

Ytintegraler

Jun 12, 2026, 3 min read

#matematik

#flervariabelanalys

#integral

Kurs: M0068M Förkunskaper: Parametriserade ytor, Dubbelintegraler

1. Idén – integrera över en yta istället för ett område

En vanlig **dubbelintegral** summerar funktionsvärden över ett plant område $D \subset \mathbb{R}^2$. En **ytintegral** gör samma sak, men över en krökt yta S i rummet. Två naturliga tolkningar:

- **Massa:** om S är ett tunt skal med ytdensitet $\rho(x, y, z)$ är massan $\iint_S \rho dS$.
- **Medelvärde:** om f representerar en storhet (temperatur, höjd, ...) längs ytan är dess medelvärde $\frac{1}{\text{area}(S)} \iint_S f dS$.

Konstrukten är direkt analog till **kurvintegralen** $\int_C f ds$ – bara att vi summerar över en 2D-yta istället för en 1D-kurva, och båglängdselementet ds ersätts av ett **arealelement** dS .

Grundtanken

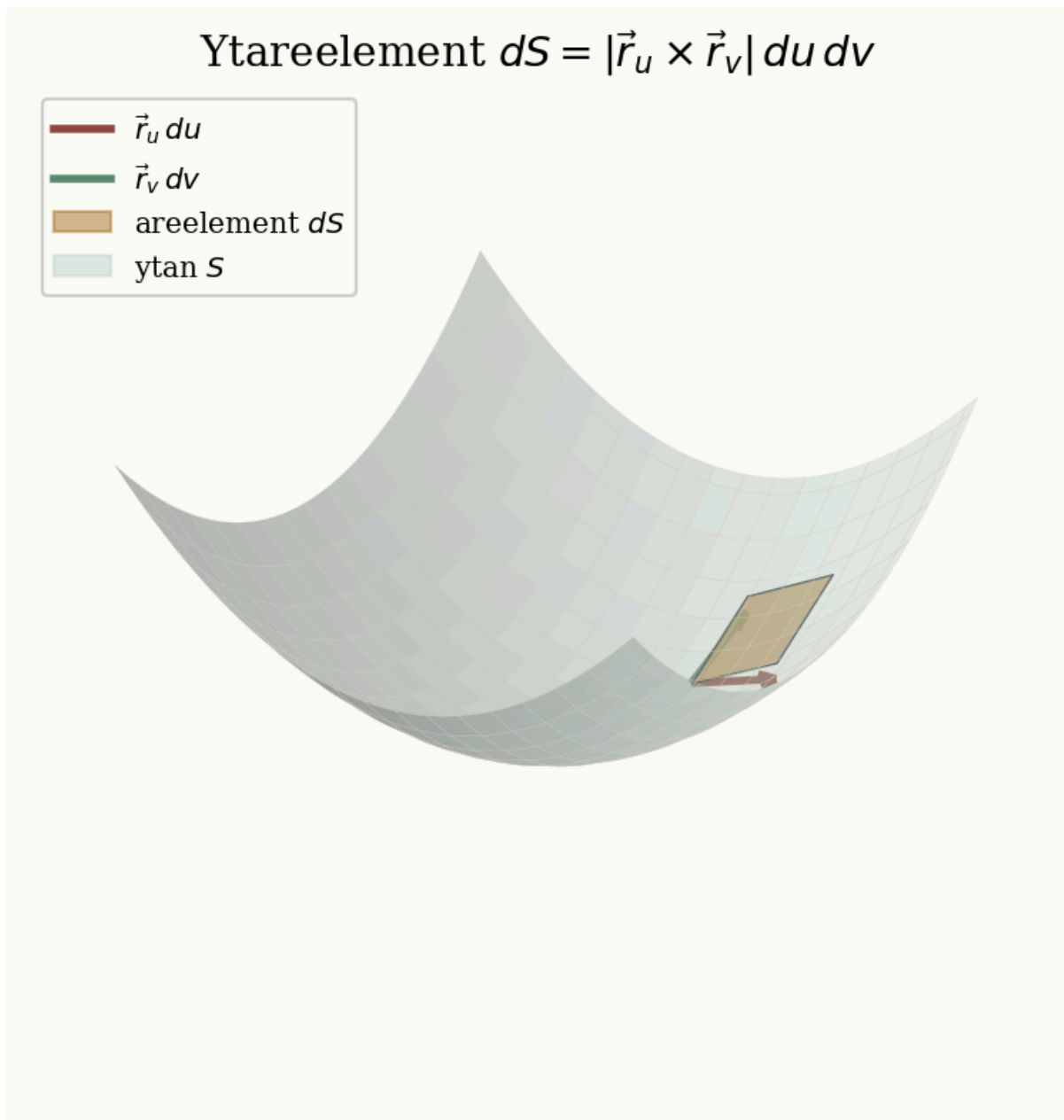
$\iint_S f dS$ summerar f längs ytan, vägt med den lokala arean. När $f \equiv 1$ får man ytans area.

2. Definition via parametrisering

Låt S vara given av en **parametrisering** $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$. Då definieras

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

Faktorn $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$ är den lokala arealförstoringen — hur en liten rektangel $du dv$ i parameterplanet blir när den lyfts upp på ytan.



I bilden visar den lilla parallelogrammen exakt detta: $\vec{r}_u du$ och $\vec{r}_v dv$ spänner upp en liten yta vars area är $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv = dS$.

3. Användbara specialfall

Graf $z = f(x, y)$ över $D \subset \mathbb{R}^2$

Med parametriseringen $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ blir

$$\iint_S g \, dS = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy$$

Sfär av radie R

Med $\vec{r}(\phi, \theta)$ och $dS = R^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta$:

$$\iint_S g \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\vec{r}(\phi, \theta)) R^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta.$$

Cylinder av radie R , höjd h

Med $\vec{r}(\theta, z)$ och $dS = R \, d\theta \, dz$:

$$\iint_S g \, dS = \int_0^h \int_0^{2\pi} g(R \cos \theta, R \sin \theta, z) R \, d\theta \, dz.$$

4. Egenskaper

Ytintegralen ärver de vanliga räknereglererna från dubbelintegralen:

- **Linjäritet:** $\iint_S (\alpha f + \beta g) \, dS = \alpha \iint_S f \, dS + \beta \iint_S g \, dS$.
- **Additivitet:** om $S = S_1 \cup S_2$ med $S_1 \cap S_2$ av area noll, summerar integralen.
- **Oberoende av parametrisering:** värdet beror bara på S som geometriskt objekt, inte på det val av $\vec{r}(u, v)$ man råkade göra (så länge den täcker S bijektivt utom på en mängd med area noll).
- **Oberoende av orientering:** till skillnad från **flödesintegralen** byter inte $\iint_S f \, dS$ tecken om man vänder normalen. Det är en **skalär** ytintegral.

5. Exempel

☰ [Exempel 1 – yta av halvsfär >](#)

☰ [Exempel 2 – area av paraboloid-cap \(samma som i Parametriserade ytor\) >](#)

6. Metodik – steg för steg

🔗 Räkneschema för $\iint_S f \, dS$

1. Välj parametrisering $\vec{r}(u, v)$ och området D .
2. Beräkna $dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du \, dv$ – eller använd specialformlerna i §3.
3. Uttryck f längs ytan: $f(\vec{r}(u, v))$.
4. Skriv ner dubbelintegralen över D och beräkna iterativt.
5. Sanity-check med $f \equiv 1$ – då ska du få $\text{area}(S)$.

⚠️ Vanliga fallgropar

- Glömmer $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$ – utan den blir resultatet bara dubbelintegralen i parameterplanet.
- Använder $dS = dA$ utan att fundera över krökningen – funkar bara för plana ytor.
- Slarvar med definitionsmängden D , så att ytan täcks dubbelt eller missas.



Läsning

- 16.5 Surfaces and Surface Integrals

Se även

- Parametriserade ytor
- Flödesintegraler
- Dubbelintegraler
- Kurvintegraler
- Variabelbyte i trippelintegraler

Resurser

- [Khan Academy: Surface integrals](#) 
 - [Wikipedia: Surface integral](#) 
-