

Tillståndstäthet

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #fasta-tillståndets-fysik #storhet

Kurs: F0005T Förkunskaper: Energiband

Tillståndstätheten dn/dE anger hur många tillstånd dn som ryms i energiintervallet dE . Den beskriver bandens form som funktion av energin och är den ena av de två faktorer som avgör hur många elektroner som faktiskt sitter var; den andra är Fermi-Dirac-fördelningen.

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{g(E)}_{\text{tillstånd per energi}} = \underbrace{\frac{(2m)^{3/2} V}{2\pi^2 \hbar^3}}_{\text{konstant för en given bit}} \underbrace{E^{1/2}}_{\text{växer uppåt i bandet}}$$

Tillstånden är punkter i ett rum av kvanttal, och energin bestämmer radien. Ett tunt skal mellan E och $E + dE$ rymmer fler punkter ju längre ut det ligger, och därför växer tätheten som $\sqrt{E}$.

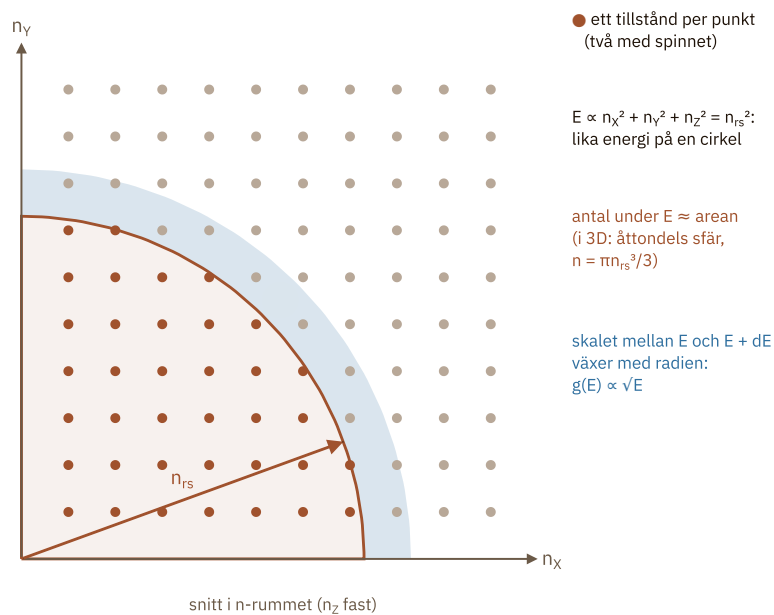
1. Att räkna tillstånden

I frielektronmodellen sitter elektronerna i en kub med sidan L och volymen $V = L^3$. Det är den tredimensionella **partikeln i låda**, med nivåerna

$$E = \frac{(n_X^2 + n_Y^2 + n_Z^2) \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \quad n_X, n_Y, n_Z = 1, 2, 3, \dots$$

Fysika: Fd3 (i formen för en endimensionell låda)

Varje tillstånd är en punkt med heltalskoordinater i ett rum med axlarna n_X, n_Y, n_Z . Alla tillstånd med energi upp till E ligger innanför en sfär med radien $n_{rs} = \sqrt{n_X^2 + n_Y^2 + n_Z^2}$. I stället för att räkna punkterna en och en räknar vi volymen, eftersom varje punkt tar upp en enhetskub.



Tillstånden som gitterpunkter i ett snitt av n -rummet. Alla med energi under E ligger innanför kvartscirkeln med radien n_{rs} , i tre dimensioner en åttondels sfär. Där växer volymen av skalet mellan E och $E + dE$ med radien, som $\sqrt{E}$.

Härledning av antalet tillstånd upp till E

Bara positiva kvanttal räknas, alltså en åttondel av sfären. Två spinnriktningar per punkt ger faktorn 2:

$$n = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi n_{rs}^3 = \frac{\pi n_{rs}^3}{3}$$

Energien på sfärens yta ger radien:

$$E = \frac{n_{rs}^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$n_{rs} = \frac{(2mL^2 E)^{1/2}}{\pi \hbar}$$

Insatt:

$$n = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(2mL^2 E)^{3/2}}{\pi^3 \hbar^3} = \frac{(2m)^{3/2} L^3 E^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}$$

Med $L^3 = V$:

$$n(E) = \frac{(2m)^{3/2} V E^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}$$

Räkningen med volym i stället för punkter kräver att n_{rs} är stort. För en centimeterstor metallbit är det vid E_F i storleksordningen 10^7 , så approximationen är utmärkt.

2. Tillståndstätheten

Tillståndstätheten är derivatan av antalet tillstånd med avseende på energin:

$$g(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{(2m)^{3/2} V}{3\pi^2 \hbar^3} \cdot \frac{3}{2} E^{1/2}$$

$$g(E) = \frac{(2m)^{3/2} V}{2\pi^2 \hbar^3} E^{1/2}$$

Tätheten växer som $\sqrt{E}$: högre upp i bandet finns fler tillstånd per energiintervall. Den är proportionell mot V , så en dubbelt så stor bit har dubbelt så många tillstånd i varje intervall.

3. En kompakt form

Vid $T = 0$ är de N lägsta tillstånden fyllda, upp till **ferminivån**, så $n(E_F) = N$. Eftersom $n \propto E^{3/2}$ kan vi skriva

$$n(E) = N \left(\frac{E}{E_F} \right)^{3/2}$$

$$g(E) = \frac{3N}{2} \cdot \frac{E^{1/2}}{E_F^{3/2}}, \quad g(E_F) = \frac{3N}{2E_F}$$

Den formen slipper m , $\hbar$ och V , och den säger direkt hur många tillstånd som finns nära E_F , där allt intressant händer.

4. Antalet elektroner i ett energiintervall

$g(E) dE$ är antalet **tillstånd** i intervallet. Hur många av dem som faktiskt är besatta ges av sannolikheten $f(E)$ från **Fermi-Dirac-fördelningen**:

$$dN = g(E)f(E)dE$$

Vid $T = 0$ är $f = 1$ under E_F och 0 över, och $g \cdot f$ blir en $\sqrt{E}$ -kurva som klipps av vid E_F . Vid högre temperatur rundas kanten av inom några kT . Figuren finns i noten om Fermi-Dirac-fördelningen.

$\sqrt{E}$ -formen gäller fria elektroner. I ett verkligt band är $g(E)$ mer komplicerad, och i ett bandgap är den noll: där finns inga tillstånd att besätta.

⚠ Vanliga fel

- **Åttondelen eller spinnfaktorn glöms.** Bara positiva n_x, n_y, n_z räknas ($\frac{1}{8}$ av sfären), och varje punkt rymmer två elektroner. Tillsammans ger de faktorn $\frac{1}{4}$ framför sfärens volym.
- **$g(E)$ tas för ett antal.** g har enheten tillstånd per energi. Antalet i ett intervall är $g(E) \Delta E$, och bara om intervallet är litet.
- **Tillstånd och elektroner blandas.** $g(E)$ räknar platser. Elektronerna i intervallet är $g(E)f(E)dE$.
- **Fel enhet på energin.** I $g(E) = (2m)^{3/2} V \sqrt{E} / (2\pi^2 \hbar^3)$ ska E vara i joule, och svaret blir tillstånd per joule. Delas det med $6,24 \cdot 10^{18}$ fås tillstånd per eV.

5. Lösta exempel

☰ Exempel – Tillstånden nära Ferminivån i natrium

Natrium har elektronkoncentrationen $2,54 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ och ferminivån 3,15 eV. Bestäm tillståndstätheten vid E_F för en bit på $1,00 \text{ cm}^3$, i tillstånd per eV. Ungefär hur stor andel av elektronerna ligger inom kT under E_F vid 300 K?

✎ Lösning

Antalet elektroner.

$$N = nV = 2,54 \cdot 10^{28} \cdot 1,00 \cdot 10^{-6} = 2,54 \cdot 10^{22}$$

Tillståndstätheten. Med den kompakta formen:

$$g(E_F) = \frac{3N}{2E_F} = \frac{3 \cdot 2,54 \cdot 10^{22}}{2 \cdot 3,15 \text{ eV}} = \boxed{1,21 \cdot 10^{22} \text{ eV}^{-1}}$$

Kontroll med den fullständiga formeln. Med $E_F = 5,05 \cdot 10^{-19}$ J:

$$g(E_F) = \frac{(2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31})^{3/2} \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{5,05 \cdot 10^{-19}}}{2\pi^2(1,0546 \cdot 10^{-34})^3} = 7,55 \cdot 10^{40} \text{ J}^{-1}$$

Fysika: Te och $7,55 \cdot 10^{40} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} = 1,21 \cdot 10^{22} \text{ eV}^{-1}$, samma svar.

Elektronerna inom kT . $kT = 0,0259 \text{ eV}$ är litet jämfört med E_F , så g är nästan konstant i intervallet:

$$\Delta N \approx g(E_F) kT = 1,21 \cdot 10^{22} \cdot 0,0259 = 3,13 \cdot 10^{20}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{3,13 \cdot 10^{20}}{2,54 \cdot 10^{22}} = \boxed{1,23 \%}$$

Bara drygt en procent av elektronerna ligger så nära E_F att värmerörelsen kan flytta dem. Det är de som bestämmer metallens elektroniska värmekapacitet.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.5 Free-Electron Model of Metals