

ffg-fördelning

19 okt. 2026, 2 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #fördelning

Kurs: S0008M Förkunskaper: Oberoende upprepningar

ffg-fördelningen, för-första-gången-fördelningen, beskriver antalet oberoende försök som krävs tills en händelse inträffar för första gången. Till skillnad från binomialfördelningen är antalet försök inte bestämt i förväg.

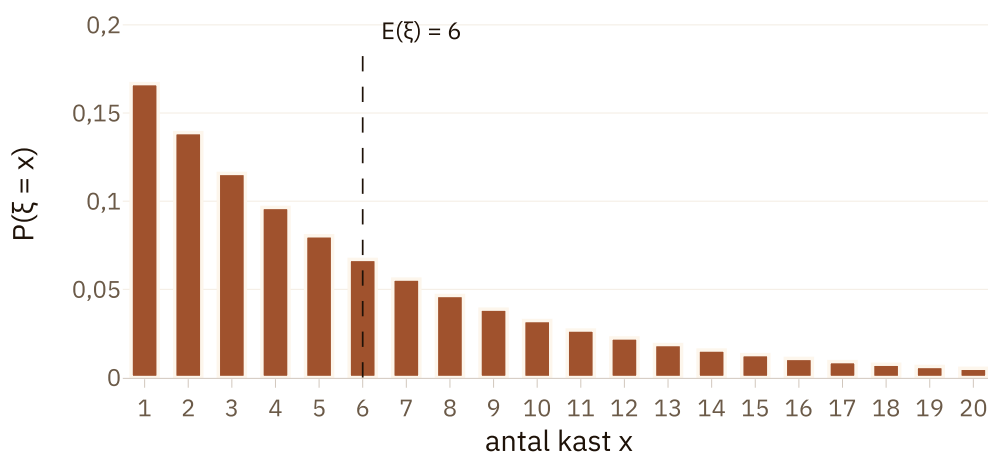
1. Sannolikhetsfunktionen

Upprepa ett delförsök **oberoende** tills händelsen A , med sannolikheten p i varje försök, inträffar för första gången. Låt ξ = antalet försök som krävs, det sista inräknat. Att $\xi = k$ betyder $k - 1$ misslyckanden följda av ett lyckat:

$$P(\xi = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Vi skriver $\xi \in \text{ffg}(p)$. Sannolikheterna avtar geometriskt: varje steg multiplicerar med $1 - p$.

ffg(1/6): kast tills första sexan



På räknaren heter fördelningen `geomPdf(p,k)` och `geomCdf(p,a,b)` — räknarens geometriska fördelning är samma som ffg, den börjar på 1.

2. Väntevärde och varians

$$E(\xi) = \frac{1}{p}, \quad V(\xi) = \frac{1-p}{p^2}$$

Väntevärdet är intuitivt: med sannolikheten $1/6$ för en sexa behövs i genomsnitt 6 kast för den första.

Härledning av $E(\xi) = 1/p$

Med $q = 1 - p$ och derivatan av den geometriska serien, $\sum_{k \geq 1} k q^{k-1} = \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2}$:

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Variansen följer på samma sätt ur andraderivatan av serien.

Fördelningsfunktionen har en enkel sluten form. "Mer än k försök behövs" betyder att de k första alla misslyckas:

$$P(\xi > k) = (1-p)^k, \quad F_{\xi}(k) = 1 - (1-p)^k$$

Exempel – Kast tills första sexan

Vi kastar en tärning tills den första sexan kommer.

- Vad är sannolikheten att det behövs mer än 6 kast?
- Vad är sannolikheten att det räcker med högst 3 kast?

Lösning

Modell. ξ = antal kast, $\xi \in \text{ffg}(1/6)$.

a) De sex första kasten ska alla sakna sexa:

$$P(\xi > 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx \boxed{0,335}$$

Trots att väntevärdet är 6 kast behövs fler än sex i en tredjedel av fallen. Fördelningen har en lång svans åt höger.

b)

$$P(\xi \leq 3) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} \approx \boxed{0,421}$$

På räknaren. b) `geomCdf(1/6,1,3)`.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Två varianter i litteraturen

Ibland räknas i stället antalet *misslyckanden* före det första lyckade, som då börjar på 0. Den varianten kallas ofta geometrisk fördelning och har väntevärdet $(1 - p)/p$. Kontrollera alltid vilken som avses.

Se även

- Oberoende upprepningar
- Binomialfördelning
- Stokastisk variabel
- Exponentialfördelning

Resurser

- [Wikipedia: Geometric distribution](#) 