

Summor av normalfördelade stokastiska variabler

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #sats

Kurs: S0008M Förkunskaper: Linjära funktioner av stokastiska variabler, Normalfördelning

En linjärkombination av oberoende normalfördelade stokastiska variabler är själv normalfördelad. Fördelningsformen bevaras alltså, och det räcker att beräkna summans väntevärde och varians för att känna hela dess fördelning.

1. Satsen

Låt $\xi_1, \dots, \xi_n$ vara **oberoende** med $\xi_i \in N(\mu_i, \sigma_i)$, och låt $a_1, \dots, a_n$ och b vara konstanter. Då är

$$a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n + b \in N\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i + b, \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2}\right)$$

Väntevärdet och variansen är inget nytt — de följer av räknereglererna för **linjära funktioner**, som gäller för alla fördelningar. Det nya är att summan är **exakt normalfördelad**.

⚠ Varianserna adderas, inte standardavvikelserna

För $\xi_1 + \xi_2$ är standardavvikelsen $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, inte $\sigma_1 + \sigma_2$. Och för en **differens** $\xi_1 - \xi_2$ adderas varianserna också, eftersom $a_2^2 = (-1)^2 = 1$:

$$\xi_1 - \xi_2 \in N(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

2. Vad som krävs

Antagande som faller

Vad som händer

ξ_i inte

normalfördelade

Väntevärde och varians gäller fortfarande, men fördelningen är okänd.

Är antalet termer stort ger **Centrala gränsvärdessatsen** ändå en approximativ normalfördelning.

ξ_i inte oberoende

Väntevärdet gäller fortfarande, men variansen får en extra term med **kovariansen**.

3. Att räkna sannolikheter

När summans fördelning $N(\mu, \sigma)$ är bestämd räknar vi som vanligt genom att **standardisera**:

$$P(\xi \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Söker vi i stället en gräns x med en given sannolikhet går vi baklänges med en kvantil: $P(\xi \leq x) = 1 - \alpha$ ger $x = \mu + \lambda_\alpha \sigma$.

Rita figur

Skissa normalkurvan och skugga den sannolikhet som efterfrågas. Det avgör direkt om det ska vara $\Phi(z)$ eller $1 - \Phi(z)$, och om kvantilen ska läggas på ena eller båda sidorna.

Vanliga fel

- **2ξ i stället för $\xi_1 + \xi_2$.** Två *oberoende* exemplar ger $V(\xi_1 + \xi_2) = 2\sigma^2$, men samma variabel två gånger ger $V(2\xi) = 4\sigma^2$. Läs uppgiften: är det samma mätning eller två?
- **Varians som andra parameter.** I kursen betyder $N(\mu, \sigma)$ standardavvikelsen, och `normCdf` på räknaren tar också σ — ta roten ur variansen innan du sätter in den.
- **Oberoende bortglömt.** Variansformeln kräver oberoende; annars tillkommer kovarianstermer, se **Kovarians**.

4. Lösta lektionsuppgifter

≡ Lektion 9, övning 1–3 – Försök i två etapper

Ett vetenskapligt försök består av två etapper, där den andra inte kan påbörjas förrän den första är avslutad. Låt ξ_1 och ξ_2 vara tiden i minuter för respektive etapp. Antag att ξ_1 och ξ_2 är oberoende och normalfördelade med $E(\xi_1) = 120$, $V(\xi_1) = 36$, $E(\xi_2) = 250$ och $V(\xi_2) = 121$.

Övning 1. Beräkna sannolikheten att den totala tiden $\xi_1 + \xi_2$ överstiger 350 minuter.

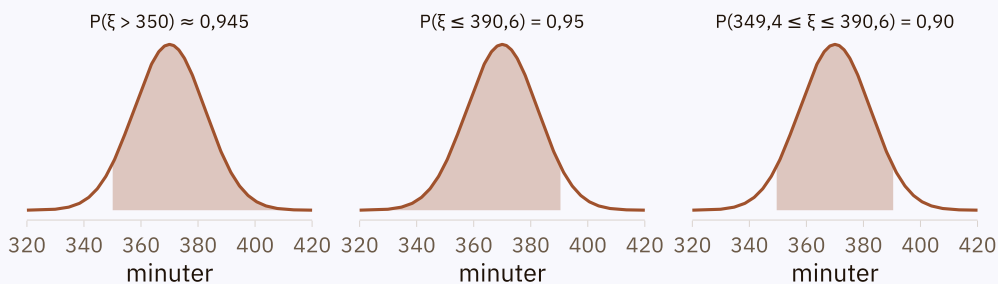
Övning 2. Bestäm en tid inom vilken försöket är avslutat med 95 % sannolikhet.

Övning 3. Bestäm gränser, symmetriskt kring väntevärdet, mellan vilka den totala tiden ligger med 90 % sannolikhet.

Lösning

Summans fördelning. Oberoende och normalfördelade, så

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \in N(120 + 250, \sqrt{36 + 121}) = N(370, \sqrt{157}) \approx N(370; 12,53)$$



Övning 1.

$$P(\xi > 350) = 1 - \Phi\left(\frac{350 - 370}{12,53}\right) = 1 - \Phi(-1,60) = \Phi(1,60) \approx \boxed{0,945}$$

Övning 2. Vi söker t med $P(\xi \leq t) = 0,95$, alltså $t = 370 + \lambda_{0,05} \cdot 12,53$ med $\lambda_{0,05} = 1,6449$:

$$t = 370 + 1,6449 \cdot 12,53 \approx \boxed{390,6 \text{ minuter}}$$

Övning 3. 90 % i mitten lämnar 5 % i varje svans, så samma kvantil $\lambda_{0,05}$ på båda sidor:

$$370 \pm 1,6449 \cdot 12,53 \implies \boxed{[349,4; 390,6]}$$

Rimlighetskontroll. Den övre gränsen i övning 3 är samma som i övning 2: båda lämnar 5 % ovanför. Och 350 minuter ligger strax över den undre gränsen 349,4, så sannolikheten i övning 1 ska vara strax under 0,95. Den är 0,945.

På räknaren. 1) `normCdf(350, ∞, 370, √(157))`, 2) `invNorm(0.95, 370, √(157))`, 3) `invNorm(0.05, 370, √(157))` och samma med 0.95.

Facit: 1) 0,945, 2) 390,6, 3) [349,4; 390,6].

≡ Lektion 9, övning 4 (Vännman 6.11) – Skruv och mutter

Diametern hos en skruv är $\xi_1 \in N(4,10; 0,16)$ mm och diametern hos hålet i en mutter är $\xi_2 \in N(4,35; 0,12)$ mm, oberoende av varandra. Muttern passar skruven om hålet är större än skruven men högst 0,6 mm större. Vad är sannolikheten att en slumpvis vald mutter passar en slumpvis vald skruv?

Lösning

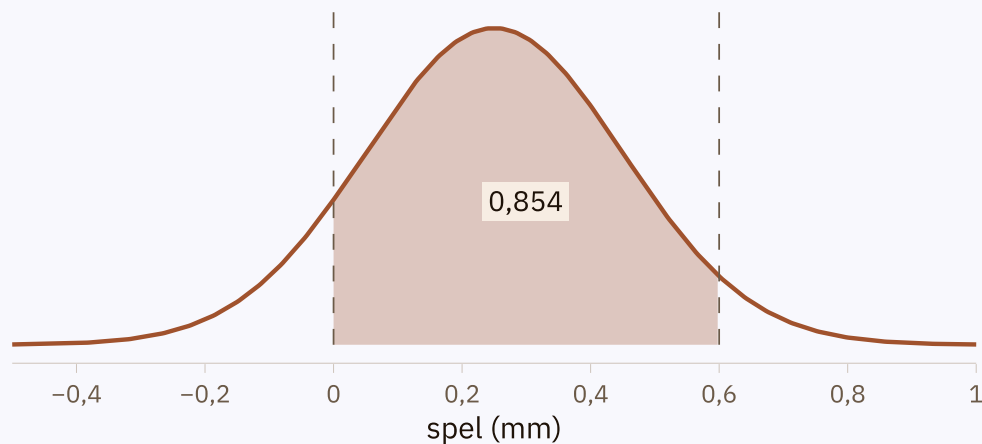
Villkoret som olikhet. Med $\xi = \xi_2 - \xi_1$ passar muttern om $0 < \xi < 0,6$.

Differensens fördelning. Varianserna adderas:

$$\xi \in N(4,35 - 4,10, \sqrt{0,16^2 + 0,12^2}) = N(0,25; 0,2)$$

Sannolikheten är arean mellan 0 och 0,6:

Spelet $\xi = \xi_2 - \xi_1 \in N(0,25, 0,2)$: muttern passar om $0 < \xi < 0,6$



$$\begin{aligned}
 P(0 < \xi < 0,6) &= \Phi\left(\frac{0,6 - 0,25}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 0,25}{0,2}\right) = \Phi(1,75) - \Phi(-1,25) \\
 &= \Phi(1,75) - (1 - \Phi(1,25)) \approx 0,9599 - 1 + 0,8944 \approx \boxed{0,854}
 \end{aligned}$$

På räknaren. `normCdf(0,0.6,0.25,0.2)`.

Uppgiften (Vännman 6.11) är återgiven ur det handskrivna lösningsförslaget, och svaret stämmer med det.

≡ Lektion 10, övning 1 – Majas och Joels utgifter

Majas och Joels utgifter för kursmaterial (kr) under en månad är oberoende stokastiska variabler. Majas utgifter är normalfördelade med väntevärde 420 kr och standardavvikelse 30 kr, Joels med väntevärde 340 kr och standardavvikelse 25 kr.

- Vad är sannolikheten att deras sammanlagda utgifter en månad överstiger 800 kr?
- Vad är sannolikheten att Joels utgifter överstiger Majas en slumpmässigt vald månad?

Vilket resultat används, och vilka förutsättningar krävs?

 Lösning

Låt $\xi \in N(420, 30)$ vara Majas och $\eta \in N(340, 25)$ Joels utgifter. Satsen ovan kräver att de är **oberoende** och **normalfördelade** — båda är givna.

a)

$$\xi + \eta \in N(760, \sqrt{30^2 + 25^2}) = N(760; 39,05)$$

$$P(\xi + \eta > 800) = 1 - \Phi\left(\frac{800 - 760}{39,05}\right) = 1 - \Phi(1,02) \approx \boxed{0,154}$$

b) "Joel överstiger Maja" är $\eta - \xi > 0$. Differensen:

$$\eta - \xi \in N(340 - 420, \sqrt{25^2 + 30^2}) = N(-80; 39,05)$$

$$P(\eta - \xi > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - (-80)}{39,05}\right) = 1 - \Phi(2,05) \approx \boxed{0,020}$$

Facit: a) 0,1539, b) 0,0202. Facit avrundar z till två decimaler före tabellslagning; utan avrundning blir a) 0,1528.

Se även

- Linjära funktioner av stokastiska variabler
- Normalfördelning
- Standardiserad normalfördelning
- Medelvärkets fördelning
- Centrala gränsvärdessatsen

Resurser

- [Wikipedia: Sum of normally distributed random variables](#) 