Variabelbyte i dubbelintegraler

Jun 12, 2026, 11 min read

#matematik #flervariabelanalys #integral

> **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Dubbelintegraler, Kryssprodukt

---

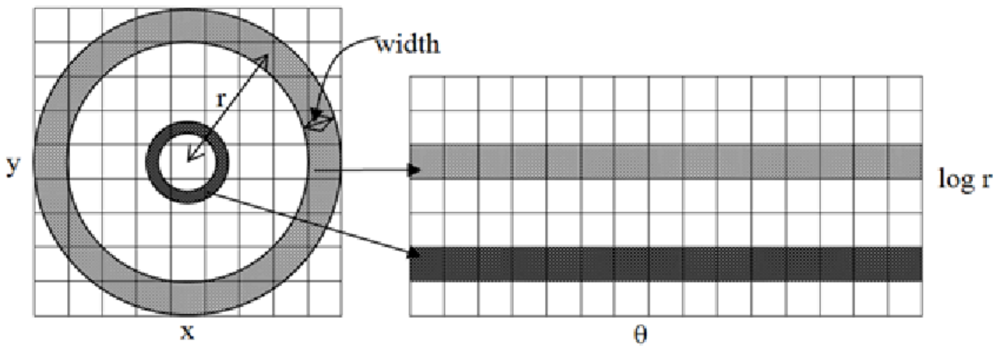
1. Idén bakom variabelbytet

En dubbelintegral

$$\iint_D f(x,y)\,dA$$

kan vara obekväm att beräkna direkt om antingen *integranden* f eller *området* D uttrycker sig dåligt i kartesiska koordinater (x,y). Variabelbytet handlar om att hitta nya koordinater (u,v) där problemet blir geometriskt enklare - ofta så att D blir en *rektangel* i de nya koordinaterna och så att integranden tar en kortare form.

> **Grundtanken**
>
> Vi byter koordinatsystem för att få en bättre geometri. En cirkulär ring i (x,y)-planet blir t.ex. en *rektangel* i (r,θ)-planet — och rektanglar är mycket lättare att integrera över.



Pris för bytet: areaelementet dA förvrids när vi byter koordinater. Ett litet rektangelelement $du\,dv$ i (u,v)-planet motsvarar i regel *inte* ett lika stort $dx\,dy$ i (x,y)-planet. Den lokala skalfaktorn ges av **Jacobianens determinant**, som vi härleder nedan.

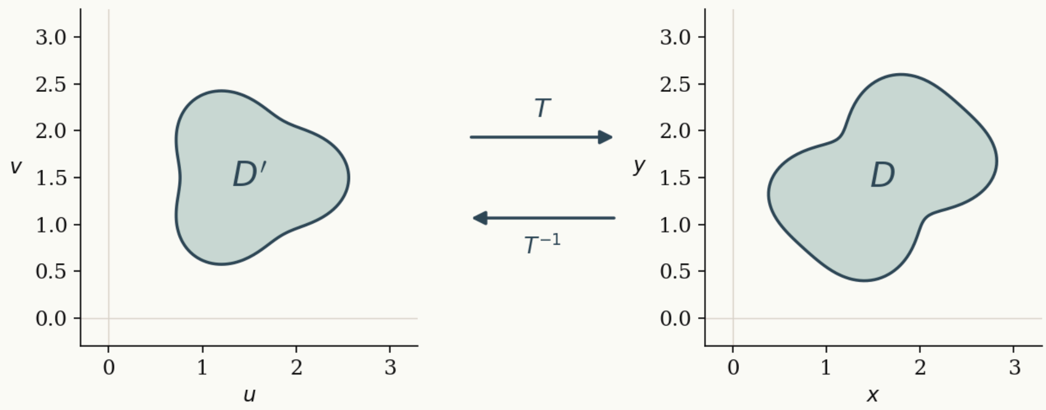
---

2. Transformationen T

Ett variabelbyte beskrivs av en avbildning

$$T : (u,v) \longmapsto (x,y), \qquad x = x(u,v), \quad y = y(u,v),$$

som kartlägger ett område D' i (u,v)-planet bijektivt på D i (x,y)-planet.



Pilarna visar hur T mappar D' framåt på D och hur inversen T^{-1} mappar tillbaka. Tanken är *inte* att T ska vara enkel — den får gärna förvrida saker — utan att D' ska ha en *enkelt parametriserbar form* (oftast en rektangel).

För att substitutionsformeln ska gälla kräver vi att T är

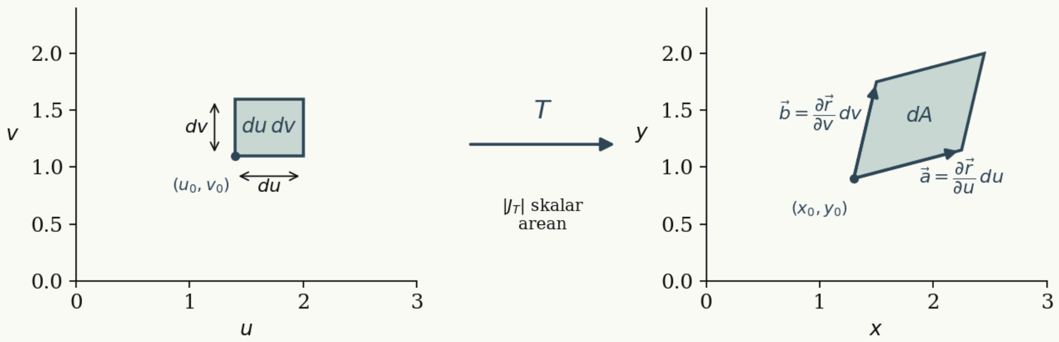
- **bijektiv** (entydigt inverterbar) på det inre av D',
- **kontinuerligt deriverbar** (C^1),
- har **icke-singulär** Jacobian, dvs. $\det J_T \neq 0$.

> ✎ **Note**

Att T får misslyckas med kraven på en mängd med *area noll* är vad som tillåter polära koordinater (där origo är degenererat — alla θ ger samma punkt) och flera andra standardbyten.

3. Härledning av areaelementet

Vi vill veta hur en liten rektangel med sidor du och dv i (u, v)-planet blir när den avbildas till (x, y)-planet.



Bilden ovan är hela idén i en blink: en liten rektangel med sidorna du och dv i (u, v)-planet avbildas approximativt på en *parallelogram* i (x, y)-planet, vars sidor är tangentvektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$. Vår uppgift är att uttrycka parallelogrammets area i termer av $du,\ dv$ och derivatorna av T.

Skriv positionsvektorn i kartesiska koordinater som

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}.$$

Längs riktningen där bara u varierar (med $v = v_0$ fixt) ger en linjär approximation tangentvektorn

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du = \begin{pmatrix} \partial x / \partial u \\ \partial y / \partial u \end{pmatrix} du,$$

och längs riktningen där bara v varierar

$$\vec{b} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\, dv = \begin{pmatrix} \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial v \end{pmatrix} dv.$$

Den lilla parallelogram som $\vec{a}$ och $\vec{b}$ spänner upp har arean given av kryssproduktens belopp:

$$dA = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \det \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{pmatrix} \right| du\, dv.$$

Determinanten i mitten kallas **Jacobianens determinant** för T:

$$\boxed{J_T = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}}$$

Tolkning av $|J_T|$

$|J_T(u_0, v_0)|$ är *den lokala arealförstärkningsfaktorn* — hur mycket en liten yta i (u, v)-planet blåses upp eller krymper när den avbildas till (x, y)-planet vid punkten (u_0, v_0).

- $|J_T| = 1$: bytet är *areabevarande* lokalt.
- $|J_T| > 1$: ytan blåses upp.
- $|J_T| < 1$: ytan krymper.

---

4. Substitutionsformeln

Med ovanstående resultat blir den fullständiga formeln:

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_{D'} f\big(x(u, v),\, y(u, v)\big)\, |J_T|\, du\, dv}$$

Lägg märke till tre saker:

1. **Områdets ändras:** integralen i högerled går över D', inte D.

2. **Integranden uttrycks i nya variabler:** $f(x(u,v), y(u,v))$.
3. **Areaelementet bär en faktor:** $|J_T|\, du\, dv$ ersätter dA.

> ⚠ **Glöm inte absolutbeloppet**
>
> Det är *absolutbeloppet* $|J_T|$ som ska användas — areor är alltid positiva, oavsett hur transformationen orienterar planet. Tecknet på J_T säger något om *orientering*, inte om area.

---

5. Polära koordinater

Det vanligaste variabelbytet i kursen är **polära koordinater**:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

med $r \geq 0$ och $\theta \in [0,\ 2\pi)$. Se Polära koordinater för bakgrund.

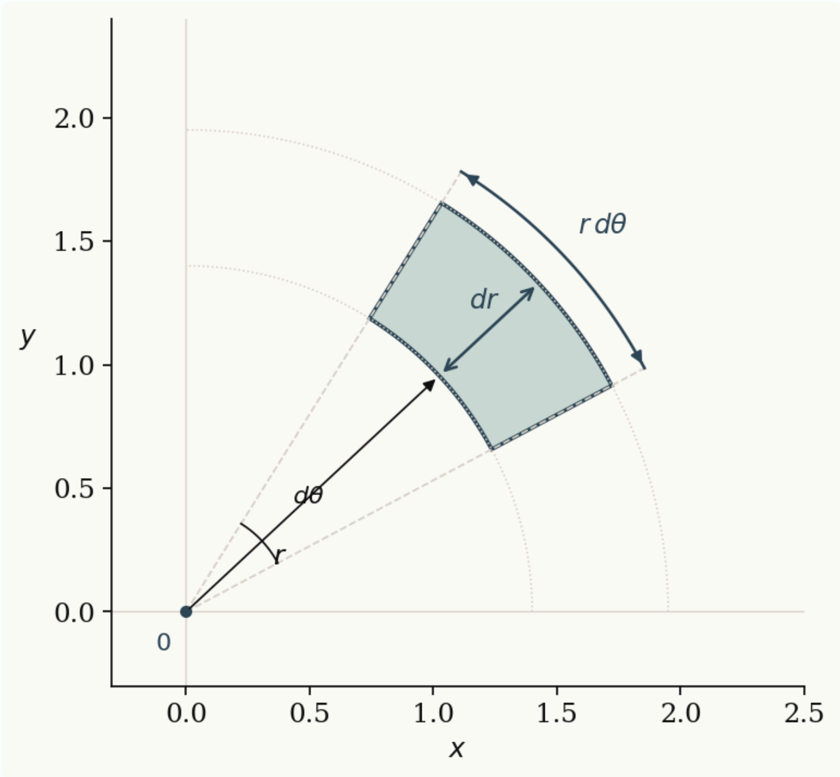
Jacobianens determinant blir

$$J_T = \det\begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

så

$$\boxed{dA = r\, dr\, d\theta}$$

> **Geometrisk bild av faktorn r**
>
> Ett litet "polart rektangelelement" är en *cirkelsektor* med inre radie r, tjocklek dr och vinkelbredd $d\theta$. Sektorns båglängd är $r\, d\theta$, så arean blir
>
> $$\Delta A \approx \underbrace{r\, d\theta}_{\text{båglängd}} \cdot \underbrace{dr}_{\text{tjocklek}} = r\, dr\, d\theta.$$
>
> Faktorn r kompenserar alltså för att sektorerna är *större* längre ut från origo.



Exempel 1 — integral över enhetsskivan

Exempel 2 — kvartsring (och varför Jacobianen r "stämmer")

Exempel 3 — Gaussintegralen

Exempel 4 — area mellan fyra paraboler

---

6. Generaliserade polära koordinater (ellips)

För en ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ använder man

$$x = a\,r\cos\theta, \qquad y = b\,r\sin\theta,$$

vilket ger

$$J_T = \det\begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{pmatrix} = abr,$$

så

$$\boxed{dA = ab\,r\,dr\,d\theta}$$

Området $D' = \{0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$ är då en *enhetsskiva* i (r, θ)-planet — typiskt mycket enklare än ellipsen.

Exempel 5 — arean av en ellips >

---

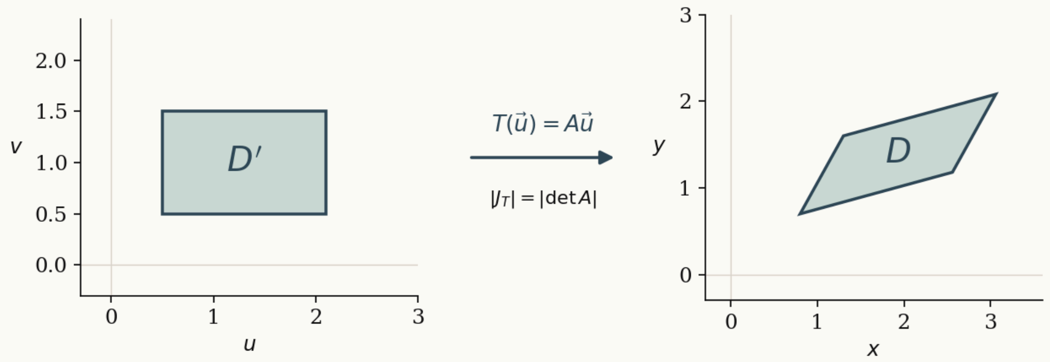
7. Andra användbara byten

Affina (linjära) byten

Om D är begränsad av räta linjer som inte är axelparallella kan ett *linjärt* byte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

förvandla D till en rektangel. Här är $J_T = \det A$, en *konstant* — den lokala skalfaktorn är samma överallt.



Ett affint byte deformerar alltså rektangeln likformigt: alla små rektanglar i D' blir parallellogram av samma form i D. Det är därför Jacobianen blir konstant och inte beror på position.

Sum- och differenssbyte

Bytet $u = x + y,\ v = x - y$ är vanligt när integranden eller området innehåller just de kombinationerna. Inversen är

$$x = \frac{u+v}{2}, \qquad y = \frac{u-v}{2},$$

och

$$J_T = \det\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}, \qquad |J_T| = \frac{1}{2}.$$

Hyperboliska / produktbyten

Vid områden begränsade av kurvor som $xy = c$ kan $u = xy,\ v = y/x$ vara naturligt. Sådana byten kräver oftast lite arbete med Jacobianen — räkna noggrant.

Strategi för val av byte

Variabelbytet ska göra antingen *integranden* eller *området* enklare — gärna båda. Identifiera först områdets symmetri:

- Cirkulär symmetri $\Rightarrow$ polära koordinater.
- Elliptisk symmetri $\Rightarrow$ generaliserade polära.
- Begränsad av räta linjer $\Rightarrow$ affint byte.
- Integranden innehåller $x + y$, xy, y/x, etc. $\Rightarrow$ låt dessa kombinationer vara nya variabler.

---

8. Metodik — steg för steg

Hur man genomför ett variabelbyte

1. **Välj transformationen** $(x, y) = T(u, v)$ utifrån områdets symmetri eller integrandens form.
2. **Översätt området**: hitta D' i (u, v)-planet så att $T(D') = D$. Rita gärna båda områdena bredvid varandra.
3. **Beräkna Jacobianens determinant** J_T och ta absolutbeloppet $|J_T|$.
4. **Skriv om integranden** $f(x, y)$ i de nya variablerna: $f(x(u, v), y(u, v))$.
5. **Skriv ihop integralen** med $|J_T|\, du\, dv$ och beräkna den itererat över D'.
6. **Kontrollera**: jämför enheter, gör en rimlighetskoll med en känd integral (t.ex. $\iint_D 1\, dA = \text{area}(D)$).

⚠ Vanliga fallgropar

- Glömt att uppdatera *gränserna* till D'.
- Glömt $|J_T|$ — utan den blir resultatet fel storleksordning.
- Vid polära koordinater: tillåtit $r < 0$. Om man gör det kan man råka täcka planet två gånger.
- T inte injektiv på D' — kontrollera att inverteringen är entydig (utom på en mängd med area noll).

---

9. Sammanfattning

Den allmänna substitutionsformeln är

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\, dx\, dy \; = \; \iint_{D'} f\big(T(u, v)\big)\, |J_T(u, v)|\, du\, dv}$$

med standardfallen sammanfattade i tabellen:

Byte	**Formel**	dA
Polärt	$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$	$r\, dr\, d\theta$
Generaliserat polärt	$x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$	$ab\, r\, dr\, d\theta$
Affint	$\binom{x}{y} = A\binom{u}{v}$	$

Byte	Formel	dA
Sum/differens	$u = x + y,\ v = x - y$	$\frac{1}{2}\,du\,dv$

Läsning

- 15.4 Double Integrals in Polar Coordinates
- 15.5 Triple Integrals — för analogi i 3D

Se även

- Dubbelintegraler
- Variabelbyte i trippelintegraler
- Variabelbyte i integraler
- Polära koordinater
- Kryssprodukt
- Kedjeregeln

Resurser

- 3Blue1Brown: Determinanten — tolkning av determinant som arealskala (Riktigt bra)
- Khan Academy: Double integrals in polar
- Wikipedia: Integration by substitution (multiple variables)
