

Stefan-Boltzmanns lag

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #samband

Kurs: F0005T Förkunskaper: Svartkroppsstrålning

Den totala intensiteten från en svartkropp — effekten per kvadratmeter yta, summerad över alla våglängder — växer med fjärde potensen av temperaturen, med $\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$. Lagen fås genom att integrera Plancks strålningslag över alla våglängder.

$$I = \sigma T^4$$

Fysika: Fd4 (Stefan-Boltzmanns lag)

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{I}_{\substack{\text{utstrålad effekt} \\ \text{per m}^2}} = \underbrace{\sigma}_{\substack{\text{Stefan-Boltzmanns} \\ \text{konstant}}} \underbrace{T^4}_{\substack{\text{absolut temp.} \\ \text{upphöjd till 4}}}$$
$$\underbrace{P}_{\text{effekt}} = \underbrace{e}_{\substack{\text{emissivitet} \\ 0 \leq e \leq 1}} \underbrace{\sigma}_{\text{strålände}} \underbrace{A}_{\text{yta}} T^4$$

Fjärde potensen gör temperaturen helt dominerande: en dubbelt så varm kropp strålar sexton gånger mer. Arean och emissiviteten skalar bara resultatet rakt proportionellt.

1. Från intensitet till effekt

I är effekt per kvadratmeter. En svartkropp med ytan A strålar därför ut effekten σAT^4 . En verklig yta strålar mindre, och det beskrivs med emissiviteten e , där $0 \leq e \leq 1$ och $e = 1$ gäller för en svartkropp:

$$P = e\sigma AT^4$$

En kropp tar också emot strålning från omgivningen. Den nettoeffekt som strålar ut beror därför på båda temperaturerna, se [Värmetransport](#):

$$P_{\text{netto}} = e\sigma A(T^4 - T_{\text{omg}}^4)$$

2. Härledning ur Plancks lag

Den totala intensiteten är arean under **Plancks kurva**. Integralen ger T^4 -beroendet och uttrycker samtidigt σ i naturkonstanter.

Härledning av Stefan-Boltzmanns lag

Integralen.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)} d\lambda$$

Fysika: Fd4 (Plancks strålningslag, med $c_1 = 2\pi hc^2$ och $c_2 = hc/k$)

Variabelbyte. Sätt $x = hc/(\lambda k_B T)$. Då gäller

$$\lambda = \frac{hc}{x k_B T} \quad d\lambda = -\frac{hc}{x^2 k_B T} dx \quad \frac{1}{\lambda^5} = \left(\frac{x k_B T}{hc}\right)^5$$

och gränserna $\lambda : 0 \rightarrow \infty$ blir $x : \infty \rightarrow 0$. Minustecknet vänder tillbaka gränserna.

Sätt in.

$$I = 2\pi hc^2 \int_0^{\infty} \left(\frac{x k_B T}{hc}\right)^5 \frac{1}{e^x - 1} \cdot \frac{hc}{x^2 k_B T} dx$$

$$I = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

Standardintegralen. $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \approx 6,494$, så

$$I = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} T^4$$

Jämför vi med $I = \sigma T^4$ ser vi att Stefan-Boltzmanns konstant är en kombination av naturkonstanter:

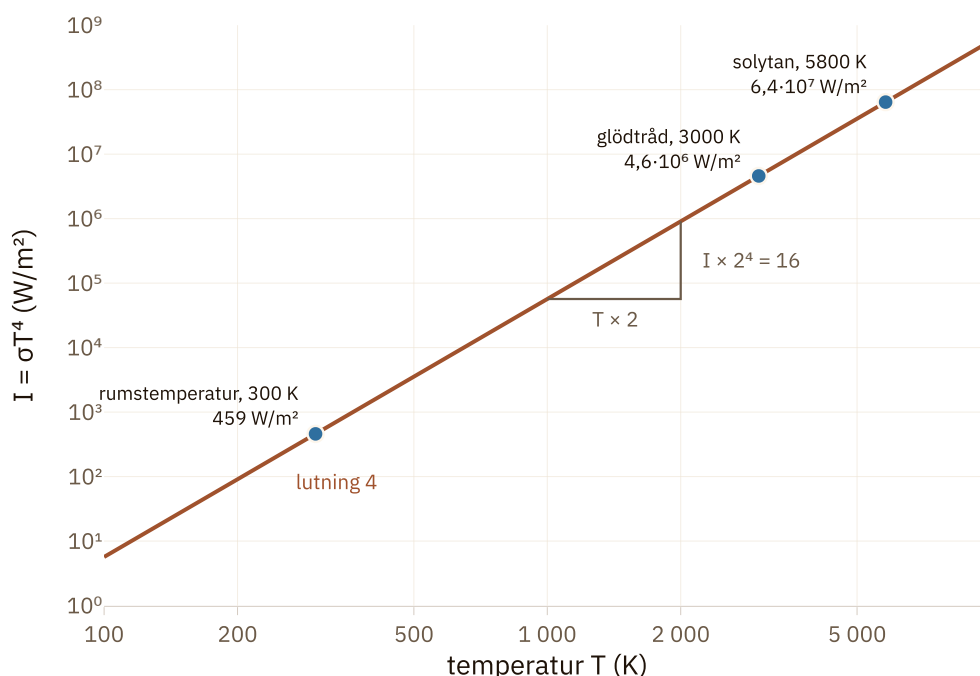
$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4)$$

Fysika: $Te(\sigma, \text{ i formen } \pi^2 k^4 / (60 \hbar^3 c^2))$

3. Fjärde potensen

Eftersom intensiteten växer som T^4 får små temperaturändringar stor effekt:

- Dubblas T blir $I \cdot 2^4 = 16$ gånger större.
- Ökar T med 10 % ökar I med $1,1^4 - 1 \approx 46 \%$.
- För små ändringar gäller $\frac{\Delta I}{I} \approx 4 \frac{\Delta T}{T}$.



$I = \sigma T^4$ i log-log-skala blir en rät linje med lutningen 4: en fördubbling av T ger 16 gånger större intensitet, och från rumstemperatur till solytan växer intensiteten med över fem tiopotenser.

⚠ Vanliga fel

- **Temperaturen anges i Celsius.** T^4 förstärker felet enormt. Räkna alltid i kelvin.
- **Fel area.** En kula strålar från hela ytan $4\pi r^2$, inte från tvärsnittet πr^2 .
- **Omgivningen glöms bort.** Frågas det efter den effekt som måste tillföras för att hålla temperaturen är det nettoeffekten som gäller.
- T_{omg} dras av före upphöjningen. $T^4 - T_{\text{omg}}^4$ är inte samma sak som $(T - T_{\text{omg}})^4$.

4. Lösta exempel

≡ Exempel – Svart kula i ett rum

En svart kula med radien 3,00 cm hålls vid temperaturen 800 K i ett rum där väggarna har temperaturen 20 °C. Beräkna den effekt kulan strålar ut, den effekt den tar emot från väggarna och den effekt som måste tillföras för att hålla temperaturen konstant.

Lösning

Areal.

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 0,0300^2 = 1,131 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

Utstrålad effekt. Med $e = 1$:

$$P_{\text{ut}} = \sigma AT^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 1,131 \cdot 10^{-2} \cdot 800^4 \approx \boxed{263 \text{ W}}$$

Mottagen effekt. En svartkropp absorberar allt, och väggarna har $T_{\text{omg}} = 293 \text{ K}$:

$$P_{\text{in}} = \sigma AT_{\text{omg}}^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 1,131 \cdot 10^{-2} \cdot 293^4 \approx \boxed{4,73 \text{ W}}$$

Nettoeffekt.

$$P_{\text{netto}} = 263 - 4,73 \approx \boxed{258 \text{ W}}$$

Omgivningen betyder bara ett par procent, eftersom $(293/800)^4 \approx 0,018$.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

≡ Exempel – Två stjärnor med samma effekt

Två stjärnor strålar som svartkroppar och sänder ut samma totala effekt. Stjärna A har sin spektrala topp vid 400 nm och stjärna B vid 800 nm. Hur många gånger större är B:s radie än A:s?

 Lösning

Temperaturerna. Wiens förskjutningslag ger

$$T_A = \frac{2,90 \cdot 10^{-3}}{400 \cdot 10^{-9}} = 7250 \text{ K} \quad T_B = \frac{2,90 \cdot 10^{-3}}{800 \cdot 10^{-9}} = 3625 \text{ K}$$

Fysika: Fd4 (Wiens förskjutningslag)

Lika effekt. Med $P = \sigma \cdot 4\pi R^2 \cdot T^4$ för båda:

$$R_A^2 T_A^4 = R_B^2 T_B^4$$

$$\frac{R_B}{R_A} = \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = 2^2 = \boxed{4}$$

Den kallare, röda stjärnan måste vara fyra gånger större för att stråla lika mycket.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.5 Continuous Spectra