

Variabelbyte i trippelintegraler

Jun 12, 2026, 4 min read

#matematik

#flervariabelanalys

#integral

Kurs: M0068M **Förkunskaper:** Trippelintegraler, Variabelbyte i dubbelintegraler, Jacobian i 2D

1. Idén – direkt analog till 2D

Variabelbytet i 3D är direkt analogt med 2D-fallet (se [Variabelbyte i dubbelintegraler](#)): det areaelement som vägdes med $|J_T|$ ersätts av ett *volymelement* som vägs med Jacobianens determinant i 3D.

Grundtanken

Ett område med rotations- eller sfärisk symmetri är obehagligt i kartesiska koordinater men *snällt* i polära/sfäriska. Bytet kostar ett $|J_T|$, men sparar enormt mycket gränssättning.

2. Allmän substitutionsformel

För en transformation $T : (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ som är bijektiv och C^1 med $\det J_T \neq 0$ gäller

$$\iiint_V f \, dV = \iiint_{V'} f(T(u, v, w)) |\det J_T| \, du \, dv \, dw$$

där

$$J_T = \det \begin{pmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v & \partial x / \partial w \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v & \partial y / \partial w \\ \partial z / \partial u & \partial z / \partial v & \partial z / \partial w \end{pmatrix}.$$

🔗 Strategi

Välj koordinater efter områdets symmetri: cylindersymmetri kring en axel ger cylindriska koordinater, sfärisk symmetri kring en punkt ger sfäriska.

3. Cylindriska koordinater

Polära koordinater i xy -planet, plus oförändrad z :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

med $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ och $z \in \mathbb{R}$. Jacobianen ärvs från det polära fallet (se [Variabelbyte i dubbelintegraler](#)) eftersom z -raden bidrar med en etta:

$$J_T = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r,$$

så

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz$$

☰ **Exempel 1 – volym under paraboloid $z = x^2 + y^2$ inne i cylindern $x^2 + y^2 \leq 1$** >

4. Sfäriska koordinater

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi,$$

med $\rho \geq 0$, $\phi \in [0, \pi]$ (polvinkel från $+z$ -axeln) och $\theta \in [0, 2\pi)$ (azimutvinkel i xy -planet).

En direkt determinanträkning ger

$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Vinkelkonvention

ϕ mäts från positiva z -axeln (polvinkel), θ är azimutvinkeln i xy -planet. Vissa böcker byter rollerna på ϕ och θ – kontrollera alltid bokens definition innan formeln används.

Geometrisk bild av $\rho^2 \sin \phi$

Ett litet sfäriskt rektangelement har sidor:

- radiell: $d\rho$
- polär (cirkelbåge i meridian): $\rho \, d\phi$
- azimutal (cirkelbåge på en parallell): $\rho \sin \phi \, d\theta$

Volymen blir produkten: $d\rho \cdot \rho \, d\phi \cdot \rho \sin \phi \, d\theta = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$. Faktorn $\sin \phi$ kompenserar för att azimutalcirklarna *krymper* mot polerna.

 **Exempel 2 – volymen av en boll med radie R** >

 **Exempel 3 – integral av z över halvbollen** >

5. Generaliserade sfäriska koordinater (ellipsoid)

För en ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

använder man

$$x = a\rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = b\rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = c\rho \cos \phi,$$

vilket ger Jacobianen $abc\rho^2 \sin \phi$, dvs.

$$dV = abc \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

☰ [Exempel 4 – volymen av en ellipsoid](#) >

6. Sammanfattning

Byte	Formler	dV
Cylindriska	$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$	$r dr d\theta dz$
Sfäriska	$x = \rho \sin \phi \cos \theta, y = \rho \sin \phi \sin \theta, z = \rho \cos \phi$	$\rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$
Generaliserade sfäriska	$x = a\rho \sin \phi \cos \theta$ etc.	$abc \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$

🔄 Strategin på en rad

Cylindersymmetri kring en axel \Rightarrow cylindriska. Sfärisk symmetri kring en punkt \Rightarrow sfäriska. Ellipsoid \Rightarrow skala först, sfäriska sedan.

Läsning

- 15.6 Change of Variables in Triple Integrals
- Sfäriska koordinater

- [Cylinderkoordinater](#)

Se även

- [Trippelintegraler](#)
- [Variabelbyte i dubbelintegraler](#)
- [Polära koordinater](#)
- [Dubbelintegraler](#)

Resurser

- [Khan Academy: Triple integrals in spherical coordinates](#) [↗](#)
 - [Wikipedia: Spherical coordinate system](#) [↗](#)
-