

t-fördelningen

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #statistik #fördelning

Kurs: S0008M Förkunskaper: Konfidsensintervall, Punktskattning

När standardavvikelsen σ är okänd och ersätts med sin skattning s är den standardiserade medelvärdesvariabeln inte längre $N(0, 1)$ utan t -fördelad med $n - 1$ frihetsgrader. t -fördelningen har tjockare svansar, och konfidsensintervallen blir därför bredare.

1. Två kvoter som liknar varandra

För oberoende $\xi_i \in N(\mu, \sigma)$ jämför vi

$$z = \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{och} \quad t = \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma^*/\sqrt{n}}$$

Skillnaden är nämnaren. I z står den fasta konstanten σ . I t står **skattningen** σ^* , som själv är slumpmässig och varierar från stickprov till stickprov.

Fördelningarna

$$\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0, 1), \quad \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma^*/\sqrt{n}} \in t(n - 1)$$

$t(f)$ är t -fördelningen med f **frihetsgrader**. För ett stickprov är $f = n - 1$, samma tal som nämnaren i s^2 .

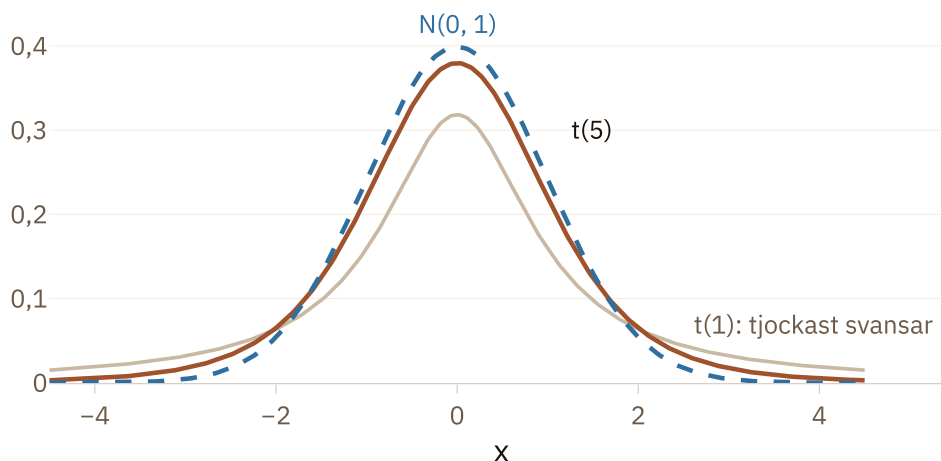
Varför de måste skilja sig

Tänk dig att vi simulerar många stickprov. Ibland blir s av en slump mycket mindre än σ , och då blir t stort även om $\bar{\xi}$ ligger nära μ . Den extra osäkerheten i nämnaren ger fler extrema värden — tjockare svansar — än $N(0, 1)$. Med små stickprov är effekten stor; med stora är s nästan alltid

nära σ och skillnaden försvinner.

Fördelningen härleddes av kemisten W. S. Gosset, som arbetade med kvalitetskontroll på Guinness bryggeri och publicerade under pseudonymen *Student*. Därav namnet Students *t*-fördelning.

2. Egenskaper



- Symmetrisk kring 0, klockformad som $N(0, 1)$.
- **Tjockare svansar** — mer massa långt ut.
- När $f \rightarrow \infty$ går $t(f)$ mot $N(0, 1)$.

Kvantilen $t_\alpha(f)$ definieras som för normalfördelningen: $P(t > t_\alpha(f)) = \alpha$. Den läses ur *t*-tabellen och är alltid större än motsvarande λ_α :

f	3	7	12	24	∞
$t_{0,025}(f)$	3,182	2,365	2,179	2,064	1,960 = $\lambda_{0,025}$

3. Konfidensintervall för μ med okänt σ

Samma härledning som i [Konfidensintervall](#), med $\lambda_{\alpha/2}$ utbytt mot $t_{\alpha/2}(n-1)$ och σ mot s :

$$I_\mu = \left[\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

⚠ Vilket intervall när?

λ -intervallet kräver att σ är **känd i förväg**, innan vi ser mätvärdena — till exempel från lång erfarenhet av mätinstrumentet. Har vi bara räknat ut s ur samma data är σ okänd, och då gäller t -intervallet. Det vanliga fallet i praktiken är okänd σ .

På räknaren: `menu` → Statistics → Confidence Intervals → t Interval, eller kvantilen direkt med `invt(1- $\alpha$ /2, f)`.

⚠ Vanliga fel

- **Frihetsgraderna.** Ett stickprov har $f = n - 1$, inte n .
- **invt med fel svans.** `invt(p, f)` ger kvantilen med sannolikheten p till vänster; $t_{0,025}(8)$ är `invt(0.975, 8)`.

4. Lösta lektionsuppgifter

☰ Lektion 12, övning 2 – Samma data, okänd standardavvikelse

Observationerna 0,5 0,2 0,3 -0,2 0,3 0,3 0,4 0,2 kommer från $N(\mu, \sigma)$. Nu vet vi ingenting i förväg om σ . Beräkna ett 95 % konfidensintervall för μ och tolka det.

✍ Lösning

Modell. $\xi_i \in N(\mu, \sigma)$, $i = 1, \dots, 8$, oberoende, μ och σ okända.

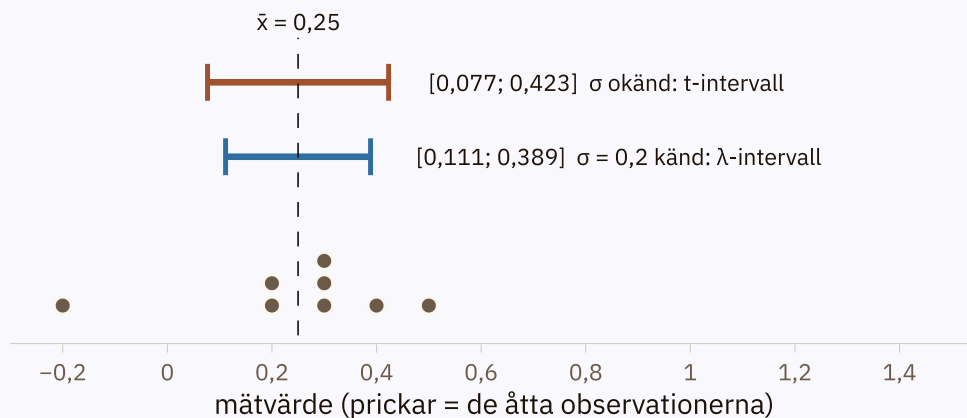
Skattningar. $\bar{x} = 0,25$ och

$$s = \sqrt{\frac{1}{7} \sum_{i=1}^8 (x_i - 0,25)^2} \approx 0,207$$

Intervall. $t_{0,025}(7) = 2,365$:

$$I_\mu = [0,25 \mp 2,365 \cdot \frac{0,207}{\sqrt{8}}] = [0,25 \mp 0,173] \approx [0,08; 0,42]$$

Tolkning. Med 95 % säkerhet ligger μ mellan 0,08 och 0,42.



Jämförelse. Med $\sigma = 0,2$ känd blev intervallet $[0,11; 0,39]$, se **Konfidsensintervall**. Här är $s \approx \sigma$, men $t_{0,025}(7) = 2,365$ är större än $1,96$ – priset för att inte känna σ .

På räknaren. Mata in de åtta värdena i en lista och kör t Interval med **Data** och **C** Level **0.95**.

Facit: $[0,07; 0,43]$ – facit avrundar gränserna utåt; de oavrundade gränserna är 0,077 och 0,423.

≡ Lektion 12, övning 3 och 4 – z eller t?

Låt $\xi_1, \dots, \xi_n$ vara oberoende och $N(\mu, \sigma)$.

a) På vilket sätt skiljer sig $\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma^*/\sqrt{n}}$ och $\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ åt, och vilka fördelningar har de?

b) Du ska beräkna ett konfidsensintervall för μ med konfidsensgrad $1 - \alpha$ och väljer mellan

$$[\bar{x} \mp \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}] \quad \text{och} \quad [\bar{x} \mp t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}]$$

I vilken situation ska respektive intervall användas?

 Lösning

a) Den första har den slumpmässiga skattningen σ^* i nämnaren, den andra den fasta parametern σ . Därför

$$\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0, 1), \quad \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma^*/\sqrt{n}} \in t(n - 1)$$

Variationen i σ^* gör att t -kvoten oftare hamnar långt ut, se avsnitt 1.

b) λ -intervallet när σ är **känd i förväg**; t -intervallet när σ är **okänd** och skattas med s ur samma mätvärden. Båda förutsätter normalfördelade observationer.

Facit (övning 3): $N(0, 1)$ respektive $t(n - 1)$.

≡ Lektion 12, övning 9 (Vännman 8.19 a) – Densitet, 98 %-intervall

Densiteten (g/cm^3) hos ett material mäts 13 gånger. Mätvärdena antas vara oberoende observationer från $N(\mu, \sigma)$ med okänt σ . Ur mätvärdena fås $\bar{x} = 0,508$ och $\sum x_i^2 = 3,355708$. Beräkna ett 98 % konfidensintervall för μ .

 Lösning

Modell. ξ_i = densitet vid mätning i , $\xi_i \in N(\mu, \sigma)$, $i = 1, \dots, 13$, oberoende.

Skattning av σ med räkneformen:

$$s^2 = \frac{1}{12} (3,355708 - 13 \cdot 0,508^2) = 7,3 \cdot 10^{-5}, \quad s \approx 0,00854$$

Intervall. 98 % ger $\alpha/2 = 0,01$ och $t_{0,01}(12) = 2,681$:

$$I_\mu = [0,508 \mp 2,681 \cdot \frac{0,00854}{\sqrt{13}}] = [0,508 \mp 0,0064] \approx \boxed{[0,502; 0,514]}$$

Med 98 % säkerhet ligger den förväntade densiteten mellan 0,502 och 0,514 g/cm^3 . Utan normalfördelningsantagande, se **Teckenintervall**.

Uppgiften (Vännman 8.19 a, i 2:a uppl. 8.20 a) är återgiven ur det handskrivna lösningsförslaget, och intervallet stämmer med det: $[0,501; 0,515]$, avrundat utåt från 0,5016 och 0,5144. Rådata finns inte i valvet.

Se även

- Konfidensintervall
- Punktskattning
- Normalfördelning
- Stickprov i par
- Två stickprov

Resurser

- [Khan Academy: Confidence intervals](#)
- [Wikipedia: Students t-fördelning](#)