

Två stickprov

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#matematik #statistik #metod

Kurs: S0008M Förkunskaper: Stickprov i par, t-fördelningen

Tvåstickprovsmetoden jämför väntevärdena i två grupper när observationerna inte är parvisa utan oberoende. Osäkerheten blir större än vid parvisa observationer, eftersom variationen mellan individer då inte kan elimineras.

1. Modellen

Två oberoende stickprov, ett från varje grupp:

$x_1, \dots, x_{n_1}$ observationer från $N(\mu_1, \sigma)$, $y_1, \dots, y_{n_2}$ observationer från $N(\mu_2, \sigma)$

alla oberoende. Vi söker ett intervall för skillnaden $\mu_1 - \mu_2$.

Samma σ i båda grupperna

Metoden förutsätter att grupperna har **samma standardavvikelse**, även om den är okänd. Väntevärdena får skilja sig, spridningen inte. Det är detta som gör att vi kan väga ihop de två skattningarna av σ .

2. Punktskattning av skillnaden

$\bar{\xi} - \bar{\eta}$ skattar $\mu_1 - \mu_2$. Eftersom stickproven är oberoende adderas varianserna:

$$\bar{\xi} - \bar{\eta} \in N(\mu_1 - \mu_2, \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}})$$

3. Sammanvägd skattning av σ

Varje stickprov ger sin egen skattning, s_1^2 och s_2^2 . Eftersom de skattar samma σ^2 väger vi ihop dem med frihetsgraderna som vikter:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Det större stickprovet får större vikt. Nämnaren $n_1 + n_2 - 2$ är också antalet frihetsgrader i intervallet nedan.

4. Konfidensintervallet

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = [\bar{x} - \bar{y} \mp t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) \cdot s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}]$$

Är standardavvikelserna **kända** i förväg, σ_1 och σ_2 , behövs varken sammanvägningen eller t -fördelningen:

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = \left[\bar{x} - \bar{y} \mp \lambda_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

På räknaren: [menu](#) → Statistics → Confidence Intervals → 2-Sample t Interval med **Pooled: Yes**.

5. Par eller två stickprov?

	Stickprov i par	Två stickprov
Försöksplan	båda metoderna på samma objekt	olika objekt i de två grupperna
Antal observationer	lika många i båda	n_1 och n_2 får skilja sig
Analyseras	differenserna z_i som ett stickprov	två stickprov med sammanvägd s
Variation mellan objekt	tar ut sig	hamnar i s
Frihetsgrader	$n - 1$	$n_1 + n_2 - 2$

 Det är försöksplanen som avgör

Frågan är inte vilken formel som ger bäst resultat, utan hur datamaterialet samlades in. Finns en naturlig parning — samma person, samma dag, samma bit material — är det stickprov i par. Är grupperna olika individer är det två stickprov.

 Vanliga fel

- **Frihetsgraderna.** Två stickprov ger $n_1 + n_2 - 2$, inte $n - 1$.
- **Medelvärdet av s_1 och s_2 .** Den sammanvägda skattningen viktar *varianserna* med frihetsgraderna; ta roten först efteråt.
- **Pooled: No på räknaren.** Kursens modell har samma σ i båda grupperna, alltså **Pooled: Yes.**

6. Lösta lektionsuppgifter

 Lektion 13, övning 3a och c (Vännman 8.23) — Blodtryck i två grupper

För att undersöka om en medicin påverkar blodtrycket mättes det i två oberoende grupper: 50 personer (x) och 25 personer (y). Resultat: $\bar{x} = 148,2$, $s_x = 10,0$ och $\bar{y} = 151,7$, $s_y = 8,0$.

- a) Beräkna ett 95 % konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ och tolka det.
- c) Ett nytt försök, där 25 patienter mättes före och efter behandlingen, gav intervallet $[1,24; 2,56]$ för den förväntade ökningen (se **Stickprov i par**). Varför ger försöken olika svar på frågan om medicinen höjer blodtrycket, och vilken slutsats kan dras?

 Lösning

Modell. x_i observationer från $N(\mu_1, \sigma)$, $i = 1, \dots, 50$; y_j observationer från $N(\mu_2, \sigma)$, $j = 1, \dots, 25$; alla oberoende.

a) Sammanvägd varians:

$$s^2 = \frac{49 \cdot 10,0^2 + 24 \cdot 8,0^2}{73} = \frac{6436}{73} \approx 88,16, \quad s \approx 9,39$$

Med $t_{0,025}(73) \approx 1,993$:

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = [-3,5 \mp 1,993 \cdot 9,39 \sqrt{\frac{1}{50} + \frac{1}{25}}] = [-3,5 \mp 4,58] \approx \boxed{[-8,08; 1,08]}$$

0 ingår, så försöket ger ingen tydlig indikation på att grupperna skiljer sig i genomsnitt.

c) Blodtrycket varierar mycket mellan personer ($s \approx 9$), och i tvåstickprovsförsöket hamnar den variationen i intervallets bredd. I parförsöket mäts samma person två gånger; variationen mellan personer tar ut sig och det som återstår är den lilla, stabila förändringen ($s_z = 1,6$). Parförsöket är därför mycket känsligare och kan påvisa en höjning som tvåstickprovsförsöket inte ser. Slutsatsen dras från parförsöket: med 95 % säkerhet höjer medicinen blodtrycket, i genomsnitt med mellan 1,24 och 2,56 enheter.

På räknaren. 2-Sample t Interval med **Stats** ($\bar{x}_1 = 148.2$, $s_{x1} = 10$, $n_1 = 50$, $\bar{x}_2 = 151.7$, $s_{x2} = 8$, $n_2 = 25$) och **Pooled: Yes**.

Uppgiften (Vännman 8.23 a, i 2:a uppl. 8.25 a) är återgiven ur det handskrivna lösningsförslaget, som anger $[-8,09; 1,10]$ med $t \approx 1,996$ och gränserna avrundade utåt; med $t_{0,025}(73) = 1,993$ blir det $[-8,08; 1,08]$.

≡ Lektion 13, övning 4 (Vännman 8.28) – Böjhållfasthet vid två temperaturer

Böjhållfastheten hos ett material mäts vid två temperaturer: 5 observationer x_i vid den ena och 6 observationer y_j vid 700° . Ur mätvärdena fås

$$\bar{x} = 137, \quad \sum x_i^2 = 94\,215, \quad \bar{y} = 208, \quad \sum y_j^2 = 260\,236$$

Beräkna och tolka i ord ett 95 % konfidensintervall för skillnaden i förväntad böjhållfasthet.

Lösning

Modell. x_i observationer från $N(\mu_1, \sigma)$, $i = 1, \dots, 5$; y_j observationer från $N(\mu_2, \sigma)$, $j = 1, \dots, 6$; oberoende stickprov.

Varianser med räkneformen:

$$s_x^2 = \frac{94\,215 - 5 \cdot 137^2}{4} = 92,5, \quad s_y^2 = \frac{260\,236 - 6 \cdot 208^2}{5} = 130,4$$

$$s^2 = \frac{4 \cdot 92,5 + 5 \cdot 130,4}{9} = \frac{1022}{9} \approx 113,6, \quad s \approx 10,66$$

Intervall. $t_{0,025}(9) = 2,262$:

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = [137 - 208 \mp 2,262 \cdot 10,66 \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}] = [-71 \mp 14,6] \approx \boxed{[-85,6; -56,4]}$$

Tolkning. 0 ingår inte. Med 95 % säkerhet är den genomsnittliga böjhållfastheten mellan 56,4 och 85,6 enheter högre vid 700°.

På räknaren. 2-Sample t Interval med **Data** (de två listorna) och **Pooled: Yes**.

Uppgiften (Vännman 8.28, i 2:a uppl. 8.30) är återgiven ur det handskrivna lösningsförslaget, och intervallet stämmer med det.

≡ Lektion 14, övning 1 – Mäter två laboratorier likvärdigt?

Ett prov delades i två delar som skickades till två laboratorier. Vart och ett gjorde 7 oberoende mätningar (kodade enheter), som kan beskrivas som oberoende observationer av normalfördelade stokastiska variabler.

Lab 1	10,084	9,984	10,076	9,894	10,105	9,
Lab 2	10,036	10,060	10,207	10,207	10,077	10

Räknehjälp: $\bar{x}_1 = 10,0081$, $s_1 = 0,0917$; $\bar{x}_2 = 10,1380$, $s_2 = 0,0874$; differenser Lab 2 – Lab 1: $\bar{z} = 0,1299$, $s_z = 0,1379$.

a) Ange de fullständiga modellantagandena.

b) Finns en genomsnittlig systematisk skillnad mellan laboratorierna? Hur stor? Beräkna och tolka ett 95 % konfidensintervall.

c) Varför är det två stickprov och inte stickprov i par?

Lösning

a) x_{1i} = mätning i vid lab 1, observation från $N(\mu_1, \sigma)$; x_{2j} = mätning j vid lab 2, observation från $N(\mu_2, \sigma)$; $i, j = 1, \dots, 7$, alla oberoende och med samma σ .

c) Mätningarna vid de två laboratorierna hör inte ihop parvis: mätning nr 1 vid lab 1 har ingenting gemensamt med mätning nr 1 vid lab 2. Alla fjorton mätningar görs på samma prov. Ordningen i tabellen är godtycklig, så differenserna z i räknehjälpen saknar mening.

b) Sammanvägd standardavvikelse:

$$s = \sqrt{\frac{6 \cdot 0,0917^2 + 6 \cdot 0,0874^2}{12}} \approx 0,0896$$

Med $t_{0,025}(12) = 2,179$:

$$I_{\mu_2 - \mu_1} = [0,1299 \mp 2,179 \cdot 0,0896 \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{7}}] = [0,1299 \mp 0,1043] \approx [0,0255; 0,2342]$$

0 ingår inte. Med 95 % säkerhet finns en systematisk skillnad: lab 2 ger i genomsnitt mellan 0,026 och 0,234 enheter högre värden än lab 1.

På räknaren. 2-Sample t Interval med **Pooled: Yes**; räknaren ger $\mu_1 - \mu_2$, alltså samma intervall med ombytta tecken.

Facit: [0,0255; 0,2342] för $\mu_2 - \mu_1$, med samma tolkning.

Se även

- Stickprov i par
- t-fördelningen
- Konfidensintervall
- Punktskattning
- Hypotesprövning

Resurser

- [Wikipedia: Student's t-test — independent two-sample](#)^z