mobius strip

Jun 03, 2026, 5 min read

#matematik #flervariabelanalys #topologi #yta

> **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Parametriserade ytor, Orientering (kurvor och ytor)

---

1. Vad det är, och varför det dyker upp i kursen

Möbiusbandet är den enkla men paradoxala yta man får genom att ta en pappersremsa, vrida den ett halvt varv, och tejpa ihop ändarna. Resultatet är en yta som ser harmlöst krökt ut men som har två egenskaper som strider mot vad man förväntar sig av en "remsa":

- den har **bara en sida**, och
- den har **bara en rand**.

Båda dessa upptäcktes på 1850-talet av August Ferdinand Möbius (och oberoende av Johann Benedict Listing). I en kurs i vektoranalys dyker bandet upp som *motexemplet* — den yta som visar att satser av typen Stokes sats och Gauss sats inte gäller på vilken yta som helst. De kräver att ytan är **orienterbar**, och Möbiusbandet är inte det.

2. Parametrisering

En standardparametrisering är

$$\vec{r}(u,v) = \begin{bmatrix} \left(R + \frac{w}{2} v \cos(u/2)\right) \cos u \\ \left(R + \frac{w}{2} v \cos(u/2)\right) \sin u \\ \frac{w}{2} v \sin(u/2) \end{bmatrix}, \qquad u \in [0, 2\pi), \quad v \in [-1, 1].$$

Här är R ringens radie och w remsans bredd. Bilden ovan motsvarar $R = 1, w = 0{,}4$.

Vad gör $u/2$:n?

Faktorn $u/2$ är där all dramatik sitter. När u vrider sig ett helt varv runt ringen ($0 \to 2\pi$), hinner $u/2$ bara svänga ett halvt varv ($0 \to \pi$). Det betyder att remsans tvärsnitt har roterat 180° när vi är tillbaka — och det är det halva varvet som gör allt skumt.

3. En sida — den icke-orienterbara egenskapen

På en “vanlig” yta — en sfär, en cylinder, ett plan — kan man peka ut en *enhetsnormal* $\hat{n}$ i varje punkt och göra det *kontinuerligt*: när man rör sig längs ytan vrider sig $\hat{n}$ också kontinuerligt, men den hoppar aldrig.

På ett Möbiusband fungerar det inte. Välj en normal i en startpunkt, följ den runt bandet en gång, och du kommer tillbaka till samma punkt — men med normalen pekande åt motsatt håll.

I bilden ovan ser man pilarna kantra över när de följer mittlinjen ett varv. När man kommer hem är normalen flippad. Eftersom det inte finns något ställe att “släppa” omhopp utan att stänga ögonen för diskontinuitet, säger man att bandet **inte är orienterbart**.

Definition (med ord)

En yta är *orienterbar* om man kan välja en enhetsnormal kontinuerligt över hela ytan. Möbiusbandet kan inte det — alltså saknar det "två sidor" i den meningen vi är vana vid.

4. En rand — den enda boundary-kurvan

Den andra paradoxen är randen. På en vanlig pappersremsa har du två separata kanter: en "ovan" och en "under". På Möbiusbandet är de samma kant.

Bilden visar randen markerad. Att den ser ut som en sammanflätad slinga är ingen optisk illusion — det är *en* kurva, men du måste gå runt bandet *två* varv för att komma tillbaka till startpunkten med samma orientering. Matematiskt: randen ∂M är homeomorf med en cirkel (precis som randen till en disk), men inbäddningen i $\mathbb{R}^3$ snor sig kring sig själv.

5. Konsekvens — varför Stokes och Gauss kräver orienterbarhet

Stokes sats säger att cirkulationen av ett vektorfält längs randen ∂S är lika med ytintegralen av rotationen över S. Men ytintegralen i högerled bygger på att man kan välja en riktning på normalen — och då används högerhandsregeln för att bestämma orienteringen på randen.

På ett Möbiusband finns ingen sådan konsekvent normal att välja. Om man försöker tillämpa Stokes sats hamnar man i en motsägelse: räkningen vänder tecken halvvägs runt. Det är inte ett räknefel, det är en *omöjlighet* — satsen är formulerad bara för orienterbara ytor.

Samma sak med Gauss sats: divergenssatsen behöver en sluten orienterbar yta med en *yttre* normal. Möbiusbandet är inte ens en sluten yta (det har rand), men dess släkting **Klein-flaskan** är sluten och icke-orienterbar — och inte heller där fungerar divergenssatsen direkt.

> **Tumregel**
>
> Om en sats om vektoranalys börjar med orden *"låt S vara en orienterbar yta..."*, är Möbiusbandet det första exemplet du ska kasta in för att se vad som händer när villkoret bryts.

6. Två klassiska experiment

Med en pappersremsa och en sax kan man göra två oväntade upptäckter — båda äkta resultat, inga trick.

Skär en gång längs mittlinjen ›

Skär en tredjedel in från kanten ›

Båda dessa är direkta konsekvenser av att bandets randkurva sluter sig efter två varv, inte ett.

7. Generaliseringar

Möbiusbandet är det enklaste exemplet på en icke-orienterbar yta. Andra:

- **Klein-flaskan** — slut icke-orienterbar yta utan rand. Kan inte bäddas in i $\mathbb{R}^3$ utan självgenomskärning, men finns naturligt i $\mathbb{R}^4$.
- **Reella projektiva planet** $\mathbb{RP}^2$ — Möbiusbandet med randen sammanlimmad till en punkt. Också icke-orienterbart.

Alla dessa delar samma diagnos: de saknar en kontinuerlig normal.

Läsning

- 16.6 Oriented Surfaces and Flux Integrals — där Adams introducerar orienterbarhet och tar upp Möbiusbandet som undantag.

Se även

- Orientering (kurvor och ytor)
- Parametriserade ytor
- Ytintegraler
- Stokes sats
- Gauss sats
- topologiska begrepp

Resurser

- Vihart: Möbius music box — kreativ visualisering, bra för intuition.
- Numberphile: A strange map projection (Möbius bands) — Möbius i mer oväntade sammanhang.
- Wikipedia: Möbius strip
- Wikipedia: Klein bottle — den slutna släktingen.