

Varians och standardavvikelse

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #storhet

Kurs: S0008M Förkunskaper: Väntevärde

Variansen $V(\xi) = E((\xi - \mu)^2)$ mäter hur mycket en stokastisk variabel i genomsnitt avviker kvadratisk från sitt väntevärde. Standardavvikelsen $\sigma = \sqrt{V(\xi)}$ är roten ur variansen och har samma enhet som variabeln själv, vilket gör den lättare att tolka.

1. Definitionen

Låt $\mu = E(\xi)$ vara väntevärdet. **Variansen** är den förväntade kvadratiske avvikelser från μ :

$$V(\xi) = E((\xi - \mu)^2)$$

vilket i det diskreta respektive kontinuerliga fallet blir

$$V(\xi) = \sum_x (x - \mu)^2 p_\xi(x) \quad \text{respektive} \quad V(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_\xi(x) dx$$

Standardavvikelsen är roten ur variansen:

$$\sigma = \sqrt{V(\xi)}$$

Varför roten?

Kvadreringen gör att positiva och negativa avvikelser inte tar ut varandra, men den ger också variansen fel enhet — kvadratmeter om ξ är en längd i meter. Roten ger tillbaka samma enhet som ξ och μ .

2. Räkneregeln

Utvecklar vi kvadraten och använder att väntevärdet är linjärt får vi ett ofta bekvämare uttryck:

$$V(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2$$

där $E(\xi^2) = \sum_x x^2 p_\xi(x)$ eller $\int x^2 f_\xi(x) dx$. Den är särskilt praktisk i det kontinuerliga fallet, eftersom vi slipper integrera $(x - \mu)^2$.

3. Tolkning

σ som typisk avvikelse

Standardavvikelsen kan tolkas som ett mått på hur mycket ξ i genomsnitt avviker från väntevärdet. För symmetriska fördelningar ligger större delen av sannolikhetsmassan inom $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$.

Två fördelningar kan ha samma väntevärde men helt olika spridning. Variansen säger ingenting om var fördelningen ligger, bara hur utsmetad den är.

4. Kända fördelningar

Fördelning	$V(\xi)$
$\text{Bin}(n, p)$	$np(1 - p)$
$\text{Hyp}(N, n, p)$	$np(1 - p) \frac{N - n}{N - 1}$
$\text{Po}(\lambda)$	λ
$\text{ffg}(p)$	$(1 - p)/p^2$
rektangelfördelning på $[a, b]$	$(b - a)^2/12$
$\text{Exp}(\lambda)$	$1/\lambda^2$
$N(\mu, \sigma)$	σ^2

⚠ $N(\mu, \sigma)$ har variansen σ^2

Kursen skriver normalfördelningen med **standardavvikelsen** som andra parameter. Variansen är kvadraten på den.

5. Lösta lektionsuppgifter

≡ Lektion 5, övning 6 – Fördelningar med givet μ och σ

a) Låt ξ ha sannolikhetsfördelningen

x	-1	1
$P(\xi = x)$	$0,5$	$0,5$

Beräkna väntevärde, varians och standardavvikelse.

b) Ge ett exempel på en fördelning med $\mu = 0$ och $\sigma = 10$. Verifiera med definitionerna.

c) Ge ett exempel med $\mu = 0$ och $\sigma = 3,7$.

d) Ge ett exempel med $\mu = 1,5$ och $\sigma = 3,7$.

e) Gör om b) med kravet att minst 3 värden antas med positiv sannolikhet.

f) Ge ett exempel där det mest sannolika värdet är 1 och väntevärdet är större än 100.

Lösning

a)

$$\mu = (-1) \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = \boxed{0}, \quad V(\xi) = (-1 - 0)^2 \cdot 0,5 + (1 - 0)^2 \cdot 0,5 = \boxed{1}, \quad \sigma =$$

Idén till b)–e). I a) ligger massan symmetriskt på avståndet 1 från μ , och σ blev just det avståndet. Placerar vi massan 0,5 på avståndet σ på var sin sida om μ får vi väntevärdet μ och standardavvikelsen σ .

b) $P(\xi = -10) = P(\xi = 10) = 0,5$. Då är $\mu = 0$ och $V(\xi) = 100 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 = 100$, så $\sigma = 10$.

c) $P(\xi = -3,7) = P(\xi = 3,7) = 0,5$.

d) Flytta c) till $\mu = 1,5$: $P(\xi = 1,5 - 3,7) = P(\xi = -2,2) = 0,5$ och $P(\xi = 5,2) = 0,5$. Förflyttningen ändrar väntevärdet men inte spridningen.

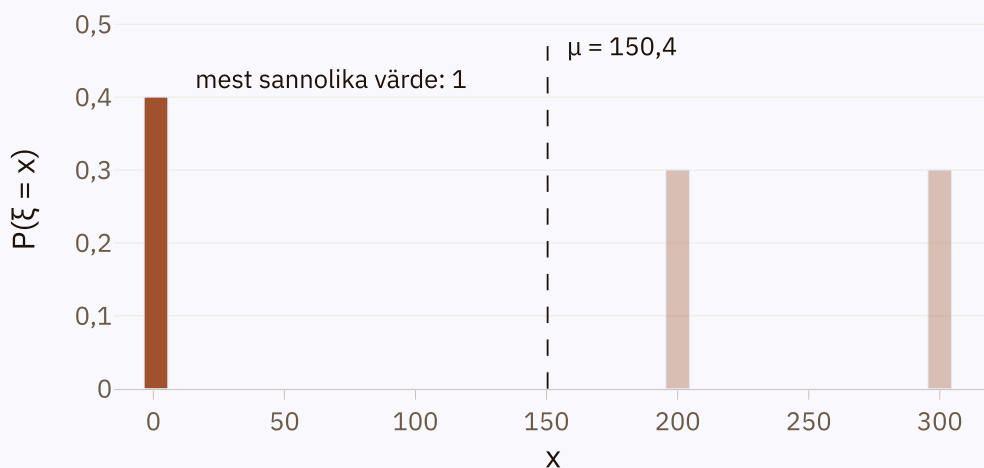
e) Tre värden med sannolikheten $1/3$ var: $-a$, 0 och a . Då är $\mu = 0$ och $V(\xi) = \frac{a^2+0+a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$. Kravet $V(\xi) = 100$ ger $a = \sqrt{150} \approx 12,2$.

x	$-\sqrt{150}$	0	$\sqrt{150}$
$P(\xi = x)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

f) Lägg den största enskilda massan i 1, men låt resten ligga långt ut:

x	1	200	300
$P(\xi = x)$	$0,4$	$0,3$	$0,3$

Det mest sannolika värdet är 1 (högsta stolpen), men $\mu = 1 \cdot 0,4 + 200 \cdot 0,3 + 300 \cdot 0,3 = 150,4 > 100$.



Facit: a) $\mu = 0$, $\sigma = 1$; b)–f) samma exempel som facit anger. Andra svar på b)–f) är också rätt.

Inför lektion 7, punkt D – Hur mycket ligger inom $\mu \pm 2\sigma$?

För symmetriska fördelningar är en bra tolkning av σ att större delen av sannolikhetsmassan ligger inom $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$. Undersök hur det blir när

a) $\xi \in \text{Bin}(6, 0,5)$,

b) $\xi \in N(0, 1)$.

Bestäm först sannolikheten att hamna utanför intervallet och utnyttja symmetrin.

Lösning

a) $\mu = np = 3$ och $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1,5} \approx 1,22$. Intervallet är $[0,55, 5,45]$, så bara $\xi = 0$ och $\xi = 6$ ligger utanför. Med symmetrin:

$$P(\text{utanför}) = P(\xi = 0) + P(\xi = 6) = 2 \cdot 0,5^6 = \frac{2}{64} \approx 0,031$$

Innanför ligger alltså 0,969 av massan.

b) $\mu = 0$ och $\sigma = 1$. Med **normalfördelningens** tabell, $\Phi(2) \approx 0,9772$:

$$P(\xi < -2) = P(\xi > 2) = 1 - \Phi(2) \approx 0,0228$$

Innanför ligger $1 - 2 \cdot 0,0228 \approx \boxed{0,954}$.

Slutsats. I båda fallen ligger ungefär 95 % eller mer av massan inom två standardavvikelse från väntevärdet.

På räknaren. a) `binomCdf(6,0.5,1,5)`, b) `normCdf(-2,2)`.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

≡ Lektion 7, övning 6 (Vännman 4.20 b och 4.25 b) — Väntevärde och varians ur en frekvensfunktion

Den stokastiska variabeln ξ har frekvensfunktionen

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0,02x, & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Bestäm $E(\xi)$, $V(\xi)$ och standardavvikelsen σ .

Lösning

Kontroll av f . $\int_0^{10} 0,02x \, dx = 0,01 \cdot 10^2 = 1$ och $f \geq 0$, så det är en frekvensfunktion.

Väntevärdet — summan från det diskreta fallet blir en **integral**:

$$E(\xi) = \int_0^{10} x \cdot 0,02x \, dx = 0,02 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{10} = \frac{20}{3} \approx \boxed{6,67}$$

Variansen med räkneregeln $V(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2$:

$$E(\xi^2) = \int_0^{10} x^2 \cdot 0,02x \, dx = 0,02 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{10} = 50$$

$$V(\xi) = 50 - \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{50}{9} \approx \boxed{5,56}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{50}{9}} \approx \boxed{2,36}$$

Rimlighetskontroll. Frekvensfunktionen växer åt höger, så massan ligger tyngre mot 10 och väntevärdet ska ligga över mitten 5. Det gör det.

På räknaren. $\int (x \cdot 0.02 \cdot x, x, 0, 10)$ och $\int (x^2 \cdot 0.02 \cdot x, x, 0, 10) - (20/3)^2$.

Uppgiften (Vännman 4.20 b och 4.25 b) är återgiven ur det handskrivna lösningsförslaget ($E = 20/3$, $V = 50/9$, $\sigma \approx 2,36$), och svaren stämmer med det.

Se även

- Väntevärde
- Linjära funktioner av stokastiska variabler
- Normalfördelning
- Median och kvantiler

Resurser

- [Khan Academy: Variance and standard deviation of a discrete random variable](#)
- [Wikipedia: Varians](#)