# Taylorutveckling

Jun 12, 2026, 2 min read

#matematik #optimering #envariabelanalys #taylorutveckling #approximation #flervariabelanalys

> **Kurs:** M0065M **Förkunskaper:** Derivata, Gränsvärden

---

## 1. Idé

Taylorpolynom används för att approximera en funktion nära en punkt $a$ med ett polynom som har samma värde och samma derivator där.

> **Definition**
>
> Taylorpolynomet av grad $n$ kring $a$ är
>
> $$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}$$

Specialfallet $a = 0$ kallas **Maclaurinpolynom**.

---

## 2. Varför formeln ser ut så

Koefficienterna väljs så att

$$T_n(a) = f(a), \quad T_n'(a) = f'(a), \quad \dots, \quad T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Faktorn $k!$ behövs för att $k$ derivator av termen $(x-a)^k$ ska ge tillbaka rätt koefficient.

---

## 3. Standardexempel

$e^x$ **kring** $0$ >

$\sin x$ **kring** $0$ >

$\ln x$ **kring** $1$ >

---

## 4. Restterm och fel

Taylorpolynomet är en approximation, så man skriver

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

där $R_n(x)$ är resttermen.

I Lagranges form gäller

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

för något tal $\xi$ mellan $a$ och $x$.

Det gör att man kan uppskatta felet.

---

## 5. Användningar

Taylorpolynom används för att:

- approximera svåra funktioner med polynom
- beräkna gränsvärden
- beskriva lokalt beteende nära en punkt
- bygga intuition för varför vissa standardgränsvärden gäller

Gränsvärde med Taylor >

## 6. Standardutvecklingar att känna igen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad (|x| < 1)$$

## Läsning

- 4.10 Taylor Polynomials
- 13.9 Taylor's Formula

## Se även

- Derivata
- Gränsvärden
- Extremvärden

## Resurser

- Khan Academy: Taylor and Maclaurin polynomials
- Wikipedia: Taylor series

## Föreläsningsanteckningar

> Från föreläsning: 2026-04-10, M0068M Föreläsare: Thomas Strömberg

# 2026-04-10 – Föreläsning 9 (Taylorpolynom av 2:a ordning för $f(x,y)$)

## Repetition: Taylorpolynom i en variabel

$P_1(x) = g(a) + g'(a)(x-a)$ $P_2(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2}(x-a)^2$

## Taylorpolynom av 2:a ordning för $f(x,y)$

$P(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) + \frac{1}{2}\big(f_{11}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{12}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{22}(a,b)(y-b)^2\big)$

Villkor som uppfylls:

- $P(a,b) = f(a,b)$
- $P_1(a,b) = f_1(a,b), P_2(a,b) = f_2(a,b)$
- $P_{11} = f_{11}, P_{12} = f_{12}, P_{22} = f_{22}$

## Taylorutveckling

$f(x,y) \approx P(x,y) + \text{restterm}$ då $(x,y)$ nära $(a,b)$

**Kvadratisk form** $Q$ (alternativt skrivsätt): $Q(h,k) = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{11}(a,b) & f_{12}(a,b) \\ f_{21}(a,b) & f_{22}(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$

---