

# Skalärproduktsrum

Apr 28, 2026, 27 min read

#linjär-algebra

#inreprodukt

#vektorrum

## 1. Repetition: skalärprodukten i $\mathbb{R}^n$

I  $\mathbb{R}^n$  har vi redan den bekanta **punktprodukten** (dot product):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

där  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$  och  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ .

Denna produkt ger oss verktyg som **vinkel**, **längd** och **avstånd** — begrepp som är centrala i geometri och optimering. Frågan som denna föreläsning besvarar är: **kan vi definiera liknande begrepp på andra vektorrum**, som polynomrum eller funktionsrum?

## 2. Allmän skalärprodukt — definition

 **Definition:** Skalärprodukt (**inre produkt**)

Låt  $V$  vara ett reellt vektorrum. En **skalärprodukt** (inner product) på  $V$  är en funktion  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  som uppfyller följande fyra axiom för alla  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$  och alla skalärer  $c \in \mathbb{R}$ :

Nr	Axiom	Namn
1	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$	Symmetri
2	$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$	Additivitet
3	$\langle c\vec{u}, \vec{v} \rangle = c\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$	Homogenitet

Nr	Axiom	Namn
4	$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ , med likhet om och bara om $\vec{u} = \vec{0}$	Positivdefinitethet

Ett vektorrum utrustat med en skalärprodukt kallas ett **inre produktrum**.

### Axiom 2 + 3 tillsammans kallas linjäritet i första argumentet

Tack vare symmetrin (axiom 1) är skalärprodukten även linjär i det andra argumentet. Man säger att den är **bilinjär**.

## 3. Norm och avstånd

Från en skalärprodukt kan vi definiera längd och avstånd:

### Definition: Norm och avstånd

Låt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  vara en skalärprodukt på  $V$ .

**Normen** (längden) av  $\vec{u}$ :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$$

**Avståndet** mellan  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$ :

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

**Koppling till geometri:** Vinkelräthet (**ortogonalitet**) och kortaste avstånd definieras med hjälp av normen. Begreppet "vinkelrät" i ett allmänt inre produktrum betyder att  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ .

## 4. Grundläggande räkneregler

☰ [Exempel 1: Skalärprodukten av nollvektorn med valfri vektor](#) >

☰ [Exempel 2: Avståndet är symmetriskt](#) >

☰ [Exempel 3: Utveckla  \$\langle 2\vec{u} - 3\vec{v}, \vec{u} + 2\vec{v} \rangle\$](#)  >

## 5. Skalärprodukter på $\mathbb{R}^n$

### 5.1 Standardskalärprodukten

☰ [Exempel 4: Standardskalärprodukten i  \$\mathbb{R}^n\$](#)  >

### 5.2 Viktade skalärprodukter

☰ [Exempel 5: Viktad skalärprodukt i  \$\mathbb{R}^2\$](#)  >

#### 🔗 Generell viktad skalärprodukt

På  $\mathbb{R}^n$  med vikter  $w_1, w_2, \dots, w_n > 0$ :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \dots + w_n u_n v_n$$

Kravet är att alla vikter är strikt positiva ( $w_i > 0$ ). Om någon vikt vore 0 eller negativ bryts axiom 4 (positivdefinithet).

### 5.3 Icke-exempel: när villkoren inte uppfylls

☰ [Exempel 6: En funktion som \*inte\* är en skalärprodukt – nollvikt](#) >

☰ [Exempel 7: En funktion som \*inte\* är en skalärprodukt – saknar symmetri](#) >

## 5.4 Matrisbaserad skalärprodukt

☰ [Exempel 8: Skalärprodukt via en inverterbar matris](#) >

# 6. Skalärprodukter på polynomrum

## 6.1 Evalueringsskalärprodukt

Den viktigaste typen av skalärprodukt på polynomrum bygger på att **evaluera polynomen i fasta punkter** och bilda en viktad summa.

### 🔗 Evalueringsskalärprodukt på $\mathbb{P}_n$

Välj  $n + 1$  **distinkta** punkter  $x_0, x_1, \dots, x_n$  och positiva vikter  $w_0, w_1, \dots, w_n > 0$ . Definiera:

$$\langle p, q \rangle = w_0 p(x_0) q(x_0) + w_1 p(x_1) q(x_1) + \dots + w_n p(x_n) q(x_n)$$

**Krav:** Man behöver minst  $n + 1$  distinkta punkter för  $\mathbb{P}_n$ . I  $\mathbb{P}_2$  behövs alltså minst 3 punkter; i  $\mathbb{P}_7$  behövs minst 8.

**Varför just  $n + 1$  punkter?** Ett polynom av grad  $\leq n$  som är noll i  $n + 1$  punkter måste vara nollpolynomet (det har fler nollställen än grad). Detta säkerställer axiom 4: om  $p \neq 0$  måste  $p(x_i) \neq 0$  för minst ett  $i$ , och med positiva vikter ger detta  $\langle p, p \rangle > 0$ .

☰ [Exempel 9: Evalueringsskalärprodukt på  \$\mathbb{P}\_2\$  \(tre punkter\)](#) >

## 6.2 Icke-exempel: för få punkter

☰ [Exempel 10: Bara två punkter i  \$\mathbb{P}\_2\$  – inte en skalärprodukt](#) >

## 6.3 Fler exempel på $\mathbb{P}_2$

☰ [Exempel 11: Två evalueringspunkter i  \$\mathbb{P}\_2\$  – giltigt eller ej?](#) >

☰ [Exempel 12: Icke-symmetrisk evalueringsprodukt](#) >

☰ [Exempel 13: Tre punkter med positiva vikter – giltig skalärprodukt](#) >

---

## 7. Skalärprodukter via integration

Integration ger en naturlig skalärprodukt på funktionsrum. Till skillnad från evalueringsskalärprodukter (som samplar i ändligt många punkter) tar integralen hänsyn till funktionens beteende *överallt*.

### 7.1 På polynomrum

☰ [Exempel 14: Integralskalärprodukt på polynomrum](#) >

### 7.2 På funktionsrum

☰ [Exempel 15: Integralskalärprodukt på  \$C\[a, b\]\$](#)  >

---

## 8. Sammanfattning: checklista för skalärprodukter

Kontroll	Fråga att ställa
Symmetri	Är $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ ?
Additivitet	Kan vi “bryta ut” en summa?
Homogenitet	Kan vi “dra ut” en skalär?
Positivdefinithet	Är $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$ för alla $\vec{u} \neq \vec{0}$ ?

### Vanligaste fallgropen

Axiom 4 är nästan alltid det axiom som bryter. Kontrollera alltid:

- **Viktad skalärprodukt:** Alla vikter strikt positiva?
- **Evalueringsskalärprodukt:** Tillräckligt många distinkta punkter?
- **Matrisbaserad:** Är matrisen inverterbar?

## 9. Skalärprodukt på matrisrum — spåret

Förutom  $\mathbb{R}^n$ , polynomrum och funktionsrum kan man definiera skalärprodukter på **matrisrum**. Den viktigaste konstruktionen använder **spåret** (trace).

### 9.1 Definition via spåret

#### Definition: Frobenius-skalärprodukt

Definiera på  $M_{m \times n}$  (alla  $m \times n$ -matriser):

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$$

där  $\text{tr}$  betecknar spåret — summan av diagonalelementen.

**Varför fungerar detta?** Om vi “vecklar ut” matriserna till vektorer i  $\mathbb{R}^{mn}$  (genom att stapla kolumnerna) motsvarar  $\text{tr}(A^T B)$  precis standardskalärprodukten av de utvecklade vektorerna. Det beror på att  $(A^T B)_{ii} = \sum_k a_{ki} b_{ki}$ , och summan av diagonalelementen ger  $\text{tr}(A^T B) = \sum_{i,k} a_{ki} b_{ki}$  – precis den elementvisa produktens summa.

☰ [Exempel 16: Skalärprodukt på  \$M\_{2 \times 2}\$  via spåret](#) >

## 10. Beräkningsexempel: norm och avstånd

Nu tillämpar vi skalärprodukten för att beräkna **norm** (längd) och **avstånd** i olika rum.

☰ [Exempel 17: Norm och avstånd i  \$\mathbb{P}\_2\$  med evalueringsskalärprodukt](#) >

## 11. Bästa approximation — tillämpning av skalärprodukten

En av de viktigaste tillämpningarna av skalärprodukter är att hitta den **bästa approximationen** av en funktion med ett polynom. Idén är att minimera avståndet (i skalärproduktens mening) mellan funktionen och polynomet.

☰ [Exempel 18: Approximera  \$e^x\$  med ett andragradspolynom](#) >

## 12. Centrala olikheter och satser

I ett allmänt inre produktrum gäller samma fundamentala olikheter som i  $\mathbb{R}^n$ . Dessa olikheter följer **enbart** från de fyra axiomen — de gäller i alla inre produktrum oavsett om vi jobbar med vektorer, polynom, matriser eller funktioner.

### 12.1 Cauchy-Schwarz olikhet

### Sats: Cauchy–Schwarz olikhet

Låt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  vara en skalärprodukt på  $V$ . Då gäller för alla  $\vec{u}, \vec{v} \in V$ :

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

med likhet om och bara om  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  är linjärt beroende (dvs. den ena är en skalär multipel av den andra, eller en av dem är nollvektorn).

**Bevisidé:** Om  $\vec{v} = \vec{0}$  gäller olikheten trivialt (båda sidor är noll). Antag  $\vec{v} \neq \vec{0}$  och betrakta vektorn  $\vec{w} = \vec{u} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}$  (ortogonala projektionens residual). Axiom 4 ger  $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \geq 0$ . Att utveckla denna olikhet med hjälp av bilinjäriteten ger exakt Cauchy–Schwarz olikhet.

**Specialfall i  $\mathbb{R}^n$ :** Med standardskalärprodukten återfås den klassiska Cauchy–Schwarz olikheten:

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n| \leq \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$

**Tolkning:** Cauchy–Schwarz begränsar hur “parallella” två vektorer kan vara relativt sina normer. I  $\mathbb{R}^n$  med standardprodukten kan man definiera vinkeln  $\theta$  mellan  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  via  $\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ , och olikheten säger att  $|\cos \theta| \leq 1$  – helt konsekvent med att cosinus alltid ligger mellan  $-1$  och  $1$ . I allmänna inre produktrum (polynom, funktioner) saknas geometrisk vinkel, men Cauchy–Schwarz gäller ändå och kan användas som en **generaliserad vinkeldefinition**.

## 12.2 Triangelolikheten

### Sats: Triangelolikheten

Låt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  vara en skalärprodukt på  $V$ . Då gäller för alla  $\vec{u}, \vec{v} \in V$ :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

**Bevis:**

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$$

Använd Cauchy–Schwarz:  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ :

$$\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

Ta roten ur båda sidor (båda icke-negativa):

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad \blacksquare$$

**Följdsats — triangelolikheten för avstånd:**

$$d(\vec{u}, \vec{v}) \leq d(\vec{u}, \vec{w}) + d(\vec{w}, \vec{v})$$

**Bevis av följsatsen:** Sätt  $\vec{a} = \vec{u} - \vec{w}$  och  $\vec{b} = \vec{w} - \vec{v}$ . Då ger triangelolikheten:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| = d(\vec{u}, \vec{w}) + d(\vec{w}, \vec{v})$$

**Tolkning:** Triangelolikheten säger att den raka vägen alltid är kortast — att gå via en mellanpunkt  $\vec{w}$  kan aldrig ge ett kortare avstånd. Namnet kommer från att i en triangel med hörn  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  är varje sida kortare än summan av de andra två. Denna olikhet gäller i alla inre produktrum och är fundamental för att normen verkligen ska bete sig som en “längd”.

## 12.3 Pythagorassatsen (generaliserad)

### Sats: Pythagorassatsen

Låt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  vara en skalärprodukt på  $V$ . Då gäller:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

(Ortogonalitet  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  är ekvivalent med att Pythagoras sats gäller.)

**Bevis:**

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$$

Likhet med  $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$  gäller om och bara om  $2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ , dvs.  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ , dvs.  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

■

**Tolkning:** I  $\mathbb{R}^2$  med standardprodukten ger detta den klassiska Pythagoras sats för rätvinkliga trianglar. Men satsen gäller i **alla** inre produktrum: om två polynom är ortogonala (deras

skalärprodukt är noll) gäller att “normen av summan i kvadrat = summan av normerna i kvadrat”. Pythagorassatsen generaliseras även till fler än två vektorer: om  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  är **parvis ortogonala**, så gäller

$$\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_k\|^2 = \|\vec{v}_1\|^2 + \|\vec{v}_2\|^2 + \dots + \|\vec{v}_k\|^2$$

## 13. Ortogonala och ortonormala mängder

### 13.1 Definition

#### Definition: Ortogonal mängd

En mängd vektorer  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$  i ett inre produktrum  $V$  kallas **ortogonal** om vektorerna är **parvis ortogonala**:

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0 \quad \text{för alla } i \neq j$$

(Varje par av distinkta vektorer i mängden har skalärprodukt noll.)

#### Definition: Ortonormal mängd

En ortogonal mängd kallas **ortonormal** om dessutom varje vektor har norm 1:

$$\|\vec{v}_i\| = 1 \quad \text{för alla } i$$

Ekvivalent:

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$$

( $\delta_{ij}$  kallas **Kronecker-delta**.)

**Tolkning:** En ortogonal mängd är en samling vektorer som alla är vinkelräta mot varandra — en generalisering av koordinataxlarna i  $\mathbb{R}^n$ . En ortonormal mängd är dessutom “normaliserad” så att varje vektor har enhetslängd. Standardbasen  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  i  $\mathbb{R}^n$  är det enklaste exemplet på en ortonormal mängd.

### 13.2 Varför är ortogonala mängder viktiga?

 **Sats: Ortogonala nollskilda vektorer är linjärt oberoende**

Om  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$  är en ortogonal mängd och ingen vektor är nollvektorn, så är mängden **linjärt oberoende**.

**Bevis:** Antag att  $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$ . Ta skalärprodukten med  $\vec{v}_j$  på båda sidor:

$$\langle c_1\vec{v}_1 + \dots + c_k\vec{v}_k, \vec{v}_j \rangle = \langle \vec{0}, \vec{v}_j \rangle = 0$$

Bilinjäriteten ger:  $c_1\langle \vec{v}_1, \vec{v}_j \rangle + \dots + c_k\langle \vec{v}_k, \vec{v}_j \rangle = 0$ .

Alla termer utom den  $j$ :te försvinner på grund av ortogonaliteten ( $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$  för  $i \neq j$ ):

$$c_j\langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle = 0$$

Eftersom  $\vec{v}_j \neq \vec{0}$  gäller  $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle > 0$  (axiom 4), så  $c_j = 0$ . Detta gäller för alla  $j$ , alltså  $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ . ■

**Praktisk konsekvens:** Om vi har en ortogonal mängd med  $n$  nollskilda vektorer i ett  $n$ -dimensionellt inre produktrum, bildar den automatiskt en **bas** — en **ortogonal bas**. Och om vi dessutom normaliserar vektorerna till enhetslängd får vi en **ortonormal bas**.

### 13.3 Räkneexempel

 **Exempel 19: Visa att en mängd är ortogonal i  $\mathbb{R}^3$**  >

 **Exempel 20: Ortogonal mängd i  $\mathbb{R}^3$  — korrekt verifiering** >

### 13.4 Fördelen med ortonormala baser

Om  $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  är en **ortonormal bas** för ett inre produktrum  $V$  blir koordinatberäkningen extremt enkel:

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} \langle \vec{x}, \vec{v}_1 \rangle \\ \langle \vec{x}, \vec{v}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{x}, \vec{v}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Koordinaterna fås genom skalärprodukter — **ingen Gausselimination behövs!**

**Varför?** Om  $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n$  och vi tar skalärprodukten med  $\vec{v}_j$ :

$$\langle \vec{x}, \vec{v}_j \rangle = c_1\langle \vec{v}_1, \vec{v}_j \rangle + \dots + c_n\langle \vec{v}_n, \vec{v}_j \rangle = c_j \cdot 1 = c_j$$

(Alla termer utom den  $j$ :te försvinner tack vare ortogonaliteten, och den  $j$ :te förenklas tack vare  $\|\vec{v}_j\| = 1$ .)

## 14. Sammanfattning: checklista för skalärprodukter

Kontroll	Fråga att ställa
Symmetri	Är $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ ?
Additivitet	Kan vi "bryta ut" en summa?
Homogenitet	Kan vi "dra ut" en skalär?
Positivdefinithet	Är $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$ för alla $\vec{u} \neq \vec{0}$ ?

### Vanligaste fallgropen

Axiom 4 är nästan alltid det axiom som bryter. Kontrollera alltid:

- **Viktad skalärprodukt:** Alla vikter strikt positiva?
- **Evalueringsskalärprodukt:** Tillräckligt många distinkta punkter?
- **Matrisbaserad:** Är matrisen inverterbar?

## Sammanfattning av skalärprodukter vi har sett

Rum	Skalärprodukt	Krav
$\mathbb{R}^n$ (standard)	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum u_i v_i$	Inga extra
$\mathbb{R}^n$ (viktad)	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum w_i u_i v_i$	$w_i > 0$
$\mathbb{R}^n$ (matrisbaserad)	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{v})$	$A$ inverterbar
$\mathbb{P}_n$ (evaluering)	$\langle p, q \rangle = \sum w_i p(x_i) q(x_i)$	$\geq n + 1$ distinkta punkter, $w_i > 0$
$\mathbb{P}_n$ eller $C[a, b]$ (integral)	$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x) q(x) dx$	Inga extra
$M_{m \times n}$ (Frobenius)	$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$	Inga extra

## Resurser

### Videor

- [3Blue1Brown: Abstract vector spaces](#) — varför abstrakta vektorrum och funktionsrum beter sig som  $\mathbb{R}^n$
- [3Blue1Brown: Dot products and duality](#) — skalärprodukt och projektion visuellt
- [MIT 18.06SC: Orthogonal Vectors and Subspaces \(Gilbert Strang\)](#) — ortogonalitet och inre produkt
- [MIT 18.06SC: Projection Matrices and Least Squares \(Gilbert Strang\)](#) — bästa approximation och normalekvationer

### Wikipedia

- [Inner product space](#)
- [Dot product](#)
- [Cauchy–Schwarz inequality](#)
- [Orthonormality](#)

- [Frobenius inner product](#)
- [Function space](#)

## Fördjupning

- Kursbok kap 6.1 — fullständig genomgång av inre produktrum med bevis
  - [Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Inner Products](#)
  - [Georgia Tech — Interactive Linear Algebra: Orthogonal Sets](#)
-