}^{-1}}$$

Kontroll med den fullständiga formeln. Med $E_F = 5{,}05 \cdot 10^{-19}$ J:

$$g(E_F) = \frac{(2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31})^{3/2} \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{5{,}05 \cdot 10^{-19}}}{2\pi^2 (1{,}0546 \cdot 10^{-34})^3} = 7{,}55 \cdot 10^{40}\ \text{J}^{-1}$$

Fysika: Te och $7{,}55 \cdot 10^{40} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 1{,}21 \cdot 10^{22}$ eV⁻¹, samma svar.

Elektronerna inom kT. $kT = 0{,}0259$ eV är litet jämfört med E_F, så g är nästan konstant i intervallet:

$$\Delta N \approx g(E_F)\, kT = 1{,}21 \cdot 10^{22} \cdot 0{,}0259 = 3{,}13 \cdot 10^{20}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{3{,}13 \cdot 10^{20}}{2{,}54 \cdot 10^{22}} = \boxed{1{,}23\ \%}$$

Bara drygt en procent av elektronerna ligger så nära E_F att värmerörelsen kan flytta dem. Det är de som bestämmer metallens elektroniska värmekapacitet.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.5 Free-Electron Model of Metals

Fermi-Dirac-fördelningen

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #fasta-tillståndets-fysik #samband

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Ferminivån, Paulis uteslutningsprincip

---

Fördelningen ger sannolikheten att ett tillstånd med energin E är ockuperat av en elektron vid temperaturen T. Det är uttryckligen inte Maxwell-Boltzmannfördelningen, och skälet är tre: banden, Paulis uteslutningsprincip och att elektroner är omöjliga att särskilja. Vid $E = E_F$ är sannolikheten exakt $\frac{1}{2}$, och vid $T = 0$ blir fördelningen ett steg.

$$\boxed{f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}}$$

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{f(E)}_{\substack{\text{sannolikheten}\\ \text{att tillståndet}\\ \text{är besatt}}} = \frac{1}{\overbrace{e^{(E-E_F)/kT}}^{\text{avstånd i } kT} + \underbrace{1}_{\substack{\text{håller}\\ f \le 1}}}$$

Allt beror på hur många kT tillståndet ligger från E_F. Långt under går f mot 1, långt över mot 0, och ettan i nämnaren gör att f aldrig blir större än 1.

---

1. Formen på fördelningen

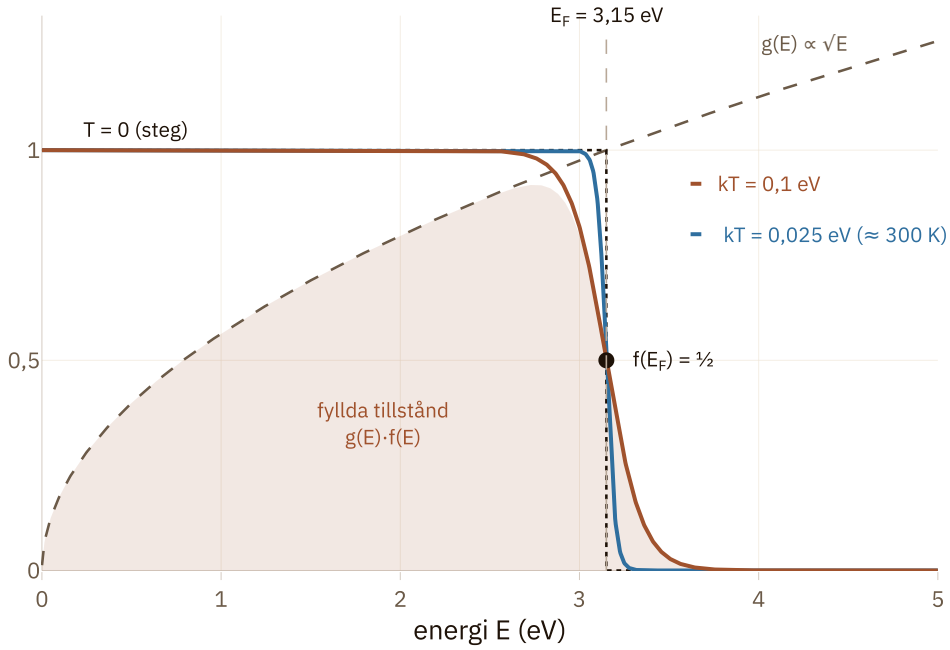
Tre värden räcker för att rita $f(E)$:

$$E = E_F: \qquad f = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$$

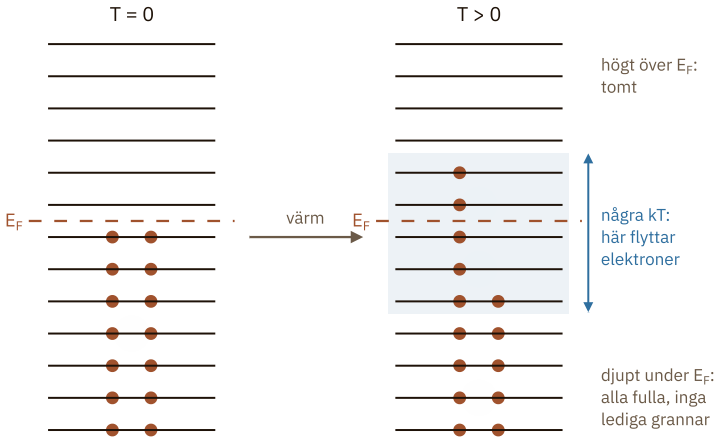
$$E - E_F \ll -kT: \qquad e^{(E-E_F)/kT} \to 0, \quad f \to 1$$

$$E - E_F \gg kT: \qquad e^{(E-E_F)/kT} \to \infty, \quad f \to 0$$

Långt under ferminivån är alla tillstånd fulla, långt över är alla tomma, och övergången sker i ett band som är några kT brett kring E_F. Vid $T = 0$ krymper bandet till noll och f blir ett trappsteg. Vid rumstemperatur är $kT = 0{,}026$ eV, och för en metall med E_F på några eV är steget nästan lika skarpt som vid $T = 0$.



Fermi-Dirac-fördelningen för natrium ($E_F = 3{,}15$ eV) vid $T = 0$ och två temperaturer. Alla kurvor går genom $f = \frac{1}{2}$ vid E_F. Den streckade kurvan är tillståndstätheten $g(E) \propto \sqrt{E}$, och det skuggade området $g(E)f(E)$ visar var elektronerna faktiskt sitter vid den högre temperaturen.



Vad temperaturen gör med nivåerna nära E_F. Vid $T = 0$ är allt under E_F fyllt och allt över tomt. Vid $T > 0$ flyttar bara elektroner inom några kT under E_F till lediga nivåer strax över, och fyllnaden blir symmetrisk kring E_F.

2. Energin för en given sannolikhet

Ofta vill vi veta *var* sannolikheten har ett visst värde. Vi löser ut E ur formeln i rutan:

$$e^{(E-E_F)/kT} + 1 = \frac{1}{f}$$

$$e^{(E-E_F)/kT} = \frac{1}{f} - 1$$

$$\boxed{E = E_F + kT \ln\left(\frac{1}{f} - 1\right)}$$

Med $f = 0{,}9$ och $f = 0{,}1$ blir logaritmen $\ln \frac{1}{9}$ och $\ln 9$. Fallet från $90\ \%$ till $10\ \%$ sker alltså över $2kT \ln 9 \approx 4{,}4\,kT$.

---

3. Symmetrin kring E_F

Sätt $x = \Delta/kT$ och jämför ett tillstånd Δ över E_F med ett lika långt under:

$$f(E_F + \Delta) + f(E_F - \Delta) = \frac{1}{e^{x} + 1} + \frac{1}{e^{-x} + 1}$$

$$= \frac{1}{e^{x} + 1} + \frac{e^{x}}{1 + e^{x}}$$

$$= 1$$

$$\boxed{f(E_F + \Delta) = 1 - f(E_F - \Delta)}$$

Högerledet är sannolikheten att tillståndet under E_F är **tomt**. Sannolikheten att hitta en elektron Δ ovanför ferminivån är alltså lika stor som sannolikheten att hitta ett hål Δ under den. Det är därför ferminivån hamnar mitt i gapet i en ren halvledare.

---

4. Svansen blir Boltzmann

Långt ovanför ferminivån är exponentialfunktionen mycket större än 1, och ettan i nämnaren kan strykas:

$$E - E_F \gg kT: \qquad \boxed{f(E) \approx e^{-(E-E_F)/kT}}$$

Det är Boltzmannfaktorn. Där tillstånden nästan alltid är tomma spelar Pauliprincipen ingen roll, och elektronerna beter sig som en klassisk gas. Redan vid $E - E_F = 3kT$ är felet bara $5\ \%$ ($e^{-3} = 0{,}0498$ mot $f = 0{,}0474$). Det är just den här approximationen vi använder för ledningselektronerna i en

halvledare, där $E - E_F$ är en halv elektronvolt.

Vanliga fel

- **"+1" glöms eller får fel tecken.** Utan ettan får vi Boltzmannfaktorn, som kan bli större än 1 under E_F och alltså inte är en sannolikhet. Med -1 blir det Bose-Einstein-fördelningen, som gäller fotoner och inte elektroner.
- **kT i joule och energierna i eV.** Använd $k = 8{,}617 \cdot 10^{-5}$ eV/K när $E - E_F$ är i eV.
- **f tolkas som ett antal elektroner.** f är sannolikheten att *ett* tillstånd är besatt, mellan 0 och 1. Antalet elektroner kräver också tillståndstätheten: $dN = g(E)f(E)\,dE$.
- **$f(E_F) = \frac{1}{2}$ tolkas som att det finns elektroner vid E_F.** I en halvledare ligger E_F i gapet där det inte finns några tillstånd. Sannolikheten är $\frac{1}{2}$, men det finns inget att besätta.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Besättning kring ferminivån vid rumstemperatur

Vid 300 K: vad är sannolikheten att ett tillstånd $0{,}100$ eV över ferminivån är besatt, och att ett tillstånd $0{,}100$ eV under är besatt? Mellan vilka energier faller f från $0{,}9$ till $0{,}1$?

Lösning

Termiska energin.

$$kT = 8{,}617 \cdot 10^{-5} \cdot 300 = 0{,}02585 \text{ eV}$$

Fysika: Te

Över E_F.

$$f = \frac{1}{e^{0{,}100/0{,}02585} + 1} = \frac{1}{e^{3{,}868} + 1} = \frac{1}{47{,}9 + 1} = \boxed{0{,}0205}$$

Under E_F. Symmetrin ger direkt

$$f(E_F - 0{,}100) = 1 - 0{,}0205 = \boxed{0{,}980}$$

Övergångsbandet. Med $E = E_F + kT\ln(1/f - 1)$:

$$f = 0{,}9: \quad E - E_F = 0{,}02585 \cdot \ln\frac{1}{9} = -0{,}0568\ \text{eV}$$

$$f = 0{,}1: \quad E - E_F = 0{,}02585 \cdot \ln 9 = +0{,}0568\ \text{eV}$$

Sannolikheten faller från $0{,}9$ till $0{,}1$ mellan $\boxed{E_F - 0{,}0568\ \text{eV och } E_F + 0{,}0568\ \text{eV}}$, ett band som är $0{,}114$ eV brett.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Temperaturen för en given sannolikhet

Vid vilken temperatur är sannolikheten $5{,}00\ \%$ att ett tillstånd $0{,}100$ eV över ferminivån är besatt?

Lösning

Lös ut exponenten.

$$\frac{1}{e^{\Delta/kT} + 1} = 0{,}0500$$

$$e^{\Delta/kT} = \frac{1}{0{,}0500} - 1 = 19{,}0$$

$$\frac{\Delta}{kT} = \ln 19{,}0 = 2{,}944$$

Temperaturen.

$$T = \frac{\Delta}{k\ln 19{,}0} = \frac{0{,}100}{8{,}617 \cdot 10^{-5} \cdot 2{,}944} = \boxed{394\ \text{K}}$$

Rimlighetskoll. Vid 300 K var sannolikheten $2{,}05\ \%$ enligt föregående exempel, så det krävs en något högre temperatur för $5\ \%$.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.5 Free-Electron Model of Metals

Halvledare

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #fasta-tillståndets-fysik #modell

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Bandgap, Fermi-Dirac-fördelningen

---

I en halvledare — kisel, germanium, GaAs — är bandgapet litet nog att elektroner lätt exciteras från valensbandet till ledningsbandet, och antalet sådana elektroner stiger snabbt med temperaturen. Varje exciterad elektron lämnar ett hål efter sig i valensbandet, och båda bidrar till ledningen: elektronerna genom att röra sig i ledningsbandet, hålen genom att elektroner i valensbandet flyttar sig in i dem.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{f}_{\text{besatt vid bandkanten}} \approx \exp\left(-\frac{\overbrace{E_g/2}^{\text{halva gapet}}}{\underbrace{kT}_{\text{termisk energi}}}\right)$$

E_F ligger mitt i gapet, så ledningsbandet ligger bara halva gapet ovanför. Kvoten står i en exponent, och därför ger en liten ändring av T eller E_g en stor ändring av antalet laddningsbärare.

---

1. Ferminivån mitt i gapet

I en ren, **egenledande** halvledare kommer varje ledningselektron från valensbandet och lämnar ett hål där. Antalet elektroner i ledningsbandet är därför lika med antalet hål i valensbandet. Enligt symmetrin i Fermi-Dirac-fördelningen är sannolikheten för en elektron Δ över E_F lika stor som sannolikheten för ett hål Δ under. Om banden är ungefär lika formade hamnar E_F därför mitt i gapet.

Ledningsbandets botten ligger då $E_g/2$ över ferminivån:

$$E - E_F = \frac{E_g}{2}$$

$$f = \frac{1}{e^{E_g/2kT} + 1}$$

Eftersom $E_g/2 \gg kT$ kan ettan strykas:

$$\boxed{f \approx e^{-E_g/2kT}}$$

Det är halva gapet, inte hela, som står i exponenten. För kisel vid rumstemperatur blir f ungefär $4 \cdot 10^{-10}$. Det är också lite: rent kisel har vid rumstemperatur ungefär 10^{16} ledningselektroner per kubikmeter, omkring en biljondel av vad en metall har. Därför leder rent kisel dåligt, och därför är det så effektivt att dopa det.

---

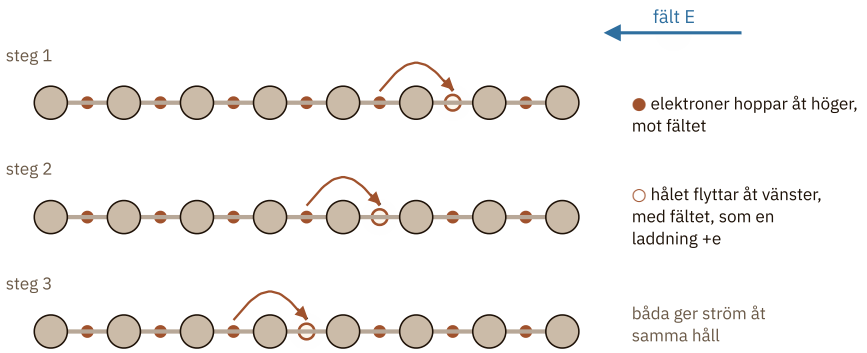
2. Hål

När en elektron lämnar valensbandet blir ett tillstånd tomt. En granne i valensbandet kan flytta in i det tomma tillståndet och lämnar då ett nytt tomrum efter sig. Tomrummet vandrar alltså åt motsatt håll mot elektronerna som flyttar.

Det är enklare att följa tomrummet än alla elektroner i det nästan fulla bandet. Vi kallar det ett **hål** och ger det laddningen $+e$. I ett elektriskt fält rör sig hålet i fältets riktning, som en positiv laddning. Både elektroner och hål ger ström i samma riktning:

$$I = I_{\text{elektroner}} + I_{\text{hål}}$$

I en egenledande halvledare är antalet lika: $n = p$.



Ett hål vandrar. I varje steg hoppar en elektron i en bindning in i hålet till höger om sig, mot fältet. Hålet flyttar då ett steg åt vänster, i fältets riktning, precis som en positiv laddning.

---

3. Stark temperaturberoende

Exponenten gör att antalet laddningsbärare ökar mycket snabbt med temperaturen. För kisel ökar det ungefär tjugo gånger mellan 300 och 350 K. Resistiviteten sjunker därför kraftigt när en halvledare värms upp. En metall beter sig tvärtom: där är antalet elektroner fast, och när gittret vibrerar mer sprids elektronerna oftare, så resistiviteten ökar något med temperaturen.

Den skillnaden används i termistorer, temperaturgivare som är gjorda av halvledarmaterial.

---

4. Fotoledning

En foton med $hf \geq E_g$ kan också skapa ett par av en elektron och ett hål (se Bandgap). En halvledare leder då bättre när den belyses än i mörker. Det är principen för ljussensorer och, tillsammans med en pn-övergång, för solceller. Ljus med längre våglängd än hc/E_g passerar utan effekt.

⚠ Vanliga fel

- **Hela gapet i exponenten.** Avståndet från E_F till ledningsbandet är $E_g/2$. Med $e^{-E_g/kT}$ blir svaret för kisel 10^{-19} i stället för 10^{-10}.
- **Hålet som en verklig partikel.** Hålet är ett tomt tillstånd i valensbandet, inte en positron. Det har ingen egen existens utanför kristallen.
- **“Resistansen ökar med temperaturen.”** Det gäller metaller. En halvledare leder *bättre* när den blir varm.
- kT **vid fel temperatur.** Exponenten är så känslig att en ändring på tio procent i T ändrar f med en faktor större än två. Räkna om kT för varje temperatur.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Kisel och germanium

Kisel har bandgapet $1{,}12$ eV och germanium $0{,}67$ eV, med ferminivån mitt i gapet. Bestäm sannolikheten att ett tillstånd vid ledningsbandets botten är besatt i kisel vid 300 K och 350 K, och kvoten mellan dem. Jämför med germanium vid 300 K.

Lösning

Termiska energier.

$kT_{300} = 8{,}617 \cdot 10^{-5} \cdot 300 = 0{,}025852$ eV $\qquad kT_{350} = 8{,}617 \cdot 10^{-5} \cdot 350 = 0{,}030161$

Fysika: Te

Kisel vid 300 **K.** $E_g/2 = 0{,}560$ eV:

$$f = e^{-0{,}560/0{,}025852} = e^{-21{,}662} = \boxed{3{,}91 \cdot 10^{-10}}$$

Kisel vid 350 **K.**

$$f = e^{-0{,}560/0{,}030161} = e^{-18{,}567} = \boxed{8{,}64 \cdot 10^{-9}}$$

Kvoten.

$$\frac{8{,}64 \cdot 10^{-9}}{3{,}91 \cdot 10^{-10}} = \boxed{22{,}1}$$

En temperaturökning på $17\ \%$ ger drygt tjugo gånger fler ledningselektroner.

Germanium vid 300 **K.** $E_g/2 = 0{,}335$ eV:

$$f = e^{-0{,}335/0{,}025852} = e^{-12{,}958} = \boxed{2{,}36 \cdot 10^{-6}}$$

Det är omkring 6000 gånger mer än i kisel vid samma temperatur. Ett gap som bara är $40\ \%$ mindre ger nästan fyra tiopotenser mer.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.6 Semiconductors

Dopning

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#fysik #fasta-tillståndets-fysik #metod

> **Kurs:** F0005T **Förkunskaper:** Halvledare

Genom att byta ut enstaka atomer i halvledarkristallen mot grundämnen med annat antal valenselektroner styrs ledningen. En donator med fem valenselektroner — N, P, As — ger en extra elektron och därmed n-dopning med elektronledning. En acceptor med tre valenselektroner — B, Al, Ga — saknar en elektron och ger p-dopning med hålledning. Kombinationen av n- och p-dopade områden är grunden för halvledarkomponenter.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{E_d}_{\substack{\text{donatorns}\\ \text{bindningsenergi}}} \approx \frac{\overbrace{m^*/m_e}^{\text{lättare}}}{\underbrace{K^2}_{\substack{\text{skärmning,}\\ K\approx 11{,}7}}} \cdot \underbrace{13{,}6\ \text{eV}}_{\text{väte}}$$

$$\underbrace{I}_{\text{ström}} = \underbrace{I_S}_{\substack{\text{mättnads-}\\ \text{ström}}} \left(\underbrace{e^{eV/kT}}_{\substack{\text{växer snabbt}\\ \text{i framriktning}}} - 1 \right)$$

Donatorn är en väteatom inne i kristallen: elektronens effektiva massa är mindre och kislet skärmar laddningen, så bindningen blir omkring femhundra gånger svagare än i väte och av samma storlek som kT. Diodlagen säger att strömmen växer exponentiellt med spänningen i framriktningen och stannar vid $-I_S$ i backriktningen.

1. Donatorer

I kisel binder varje atom till fyra grannar med sina fyra valenselektroner. En fosforatom på en kiselplats (en substitutionell punktdefekt) använder fyra av sina fem elektroner till bindningarna. Den femte blir över och är bara svagt bunden till P^+-jonen.

Hur svagt kan vi uppskatta med Bohrs modell: den femte elektronen kretsar kring en positiv laddning, precis som i väte. Två saker skiljer sig. Kislet runt omkring skärmar av laddningen med den dielektriska konstanten $K \approx 11{,}7$, och elektronen rör sig i kristallen som om den hade en **effektiv massa** m^* som är mindre än m_e.

Härledning av donatornivån med vätemodellen

I väte är jonisationsenergin och radien

$$E_1 = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = 13{,}6 \text{ eV}, \qquad a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 0{,}0529 \text{ nm}$$

Fysika: Fd3 (väteliknande E_n och r_n), Te (E_H, a0)

I kristallen ersätts ϵ_0 med $K\epsilon_0$ och m_e med m^*:

$$E_d = \frac{m^* e^4}{8K^2\epsilon_0^2 h^2} = \frac{m^*/m_e}{K^2} \cdot 13{,}6 \text{ eV}$$

$$r_d = \frac{K\epsilon_0 h^2}{\pi m^* e^2} = \frac{K}{m^*/m_e} \cdot a_0$$

$$\boxed{E_d \approx \frac{m^*/m_e}{K^2} \cdot 13{,}6 \text{ eV}}$$

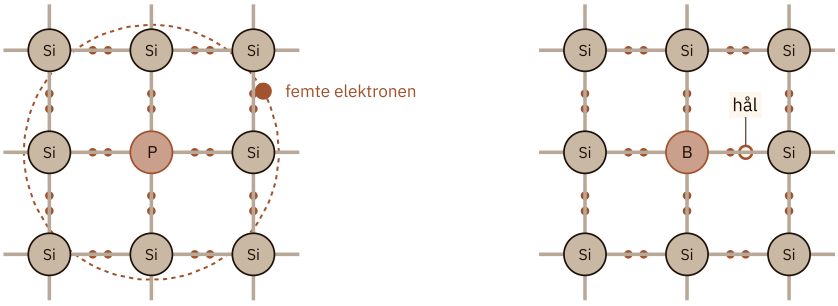
Med $m^* = 0{,}26\, m_e$ för kisel blir $E_d \approx 0{,}026$ eV och banans radie $2{,}4$ nm, ungefär tio atomavstånd. Uppskattningen är grov men storleksordningen stämmer: uppmätta donatornivåer i kisel ligger $0{,}01$–$0{,}05$ eV under ledningsbandets botten. Det är av samma storlek som kT vid rumstemperatur, så nästan alla donatorer har lämnat ifrån sig sin elektron till ledningsbandet. Materialet blir **n-dopat**, med elektroner som laddningsbärare.

---

2. Acceptorer

En boratom har bara tre valenselektroner. En av de fyra bindningarna till grannarna saknar en elektron. Det krävs bara lite energi för att en elektron från valensbandet ska hoppa in och fylla bindningen. Acceptornivån ligger därför strax *ovanför* valensbandets topp, och när den fylls lämnar elektronen ett hål efter sig i valensbandet. Materialet blir **p-dopat**, med hål som laddningsbärare.

Donator och acceptor är varandras spegelbilder: en nivå strax under ledningsbandet som ger bort elektroner, respektive en nivå strax över valensbandet som tar emot dem.

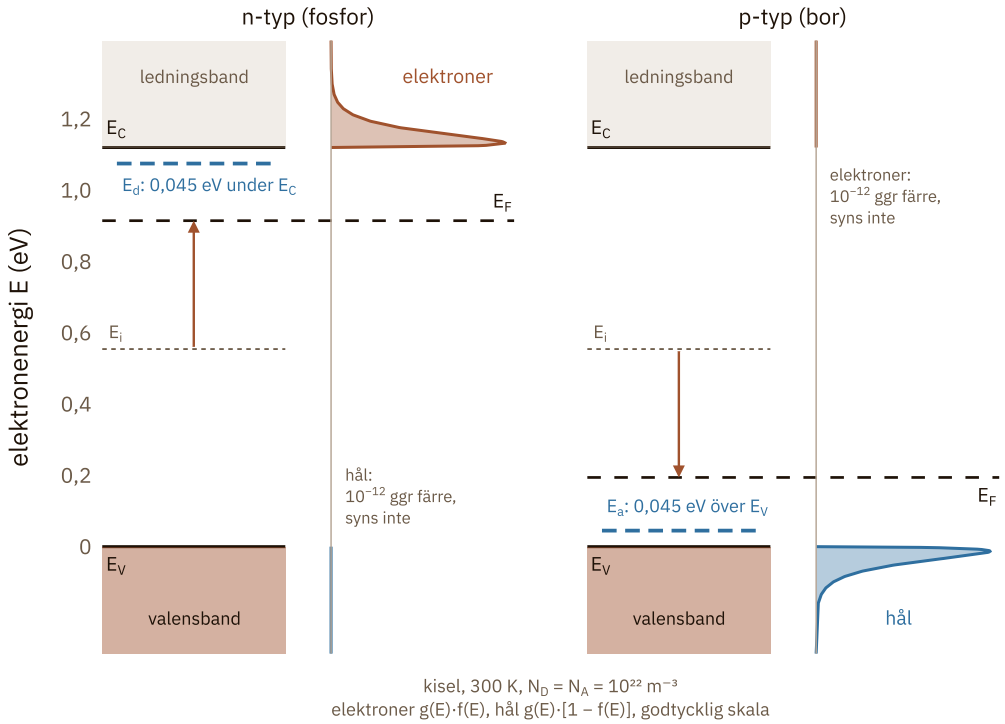


Kisel med en fosfor- och en boratom. Fosfor har en elektron för mycket för de fyra bindningarna, och den femte kretsar i en stor, svagt bunden bana. Bor har en för lite, och den tomma platsen i en bindning är ett hål.

---

3. Majoritets- och minoritetsbärare

I ett n-dopat material är elektronerna **majoritetsbärare** och hålen **minoritetsbärare**. I ett p-dopat material är det tvärtom. Ferminivån flyttar sig från mitten av gapet mot ledningsbandet i n-dopat material och mot valensbandet i p-dopat.



Fosfor- respektive bordopat kisel vid 300 K. Donatornivån ligger strax under E_C och acceptornivån strax över E_V, och ferminivån har flyttat från E_i mot respektive band. Till höger om varje banddiagram syns bärarfördelningen: majoritetsbärarna samlas nära bandkanten, och minoritetsbärarna är för få för

att synas.

Materialet är fortfarande elektriskt neutralt. Varje fri elektron i n-dopat kisel motsvaras av en fast P^{+}-jon i gittret, och varje hål i p-dopat kisel av en fast B^{-}-jon.

---

4. pn-övergången

Där ett p-dopat och ett n-dopat område möts diffunderar elektroner från n-sidan in i p-sidan och hål åt andra hållet, och de förintar varandra. Kvar blir ett tunt **utarmningsskikt** utan fria laddningsbärare, där de fasta jonerna ger ett elektriskt fält som bromsar diffusionen. Lägger vi på en spänning V i framriktningen, med p-sidan positiv, sänks barriären och strömmen växer exponentiellt. I backriktningen höjs den, och bara en liten mättnadsström I_S går:

$$\boxed{I = I_S\,(e^{eV/kT} - 1)}$$

Det e som står i exponenten är elementarladdningen. Kvoten kT/e är $0{,}0259$ V vid rumstemperatur, så redan en spänning på några tiondels volt ger en ström som är tiotusentals gånger större än I_S.

Samma övergång används på två sätt till: i en **lysdiod** faller elektronerna ner i hålen och sänder ut ljus med $hf \approx E_g$, och i en **solcell** skapar ljuset par av elektroner och hål som fältet i utarmningsskiktet drar isär.

> ⚠ **Vanliga fel**
>
> - **“p-dopat är positivt laddat.”** Både n- och p-dopat material är neutrala. Bokstaven anger vilken sorts laddningsbärare som dominerar.
> - **Grupp III och V förväxlas.** Donatorer (P, As, Sb) har *fem* valenselektroner och ger n-dopning. Acceptorer (B, Al, Ga) har *tre* och ger p-dopning.
> - **“Dopningen är för liten för att spela roll.”** En donator per miljon kiselatomer ger miljontals gånger fler ledningselektroner än i rent kisel.
> - **Tecknet på V i diodlagen.** $V > 0$ betyder p-sidan positiv (framriktning). I backriktningen går $e^{eV/kT}$ mot noll och $I \to -I_S$.

---

5. Lösta exempel

Exempel — Fosfordopat kisel

Kisel har åtta atomer per kubisk enhetscell och gitterkonstanten $a = 0{,}5431$ nm. Det dopas med en fosforatom per 10^6 kiselatomer, och donatornivån ligger $0{,}045$ eV under ledningsbandet.

a) Bestäm donatorkoncentrationen. b) Beräkna Boltzmannfaktorn $e^{-E_d/kT}$ vid 300 K och jämför med faktorn $e^{-E_g/2kT} = 3{,}91 \cdot 10^{-10}$ för egenledning. c) Rent kisel har ungefär $1{,}0 \cdot 10^{16}$ ledningselektroner per m³ vid 300 K. Hur många gånger fler blir det om alla donatorer är joniserade?

Lösning

a) Atomtätheten i kisel:

$$n_{\text{Si}} = \frac{8}{(0{,}5431 \cdot 10^{-9})^3} = 4{,}99 \cdot 10^{28}\ \text{m}^{-3}$$

En på miljonen:

$$n_d = 10^{-6} \cdot 4{,}99 \cdot 10^{28} = \boxed{4{,}99 \cdot 10^{22}\ \text{m}^{-3}}$$

b) Med $kT = 0{,}02585$ eV:

$$e^{-E_d/kT} = e^{-0{,}045/0{,}02585} = e^{-1{,}741} = \boxed{0{,}175}$$

Det är $0{,}175 / 3{,}91 \cdot 10^{-10} \approx 4{,}5 \cdot 10^{8}$ gånger större än faktorn för egenledning. Donatorelektronerna har så låg bindningsenergi att de i stort sett alla är fria.

c)

$$\frac{n_d}{n_i} = \frac{4{,}99 \cdot 10^{22}}{1{,}0 \cdot 10^{16}} = \boxed{5{,}0 \cdot 10^{6}}$$

En miljondel fosfor ger fem miljoner gånger fler ledningselektroner.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel — Diodens ström

En kiseldiod har mättnadsströmmen $I_S = 1{,}00$ nA vid 300 K. Bestäm strömmen vid spänningen $+0{,}300$ V och $-0{,}300$ V. Vilken spänning i framriktningen ger strömmen $10{,}0$ mA?

Lösning

Termiska spänningen.

$$\frac{kT}{e} = \frac{1{,}381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 0{,}02585 \text{ V}$$

Framriktningen, $+0{,}300$ V.

$$\frac{eV}{kT} = \frac{0{,}300}{0{,}02585} = 11{,}61$$

$$I = 1{,}00 \cdot 10^{-9}\,(e^{11{,}61} - 1) = 1{,}00 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}10 \cdot 10^{5} = \boxed{0{,}110 \text{ mA}}$$

Backriktningen, $-0{,}300$ V. $e^{-11{,}61} = 9 \cdot 10^{-6}$ är försumbart:

$$I = 1{,}00 \cdot 10^{-9}\,(e^{-11{,}61} - 1) \approx \boxed{-1{,}00 \text{ nA}}$$

Spänningen för $10{,}0$ mA. Lös ut V:

$$e^{eV/kT} = \frac{I}{I_S} + 1 = \frac{10{,}0 \cdot 10^{-3}}{1{,}00 \cdot 10^{-9}} + 1 \approx 1{,}00 \cdot 10^{7}$$

$$V = \frac{kT}{e} \ln(1{,}00 \cdot 10^{7}) = 0{,}02585 \cdot 16{,}12 = \boxed{0{,}417 \text{ V}}$$

Samma spänning åt andra hållet ger strömmar som skiljer sig en faktor hundratusen. Det är diodens likriktande egenskap.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.6 Semiconductors
- 42.7 Semiconductor Devices