

Väntevärde

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #storhet

Kurs: S0008M Förkunskaper: Sannolikhetsfunktion, Frekvensfunktion

Väntevärdet $E(\xi)$ är fördelningens tyngdpunkt — det värde vi i genomsnitt får i det långa loppet om försöket upprepas många gånger. Vi beräknar det som summan, eller integralen, av varje värde vägt med sin sannolikhet.

1. Definitionen

Väntevärdet betecknas $E(\xi)$ eller kort μ .

Diskret stokastisk variabel, med sannolikhetsfunktionen $p_\xi(x)$:

$$E(\xi) = \sum_x x p_\xi(x)$$

Kontinuerlig stokastisk variabel, med frekvensfunktionen $f_\xi(x)$:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$$

Summan i det diskreta fallet blir en integral i det kontinuerliga — samma mönster som för sannolikheterna själva.

2. Två tolkningar

Långsiktigt medelvärde

Väntevärdet ska tolkas som det medelvärde vi får efter ett stort antal oberoende observationer av ξ . Gör vi n observationer hamnar värdet x ungefär $n p_\xi(x)$ gånger, så medelvärdet blir ungefär

$$\frac{1}{n} \sum_x x \cdot n p_{\xi}(x) = \sum_x x p_{\xi}(x) = E(\xi)$$

Masscentrum

Tänk på sannolikhetsfördelningen som en massfördelning på reella axeln, med massan $p_{\xi}(x)$ i punkten x . Då är $E(\xi)$ masscentrum, eller tyngdpunkten: punkten där stolpdiagrammet skulle balansera.

Masstolkningen gör det lätt att uppskatta väntevärdet direkt ur en skiss, och för symmetriska fördelningar ligger det i symmetripunkten.

Väntevärdet behöver inte vara ett möjligt värde

En tärning har $E(\xi) = 3,5$, men ger aldrig 3,5 prickar. Väntevärdet är inte heller samma sak som det mest sannolika värdet.

3. Väntevärdet av en funktion

Ska vi räkna väntevärdet av $g(\xi)$ behöver vi inte först ta fram fördelningen för $g(\xi)$. Det räcker att vikta $g(x)$ med ξ :s sannolikheter:

$$E(g(\xi)) = \sum_x g(x) p_{\xi}(x) \quad \text{respektive} \quad E(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{\xi}(x) dx$$

Med $g(x) = x^2$ ger det $E(\xi^2)$, som behövs för **variansen**. Linjära funktioner, $E(a\xi + b) = aE(\xi) + b$, behandlas i **Linjära funktioner av stokastiska variabler**.

4. Kända fördelningar

Väntevärdena för de vanliga fördelningarna står i formelbladet och behöver inte räknas fram varje gång.

Fördelning	$E(\xi)$
$\text{Bin}(n, p)$	np

Fördelning	$E(\xi)$
Hyp(N, n, p)	np
Po(λ)	λ
ffg(p)	$1/p$
rektangelfördelning på $[a, b]$	$(a + b)/2$
Exp(λ)	$1/\lambda$
$N(\mu, \sigma)$	μ

5. Lösta lektionsuppgifter

≡ Lektion 5, övning 3 – Vad betyder $\lambda = 4$?

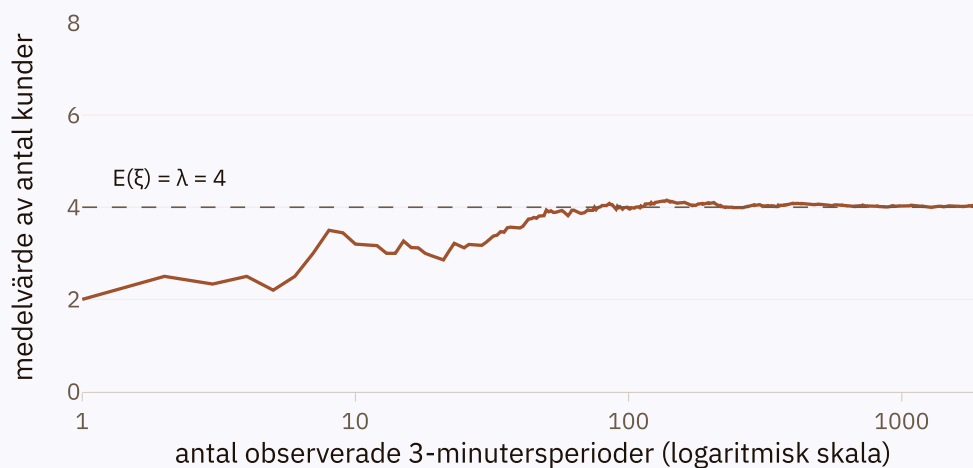
Antalet kunder ξ som anländer till ett systembolag under en 3-minutersperiod är Poissonfördelat med $\lambda = 4$. Parametern anger det *förväntade* antalet kunder per period: $E(\xi) = \lambda = 4$. Hur kan tolkningen “medelvärde efter ett stort antal oberoende observationer av ξ ” motiveras utifrån definitionen av väntevärde? Tolka också väntevärdet som masscentrum.

Lösning

Långsiktigt medelvärde. Observerar vi n oberoende 3-minutersperioder blir värdet x ungefär $n p_\xi(x)$ gånger, eftersom den relativa frekvensen närmar sig sannolikheten. Medelvärde av observationerna blir då ungefär

$$\frac{1}{n} \sum_x x \cdot n p_\xi(x) = \sum_x x p_\xi(x) = E(\xi) = 4$$

Figuren visar det i en simulering: medelvärde svänger kraftigt i början men lägger sig vid 4 när antalet perioder växer.

Löpande medelvärde av 2000 simulerade observationer ur $Po(4)$ 

Masscentrum. Lägg massan $p_{\xi}(x)$ i varje punkt x på tallinjen. Stolpdiagrammet för $Po(4)$ balanserar i $x = 4$ – till vänster ligger få värden nära, till höger fler värden men längre ut (se figuren i övning 1 under lektion 6 nedan).

Resonemangsuppgift – det finns inget facit att jämföra med.

≡ Lektion 6, övning 1 – Kunder till systembolaget, igen

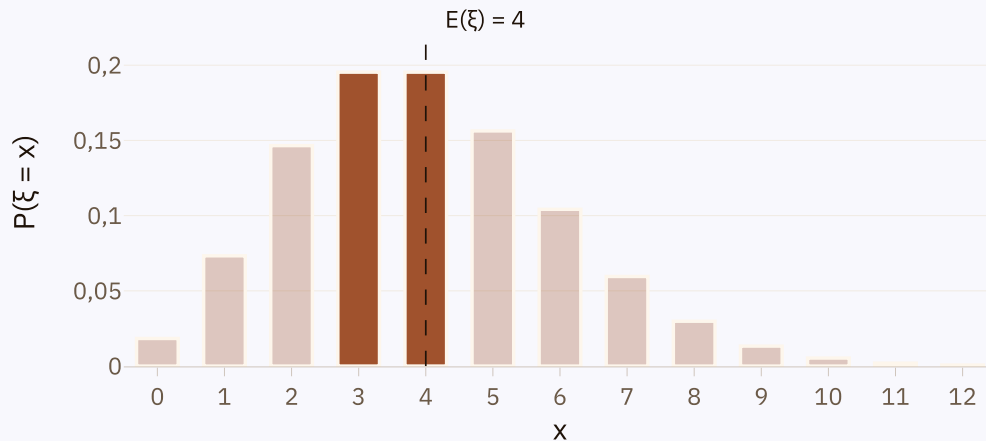
Antalet kunder som anländer till ett systembolag under en 3-minutersperiod är $\xi \in Po(4)$.

- Skissa fördelningens utseende med ett stolpdiagram.
- Ställ upp ett uttryck för det förväntade antalet kunder under en 3-minutersperiod, $E(\xi)$. Hur ska väntevärdet tolkas?
- Använd formelsamlingen för att bestämma väntevärdet och variansen.
- Vad innebär varians och standardavvikelse?
- Bestäm det sannolikaste värdet för ξ och jämför med väntevärdet.

Lösning

a)

Po(4): mest sannolika värden 3 och 4 (markerade)



b) Definitionen med Poissons sannolikhetsfunktion:

$$E(\xi) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{4^x}{x!} e^{-4}$$

Tolkning: räknar vi kunder under väldigt många 3-minutersperioder blir medelantalet per period ungefär $E(\xi)$.

c) För Po(λ) är både väntevärde och varians λ :

$$E(\xi) = \boxed{4}, \quad V(\xi) = \boxed{4}, \quad \sigma = \sqrt{4} = 2$$

d) Variansen är den förväntade kvadratiska avvikelsen från väntevärdet, $V(\xi) = E((\xi - \mu)^2)$. Standardavvikelsen $\sigma = \sqrt{V(\xi)}$ har samma enhet som ξ (här antal kunder) och mäter hur mycket ξ i genomsnitt avviker från μ .

e) Kvoten mellan två grannar är $\frac{p(x)}{p(x-1)} = \frac{4}{x}$. Den är större än 1 för $x < 4$ och lika med 1 för $x = 4$, så $p(3) = p(4) \approx 0,195$ är de största. De mest sannolika värdena är **3 och 4**, och väntevärdet 4 sammanfaller med det ena.

Facit: b) $E(\xi) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot 4^x e^{-4}/x!$, c) $E(\xi) = 4$, $V(\xi) = 4$, $\sigma = 2$, e) de mest sannolika värdena är 3 och 4.

Se även

- Varians och standardavvikelse
- Sannolikhetsfunktion
- Frekvensfunktion
- Mest sannolika värde
- Linjära funktioner av stokastiska variabler

Resurser

- [Khan Academy: Expected value](#)[↗]
 - [Wikipedia: Väntevärde](#)[↗]
-
-