Stokes sats

Jun 12, 2026, 4 min read

#matematik #flervariabelanalys #vektoranalys

> **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Divergens och rotation, Kurvintegraler av vektorfält, Ytintegraler, Orientering (kurvor och ytor)

---

1. Idén — randens cirkulation lika med inre rotation

Stokes sats är den tredimensionella generaliseringen av Greens sats. Den säger att den totala "snurren" $\nabla \times \vec{F}$ summerad över en yta är detsamma som *cirkulationen* av $\vec{F}$ längs ytans rand.

> **Grundtanken**
>
> Rotation är ett *lokalt* mått på hur fältet snurrar runt en punkt. När man summerar rotationen över en yta tar grannrotationer ut varandra i det inre, och det enda som blir kvar är hur fältet rör sig längs randen. Det är *exakt* vad satsen säger.

Det är samma princip som i Gauss sats — lokala bidrag tar ut varandra i det inre och bara randen överlever.

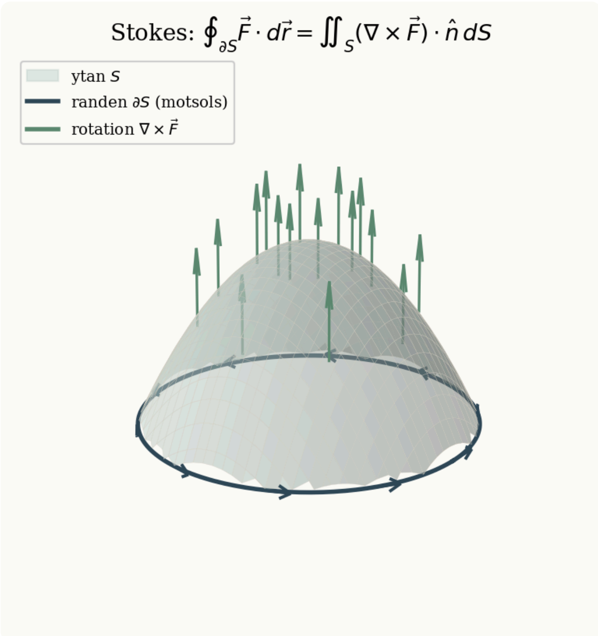
Lokalt	Globalt
rotation $\nabla \times \vec{F}$	flöde $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$
fältet längs randen $\vec{F} \cdot \vec{T}$	cirkulation $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

2. Satsen

Stokes sats

Låt S vara en orienterad styckvis slät yta i $\mathbb{R}^3$ med styckvis slät rand ∂S, orienterad konsekvent enligt högerhandsregeln (se Orientering (kurvor och ytor)). Låt $\vec{F}$ vara ett C^1-vektorfält på en omgivning av S. Då

$$\boxed{\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \; = \iint_D curl(\vec{F}) \cdot \hat{N} dA}$$



I bilden ser man en paraboloid-cap med rotationens flödesvektor pekande uppåt genom ytan, och randcirkeln traverserad motsols sett uppifrån — exakt högerhandsorienteringen.

3. Specialfall — Greens sats

Om S ligger plant i xy-planet med uppåtorientering, så är $d\vec{S} = \hat{k}\, dA$ och $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k} = \partial_x F_2 - \partial_y F_1$. Stokes sats blir då

$$\oint_{\partial S} (F_1\, dx + F_2\, dy) = \iint_S (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\, dA,$$

vilket är exakt Greens sats. Stokes är alltså Greens uttalad i ett varv högre dimension.

4. Konsekvens — ytan spelar ingen roll

En vacker konsekvens: om S_1 och S_2 är två ytor med *samma* rand C och samma orientering, så ger Stokes sats *samma* värde:

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

Detta är användbart i praktiken — man kan välja den ytan som ger lättast räkning (t.ex. en plan disk istället för en bula).

Konservativa fält

Om $\vec{F}$ är konservativt är $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, så cirkulationen längs *varje* sluten kurva är noll. Det är förklaringen till varför kurvintegralen då bara beror på ändpunkterna.

5. Exempel

Exempel 1 — ren kontroll ›

Exempel 2 — bytt yta, samma resultat ›

6. När är Stokes sats användbar?

Tre situationer där satsen sparar arbete

1. **Krångligt vektorfält längs randen, enkel rotation.** Är $\nabla \times \vec{F}$ enkel (eller noll) blir högersidan trivial även när vänstersidan ser besvärlig ut.
2. **Krånglig rand, enkel rotation över en enkel yta.** Om ∂S består av många delar kan man slippa kurvintegralen helt via $\iint_S$.
3. **Bytt yta.** Behöver du beräkna en ytintegral $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$? Byt S mot en *enklare* yta med samma rand — kanske en plan disk. Samma rand $\Rightarrow$ samma värde.

7. Räknemetod

Räkneschema

1. **Identifiera S och ∂S** — och kolla att randen är *en* sluten kurva (eller flera, då med rätt tecken).
2. **Bestäm orienteringen** av S (välj normal) och därmed av ∂S (högerhandsregel).
3. **Räkna rotationen $\nabla \times \vec{F}$** — eller observera att den är noll.
4. **Välj sida av satsen** beroende på vad som är enklast — ytintegralen eller kurvintegralen.
5. **Räkna.**

Krav på fältet

Stokes sats kräver C^1 på en omgivning av *hela* S — inte bara randen. Om $\vec{F}$ är singulärt i någon punkt på S måste den punkten plockas bort eller satsen tillämpas på ett mindre område.

Läsning

- 17.5 Stokes's Theorem

Se även

- Greens sats
- Gauss sats
- Divergens och rotation
- Flödesintegraler
- Kurvintegraler av vektorfält
- Orientering (kurvor och ytor)

Resurser

- 3Blue1Brown: Divergence and curl

- Khan Academy: Stokes’ theorem
- Wikipedia: Stokes’ theorem