

Väteliknande system

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #atomfysik #modell

Kurs: F0005T **Förkunskaper:** Bohrs modell för väteatomen

Bohrs modell fungerar för varje system med en enda elektron – He^+ , Li^{2+} och så vidare – om e^2 byts mot Ze^2 . Den fungerar approximativt också för alkalimetallernas yttersta valenselektron, som ser en effektiv kärnladdning nära ett eftersom de inre elektronerna skärmar kärnan, och bäst av allt för Rydbergatomer i mycket höga n . Här slutar modellen: Bohr blandar partikel- och vågbeskrivning av elektronen, och atomer med fler än en elektron kräver kvantmekanik.

$$E_n = -\frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{mZ^2e^4}{8n^2h^2}$$

Fysika: Fd3 (i formen $E_n = -E_H Z^2/n^2$)

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{E_n}_{\text{nivå } n} = \underbrace{-13,6 \text{ eV}}_{\text{vätets grundnivå}} \cdot \underbrace{\frac{Z^2}{n^2}}_{\text{kärnladdning och kvanttal}}$$
$$\underbrace{r_n}_{\text{banradie}} = \underbrace{a_0}_{\text{Bohr-radien}} \cdot \underbrace{\frac{n^2}{Z}}_{\text{större } Z: \text{ mindre bana}}$$

Kärnladdningen Ze gör attraktionen Z gånger starkare. Banan dras in med en faktor Z och bindningen blir Z^2 gånger starkare, medan resten av Bohrs modell är oförändrad.

1. En elektron kring Z protoner

Ett väteliknande system har en enda elektron kring en kärna med laddningen Ze . Det enda som ändras i **Bohrs modell för väteatomen** är Coulombkraften, som blir Z gånger starkare:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_n^2} = \frac{mv_n^2}{r_n}$$

Kvantiseringsvillkoret $mv_n r_n = nh/2\pi$ är oförändrat. Samma räkning som för väte, med e^2 utbytt mot Ze^2 , ger

$$v_n = \frac{Ze^2}{2\epsilon_0 nh} = Z \frac{v_1}{n}$$

$$r_n = \frac{\epsilon_0 n^2 h^2}{\pi m Z e^2} = \frac{n^2}{Z} a_0$$

Fysika: Fd3 (banradie $r_n = a_0 n^2/Z$)

Energin i rutan överst innehåller $e^4 = (e^2)^2$ och växer därför med Z^2 . I elektronvolt:

$$E_n = -13,6 \text{ eV} \cdot \frac{Z^2}{n^2}$$

Fysika: Te (E_H)

Den större kärnladdningen drar alltså in banan med en faktor Z och gör bindningen Z^2 gånger starkare.

2. Spektrum och jämförelse med väte

Eftersom alla nivåer skalas med Z^2 gör även Rydbergkonstanten det, och [Rydbergs formel](#) blir

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n_L^2} - \frac{1}{n_U^2} \right)$$

n	H ($Z = 1$)	He ⁺ ($Z = 2$)	Li ²⁺ ($Z = 3$)
1	-13,6 eV	-54,4 eV	-122 eV
2	-3,40 eV	-13,6 eV	-30,6 eV
3	-1,51 eV	-6,04 eV	-13,6 eV
4	-0,85 eV	-3,40 eV	-7,65 eV

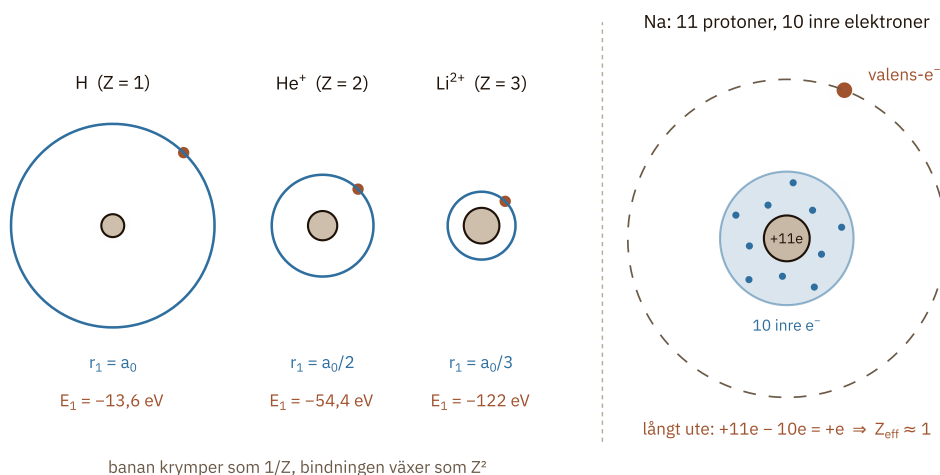
I He⁺ har nivå $2n$ samma energi som vätets nivå n , eftersom $Z^2/(2n)^2 = 1/n^2$. Varje övergång mellan två jämna nivåer i He⁺ ger därför nästan samma linje som en vätelinje, medan övergångar som berör en udda nivå inte har någon motsvarighet i väte. Den lilla skillnaden, runt 0,05 %, kommer av att kärnorna har olika [reducerad massa](#).

3. Alkalimetaller och effektiv kärnladdning

En alkaliatom har en ensam valenselektron utanför en kärna omgiven av fyllda inre skal. Kärnan och de inre elektronerna har tillsammans laddningen $+e$, så långt ute ser valenselektronen nästan en vätekärna. Hur väl det stämmer beskrivs av en **effektiv kärnladdning** Z_{eff} , definierad så att den uppmätta energin följer väteets form:

$$E_n \approx -13,6 \text{ eV} \cdot \frac{Z_{\text{eff}}^2}{n^2}$$

I högt exciterade nivåer, där elektronen håller sig långt utanför de inre skalen, är $Z_{\text{eff}} \approx 1$. I de lägsta nivåerna tränger elektronen delvis in genom skalerna och känner mer av kärnan, så $Z_{\text{eff}} > 1$. Natrium, med valenselektronen i $n = 3$ och joniseringsenergin 5,14 eV, har till exempel $Z_{\text{eff}} = 3\sqrt{5,14/13,6} \approx 1,84$.



Vänster: grundtillståndet i H, He⁺ och Li²⁺ i skala. Banan krymper som 1/Z och bindningen växer som Z². Höger: natriums valenselektron ser kärnans +11e skärmad av tio inre elektroner, alltså nästan en vätekärna.

4. Rydbergatomer

En atom vars yttersta elektron är exciterad till ett mycket högt n kallas **Rydbergatom**. Elektronen är då så långt ute att den nästan bara ser en punktladdning $+e$, och Bohrs modell fungerar mycket bra. För $n = 1000$:

$$r = n^2 a_0 = 10^6 \cdot 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 5,29 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Fysika: Te (a_0)

— en atom ungefär lika stor som ett sandkorn. Nivåerna ligger mycket tätt. För stora n är avståndet mellan två grannivåer

$$E_n - E_{n-1} = 13,6 \text{ eV} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) \approx \frac{2 \cdot 13,6 \text{ eV}}{n^3}$$

vilket för $n = 1000$ blir $2,72 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$. Motsvarande foton har våglängden $hc/\Delta E \approx 45 \text{ m}$, alltså radiovågor.

5. Var modellen tar slut

Trots träffsäkerheten för väte och väteliknande system lämnar Bohrs modell mycket obesvarat:

- **Blandade principer.** Klassiska cirkelbanor kombineras med kvantiseringspostulat som strider mot klassisk elektrodynamik, där en accelererad laddning alltid strålar.
- **Ingenting om själva övergången.** Modellen säger inte vad som händer medan elektronen byter bana, och elektronens omloppsfrekvens är i allmänhet inte frekvensen hos det utsända ljuset.
- **Fler elektroner.** Försök att utvidga modellen till atomer med två eller fler elektroner misslyckades.
- **Magnetiskt moment.** En kretsande elektron är en strömslinga och borde ge ett magnetiskt dipolmoment, men väte i grundtillståndet har inget sådant moment från banrörelsen.

Svaren kräver kvantmekaniken, se [Schrödingerekvationen för väteatomen](#) och [Atomorbitaler](#).

⚠ Vanliga fel

- **Fel potens av Z .** Energin skalar som Z^2 , radien som $1/Z$ och farten som Z .
- **Formeln används för atomer med flera elektroner.** Neutralt helium har två elektroner och är *inte* väteliknande; $-54,4 \text{ eV}$ gäller bara He^+ .
- **Z^2 glöms i Rydbergs formel.** För en jon med $Z = 3$ blir alla våglängder nio gånger kortare än motsvarande vätelinjer.
- **Z_{eff} blandas ihop med Z .** För natriums valenselektron är $Z = 11$ men $Z_{\text{eff}} \approx 1,8$.

6. Lösta exempel

≡ Exempel – Dubbeljoniserat litium

För jonen Li^{2+} ($Z = 3$): bestäm joniseringsenergin från grundtillståndet, radien för banan $n = 1$ och våglängden för fotonen vid övergången $n = 2 \rightarrow n = 1$. I vilket område av spektrumet ligger fotonen?

 Lösning**Joniseringsenergin.**

$$E_{\text{jon}} = 13,6 \text{ eV} \cdot \frac{3^2}{1^2} = \boxed{122 \text{ eV}}$$

Radien.

$$r_1 = \frac{a_0}{Z} = \frac{5,29 \cdot 10^{-11}}{3} = \boxed{1,76 \cdot 10^{-11} \text{ m}}$$

Fotonenergin.

$$E_2 - E_1 = 122,4 \text{ eV} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 91,8 \text{ eV}$$

Våglängden.

$$\lambda = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{91,8 \text{ eV}} = \boxed{13,5 \text{ nm}}$$

Det är extremt ultraviolett ljus, på gränsen mot mjuk röntgen — nio gånger kortare än vätets Lyman- α vid 122 nm.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

 Exempel — Heliumjonen som härmar väte

Vätets linje H_β uppstår vid övergången $4 \rightarrow 2$. Vilken övergång i He^+ ger (nästan) samma våglängd? Beräkna våglängden. Bestäm också våglängden för övergången $3 \rightarrow 2$ i He^+ och förklara varför den saknar motsvarighet i vätets spektrum.

 Lösning

Motsvarande övergång. Nivå $2n$ i He^+ har samma energi som nivå n i väte, så $4 \rightarrow 2$ i väte motsvaras av $\boxed{8 \rightarrow 4}$ i He^+ .

Våglängden.

$$\frac{1}{\lambda} = 2^2 \cdot 1,097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{64} \right) = 1,097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = 2,057 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda = \boxed{486 \text{ nm}}$$

Övergången $3 \rightarrow 2$.

$$E_3 - E_2 = 54,4 \text{ eV} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = 7,56 \text{ eV} \quad \lambda = \frac{1240}{7,56} = \boxed{164 \text{ nm}}$$

Nivån $n = 3$ i He^+ ligger på $-6,04 \text{ eV}$, och väte har ingen nivå där. Därför finns ingen våtelinje vid 164 nm .

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.3 Energy Levels and the Bohr Model of the Atom