

Vågfunktion

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #storhet

Kurs: F0005T Förkunskaper: Schrödingerekvationen

Vågfunktionen $\psi(x)$ beskriver partikelns fördelning i rummet, men är inte själv mätbar. Max Born gav år 1926 tolkningen att $|\psi(x)|^2 dx$ är sannolikheten att hitta partikeln nära x . Eftersom partikeln måste finnas någonstans ger det ett randvillkor utöver de rumsliga: integralen över hela området ska vara ett, vilket är det som bestämmer amplitudkonstanten. ψ måste dessutom vara kontinuerlig och ändlig överallt.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

Formeln, symbol för symbol

$$\begin{array}{ccc} \text{summera överallt} & & \\ \int_{-\infty}^{\infty} & \underbrace{|\psi(x)|^2 dx}_{\text{sannolikheten att hitta den nära } x} = & \underbrace{1}_{\text{partikeln finns någonstans}} \\ & & \\ \underbrace{|\psi|^2}_{\text{sannolikhets-} \\ \text{täthet, } 1/m} & = & \underbrace{\psi^* \psi}_{\text{alltid reell} \\ & & \text{och } \geq 0} \end{array}$$

Vågfunktionen själv mäts aldrig; det är $|\psi|^2$ som säger var partikeln brukar hittas. Upprepar man en lägesmätning många gånger hamnar resultaten tätt där $|\psi|^2$ är stor, och sannolikheterna över hela axeln måste summera till ett.

1. Komplex vågfunktion och sannolikhetstäthet

Lösningarna till Schrödingerekvationen är i allmänhet komplexa, så ψ själv kan inte vara en mätbar storhet. Det som har en fysikalisk tolkning är absolutbeloppet i kvadrat,

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

som alltid är reellt och aldrig negativt. $|\psi(x)|^2$ kallas **sannolikhetsstäthet**. I en dimension har den enheten m^{-1} , och det är först produkten $|\psi|^2 dx$ som är en sannolikhet.

För en fri partikel med bestämd rörelsemängd, $\Psi = Ae^{i(kx - \omega t)}$, blir

$$|\Psi|^2 = A^* e^{-i(kx - \omega t)} A e^{i(kx - \omega t)} = |A|^2$$

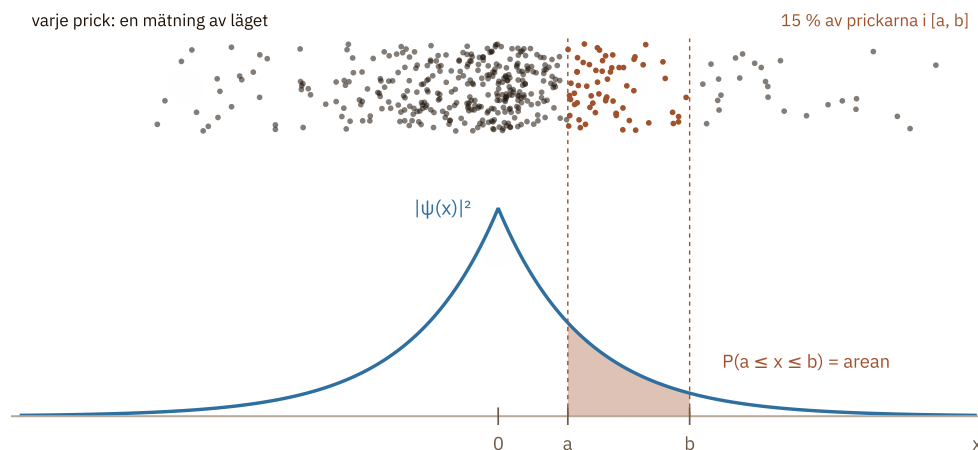
Tätheten är densamma överallt, så partikeln kan finnas var som helst. Det stämmer med **Heisenbergs osäkerhetsprincip**: $\Delta p_x = 0$ kräver $\Delta x = \infty$. En sådan våg kan inte normeras. En lokaliserad partikel beskrivs i stället av ett **vågpaket**, en överlagring av många vågor med olika k . Ju fler k -värden som ingår, desto smalare blir paketet.

2. Sannolikhet i ett intervall

Sannolikheten att hitta partikeln mellan a och b är arean under $|\psi|^2$ över intervallet:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx$$

Normeringsvillkoret i rutan överst är specialfallet där intervallet är hela x -axeln, och sannolikheten då är 1.



Borns tolkning i bild. Överst: många lägesmätningar på identiskt preparerade partiklar, en prick per mätning. Nederst: $|\psi|^2$ för $\psi \propto e^{-|x|}$. Prickarna ligger tätt där $|\psi|^2$ är stor, och andelen prickar mellan a och b närmar sig den skuggade arean.

3. Normering

Ofta är vågfunktionens form känd men inte konstanten framför, till exempel $\psi = C \sin(n\pi x/L)$ i **Partikel i låda**. Konstanten bestäms i tre steg:

1. Skriv $|\psi|^2$ med konstanten okänd.
2. Integrera över hela området där $\psi \neq 0$.
3. Sätt integralen lika med 1 och lös ut konstanten.

För ett stationärt tillstånd är $|\Psi(x, t)|^2 = |\psi(x)|^2$, så en normerad vågfunktion förblir normerad vid alla tider. Konstanten kan väljas reell och positiv. En gemensam fasfaktor $e^{i\alpha}$ ändrar inte $|\psi|^2$ och har ingen fysikalisk betydelse.

4. Krav på en godtagbar vågfunktion

- **Normerbar:** $\int |\psi|^2 dx$ är ändlig, alltså $\psi \rightarrow 0$ när $x \rightarrow \pm\infty$.
- **Kontinuerlig:** annars vore andraderivatan i Schrödingerekvationen oändlig.
- **Kontinuerlig derivata** överallt där potentialen är ändlig.
- **Noll där $U = \infty$:** partikeln kan inte finnas där.

Funktioner som löser ekvationen men bryter mot något krav stryks. Det är så de tillåtna energierna väljs ut.

Vanliga fel

- **$|\psi|^2$ tas för en sannolikhet.** Det är en täthet med enheten m^{-1} , och den kan vara större än 1. Sannolikheten fås först efter integration över ett intervall.
- **ψ^2 i stället för $|\psi|^2$.** För en komplex vågfunktion är $|\psi|^2 = \psi^* \psi$. Kvadraten ψ^2 är i allmänhet komplex och saknar tolkning.
- **Man integrerar ψ i stället för $|\psi|^2$.** Både normering och sannolikhet bygger på kvadraten.
- **Fel integrationsområde.** Är $\psi = 0$ utanför ett område räcker det att integrera över området. Är ψ symmetrisk kan man integrera över halva och multiplicera med två.

5. Lösta exempel

≡ Exempel – Normering av en exponentiell vågfunktion

En partikel beskrivs av $\psi(x) = Ae^{-|x|/a}$, där $a > 0$. Normera vågfunktionen och beräkna sannolikheten att partikeln finns i intervallet $-a \leq x \leq a$.

Lösning

Normering. Funktionen är jämn, så vi integrerar över $x \geq 0$ och multiplicerar med två:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-2|x|/a} dx = 2A^2 \int_0^{\infty} e^{-2x/a} dx = 2A^2 \cdot \frac{a}{2} = A^2 a$$

$$A^2 a = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{a}}}$$

Sannolikheten.

$$P = 2 \int_0^a \frac{1}{a} e^{-2x/a} dx = 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{2} [1 - e^{-2}] = 1 - e^{-2} \approx \boxed{0,865}$$

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

≡ Exempel – Parabel som vågfunktion i en låda

I en låda $0 \leq x \leq L$ approximeras grundtillståndet med $\psi(x) = Ax(L - x)$, och $\psi = 0$ utanför lådan. Normera funktionen och beräkna sannolikheten att partikeln finns i $0 \leq x \leq L/4$. Jämför med den exakta sinusfunktionen, som ger $1/4 - 1/(2\pi) \approx 0,0908$.

Lösning

Normering. Med $u = x/L$ är $x^2(L - x)^2 = L^4 u^2(1 - u)^2$ och $dx = L du$:

$$A^2 L^5 \int_0^1 u^2(1 - u)^2 du = A^2 L^5 \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{2} + \frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \frac{A^2 L^5}{30}$$

$$A = \sqrt{\frac{30}{L^5}}$$

Sannolikheten. Samma primitiva funktion, nu till $u = 1/4$:

$$P = 30 \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{2} + \frac{u^5}{5} \right]_0^{1/4} = 30 \left(\frac{1}{192} - \frac{1}{512} + \frac{1}{5120} \right) = \frac{53}{512} \approx \boxed{0,104}$$

Parabeln ger 0,104 mot sinusfunktionens 0,0908. Den lägger lite för mycket sannolikhet nära väggarna men fångar huvuddragen: partikeln finns oftast i mitten.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 40.1 Wave Functions and the One-Dimensional Schrödinger Equation