

Standardiserad normalfördelning

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #fördelning

Kurs: S0008M Förkunskaper: Normalfördelning

Den standardiserade normalfördelningen är $N(0, 1)$, normalfördelningen med väntevärde 0 och standardavvikelse 1. Varje normalfördelning kan föras över till den genom att vi drar bort väntevärdet och delar med standardavvikelsen, och därför räcker en enda tabell: $\Phi(x)$ för sannolikheter och λ_α för kvantiler.

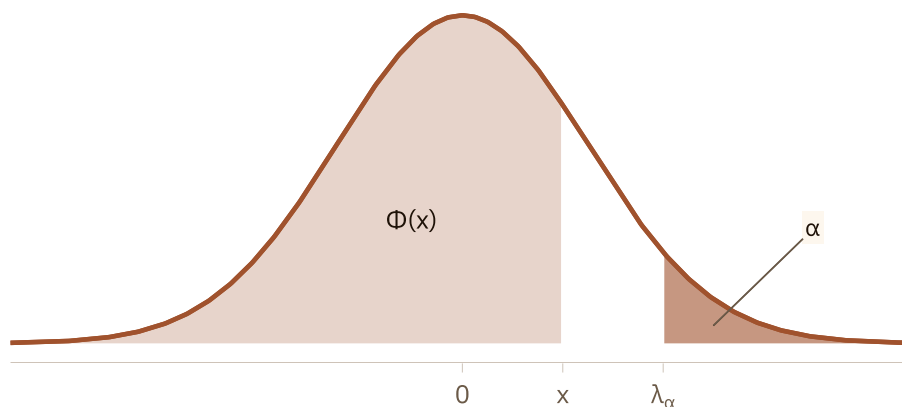
1. $N(0, 1)$ och Φ

Är $\xi \in N(0, 1)$ blir frekvensfunktionen

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

och fördelningsfunktionen betecknas med ett eget tecken:

$$\Phi(x) = P(\xi \leq x)$$



$\Phi(x)$ är den ljusa arean till vänster om x . Kursbokens normalfördelningstabell ger $\Phi(x)$ för $x \geq 0$.

2. Symmetrin

Kurvan är symmetrisk kring 0: arean till vänster om $-x$ är lika stor som arean till höger om x . Alltså

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Därför behöver tabellen bara positiva x . Två följder som används hela tiden:

$$P(\xi > x) = 1 - \Phi(x), \quad P(-x < \xi < x) = 2\Phi(x) - 1$$

Rita alltid figuren

Skissa klockan, markera gränserna och skugga den sökta arean innan du slår i tabellen. Då syns direkt om svaret ska vara större eller mindre än 0,5, och om symmetrin behövs.

3. Standardisering

Sats 6.1. Om $\xi \in N(\mu, \sigma)$ så är

$$\frac{\xi - \mu}{\sigma} \in N(0, 1)$$

Satsen är en omformulering av Sats 4.2 i **normalfördelningen**: $P(\xi \leq x) = P((\xi - \mu)/\sigma \leq (x - \mu)/\sigma) = \Phi((x - \mu)/\sigma)$. Att bilda $(\xi - \mu)/\sigma$ kallas att **standardisera** eller normera ξ . Det fungerar eftersom en **linjär funktion** av en normalfördelad variabel är normalfördelad, och räknereglererna för väntevärde och varians ger väntevärde 0 och standardavvikelse 1.

4. Kvantiler: λ_α

Ofta frågar vi baklänges: vilket x har en given sannolikhet ovanför sig? För $\xi \in N(0, 1)$ definieras λ_α av

$$P(\xi > \lambda_\alpha) = \alpha, \quad \text{alltså} \quad \Phi(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$$

λ_α är den mörka svansen i figuren ovan. Kursboken har en egen tabell för de vanligaste α , och på miniräknaren ger `invNorm(1- $\alpha$ )` samma sak. I annan litteratur skrivs λ_α ofta z_α .

α	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
λ_α	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,0902

På grund av symmetrin är $P(\xi < -\lambda_\alpha) = \alpha$, och $P(-\lambda_{\alpha/2} < \xi < \lambda_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$. Det sista är grunden för **konfidensintervall**.

⚠ Vanliga fel

- **Dela med variansen.** Standardiseringen är $(\xi - \mu)/\sigma$ med standardavvikelsen, inte σ^2 .
- **Negativa argument.** Tabellen saknar negativa värden; använd $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
- **Blanda ihop Φ och λ_α .** $\Phi(x)$ är sannolikheten *till vänster*; λ_α har sannolikheten α *till höger*, så $\lambda_{0,025} = 1,96$.
- **normCdf med varians.** Räknaren vill ha σ som sista argument, inte σ^2 .

5. Lösta lektionsuppgifter

☰ Lektion 7, övning 4 – Mätfel

Mätfelet ξ är normalfördelat $N(0, 1)$. Skissa frekvensfunktionen och markera de sökta sannolikheterna. Beräkna

- $P(\xi > 1,75)$,
- $P(\xi < -1,75)$,
- $P(-0,78 < \xi < 2,13)$.

Bestäm talet a så att

- $P(\xi > a) = 0,025$,
- $P(\xi < a) = 0,001$.

✎ Lösning

a)

$$P(\xi > 1,75) = 1 - \Phi(1,75) \approx 1 - 0,9599 = \boxed{0,040}$$

b) Symmetrin: vänstersvansen under $-1,75$ är lika stor som högersvansen över $1,75$:

$$P(\xi < -1,75) = \Phi(-1,75) = 1 - \Phi(1,75) \approx \boxed{0,040}$$

c)

$$P(-0,78 < \xi < 2,13) = \Phi(2,13) - \Phi(-0,78) = \Phi(2,13) - (1 - \Phi(0,78)) \approx 0,9834 - 1 +$$

d) Per definition är $a = \lambda_{0,025}$:

$$a = \lambda_{0,025} \approx \boxed{1,96}$$

e) Svansen till vänster har sannolikheten $0,001$, så a är negativt. Symmetrin ger $P(\xi < -\lambda_{0,001}) = 0,001$:

$$a = -\lambda_{0,001} \approx \boxed{-3,09}$$

På räknaren. a) `normCdf(1.75,∞)`, c) `normCdf(-0.78,2.13)`, d) `invNorm(0.975)`,
e) `invNorm(0.001)`.

Facit: a) 0,040, b) 0,040, c) 0,766, d) 1,96, e) -3,09.

Se även

- [Normalfördelning](#)
- [Fördelningsfunktion](#)
- [Linjära funktioner av stokastiska variabler](#)
- [Konfidensintervall](#)
- [Hypotesprövning](#)

Resurser

- [Khan Academy: Normal distributions](#)
- [Wikipedia: Standard normal table](#)