

Sannolikhetsmått

19 okt. 2026, 8 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #definition

Kurs: S0008M Förkunskaper: Utfallsrum och händelser

Ett sannolikhetsmått tilldelar varje händelse ett tal mellan 0 och 1 så att hela utfallsrummet får 1 och disjunkta händelser adderas. Ur de tre kraven följer alla räkneregler, bland dem komplementregeln och additionssatsen.

1. Definitionen

Den klassiska definitionen $P(A) = g/m$ gäller bara när utfallen är ändligt många och lika sannolika. I stället för att definiera vad $P(A)$ är i allmänhet kräver vi att sannolikheter har vissa egenskaper.

Definition 2.3. En funktion P som till varje händelse A i ett utfallsrum Ω ordnar ett reellt tal $P(A)$ kallas ett **sannolikhetsmått** om

- a) $0 \leq P(A) \leq 1$ för alla A
- b) $P(\Omega) = 1$
- c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ om A och B är disjunkta

$P(A)$ kallas då **sannolikheten för A** .

2. Masstolkningen

Sannolikhet som massa

Tänk på sannolikhet som **massa** utspridd över Ω , med total massa 1. Då är $P(A)$ massan på A , och de tre egenskaperna blir självklara: massan är aldrig negativ och aldrig mer än helheten, hela Ω väger 1, och två områden som inte överlappar väger tillsammans summan av sina massor.

Masstolkningen är också det enklaste sättet att troliggöra räknereglerna nedan: rita mängddiagrammet och fråga var massan hamnar.

3. Komplementregeln

Sats 2.3.

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

A och A^c är disjunkta och fyller tillsammans hela Ω , så deras massor summerar till 1.

"Minst en" via komplementet

“Minst en av händelserna inträffar” är $A \cup B$, och “ingen inträffar” är dess komplement. Därför

$$P(\text{ingen}) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$

När “minst en” är krånglig att räkna direkt är “ingen” ofta enkel, och tvärtom.

4. Additionssatsen

Sats 2.4.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Adderar vi massan på A och massan på B har snittet $A \cap B$ räknats två gånger. Vi drar bort det en gång. Är A och B disjunkta är $P(A \cap B) = 0$ och vi är tillbaka i egenskap c).

Tre händelser

Samma räkning med tre händelser: snitten parvis har räknats två gånger och dras bort, men då har trippelsnittet först lagts till tre gånger och dragits bort tre gånger, så det måste läggas tillbaka:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

⚠ Vanliga fel

- **Addera utan att dra bort snittet.** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ gäller bara för disjunkta händelser. Ett svar större än 1 är ett säkert tecken.
- **Blanda ihop disjunkt och oberoende.** Disjunkt betyder $P(A \cap B) = 0$. Oberoende betyder $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, se [Oberoende händelser](#).
- **Räkna "minst en" direkt** när komplementet "ingen" är en enda term.

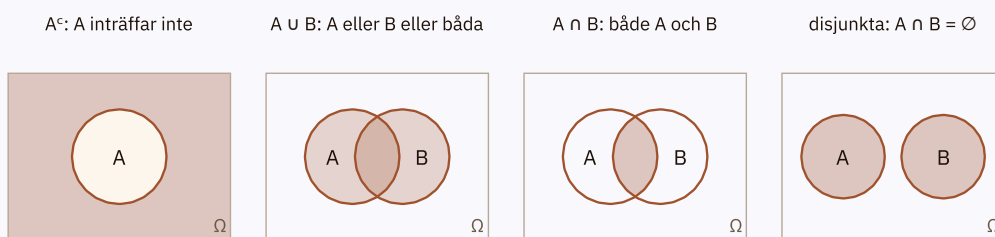
5. Lösta lektionsuppgifter

≡ Lektion 1, övning 7 – Satserna 2.3 och 2.4 med masstolkning

Troliggör komplementregeln (Sats 2.3) och additionssatsen (Sats 2.4) med hjälp av masstolkningen eller en egen tolkning. Rita figur.

✎ Lösning

Tänk på sannolikheten som massa utspridd över Ω , med total massa 1 (avsnitt 2).



Sats 2.3. A och A^c överlappar inte och täcker tillsammans hela Ω . Deras massor summerar därför till hela massan: $P(A) + P(A^c) = 1$, alltså $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Sats 2.4. Dela $A \cup B$ i tre bitar som inte överlappar: $A \cap B^c$, $A \cap B$ och $B \cap A^c$. Massan på A är de två första bitarna och massan på B de två sista. Adderar vi $P(A)$ och $P(B)$ har mittbiten $A \cap B$ kommit med två gånger, så vi drar bort den en gång:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exempel. Med $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,2$ och $P(A \cap B) = 0,05$ (övning 8 nedan) blir $P(A \cup B) = 0,25$ – lägg ihop de tre områdena i figuren till övning 8 och se att det stämmer.

Resonemangsuppgift – det finns inget facit att jämföra med.

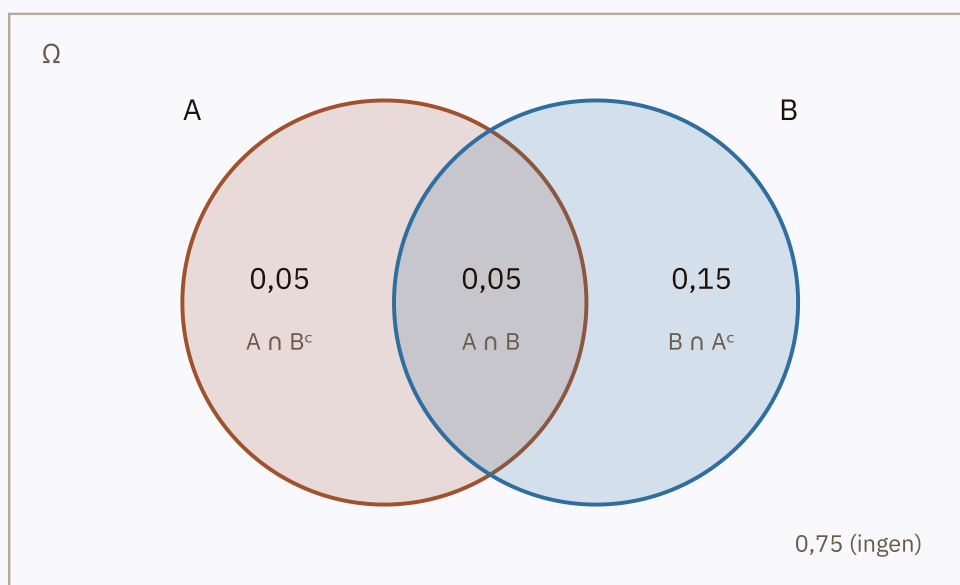
≡ Lektion 1, övning 8 (Vännman 2.15) – Två fel på byggelement

Vid tillverkning av en viss typ av byggelement kan två slags fel, A och B , uppkomma. Vi vet att $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,2$ och $P(A \cap B) = 0,05$. Beräkna sannolikheten att en tillverkad enhet har

- a) åtminstone något av felen,
- b) felet A men inte felet B ,
- c) felet B men inte felet A ,
- d) exakt ett av felen A och B .

Lösning

Figuren fördelar sannolikhetsmassan på de fyra områdena; b)–d) kan läsas av direkt.



a) “Åtminstone något” är $A \cup B$. Additionssatsen:

$$P(A \cup B) = 0,1 + 0,2 - 0,05 = \boxed{0,25}$$

b) A delas i två disjunkta bitar, $A \cap B$ och $A \cap B^c$, så $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0,1 - 0,05 = \boxed{0,05}$$

c) På samma sätt:

$$P(B \cap A^c) = 0,2 - 0,05 = \boxed{0,15}$$

d) “Exakt ett” är de två disjunkta månskärorna från b) och c):

$$P((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = 0,05 + 0,15 = \boxed{0,20}$$

Rimlighetskontroll. “Exakt ett” plus “båda” ska vara “minst ett”: $0,20 + 0,05 = 0,25$, som i a).

Svar i boken (2:a uppl., 2.15): a) 0,25, b) 0,05, c) 0,15, d) 0,20.

≡ Lektion 1, övning 9 (Vännman 2.16) – Tre tidningar

I en tätort med 30 000 invånare finns tre tidningar, A , B och C . En undersökning visade att

Läser	Antal	Läser	Antal
A	12 000	A och B	7 000
B	8 000	A och C	4 500
C	6 000	B och C	1 000
		A , B och C	500

Hur stor är sannolikheten att en slumpmässigt vald invånare läser

a) minst en av tidningarna,

b) ingen av tidningarna,

c) en och endast en av tidningarna?

Lösning

Med invånaren vald på måfå är sannolikheten för varje grupp dess andel av 30 000:

$$P(A) = \frac{12}{30}, \quad P(B) = \frac{8}{30}, \quad P(C) = \frac{6}{30}, \quad P(A \cap B) = \frac{7}{30}, \quad P(A \cap C) = \frac{4,5}{30}, \quad P(B \cap C) = \frac{1}{30}, \quad P(A \cap B \cap C) = \frac{0,5}{30}$$

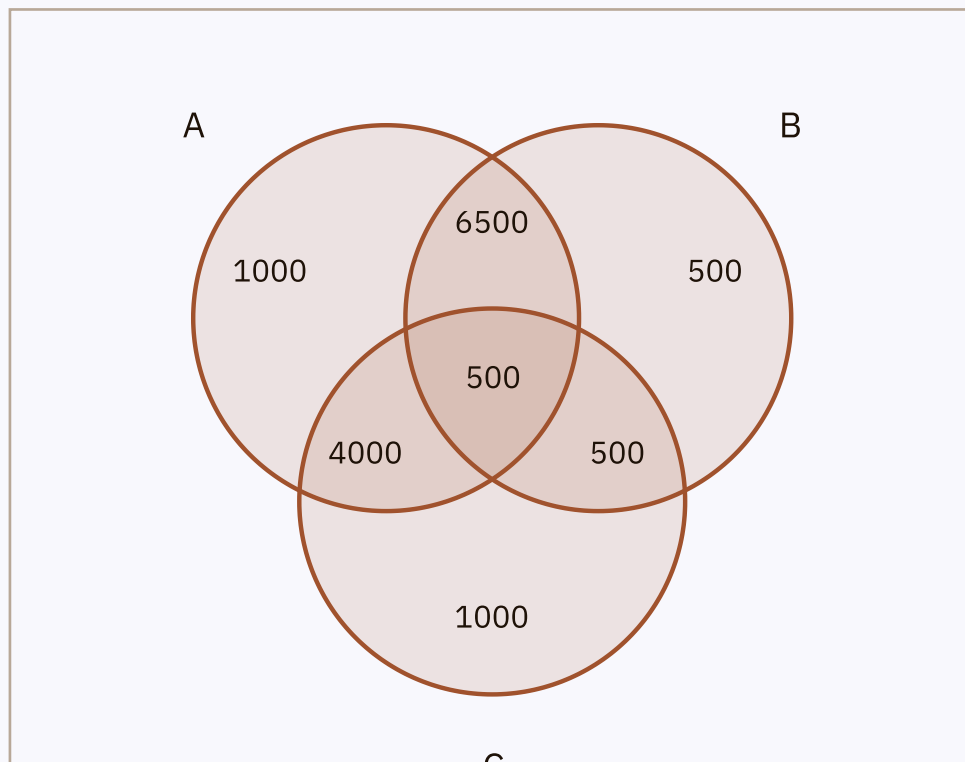
a) Additionssatsen för tre händelser:

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{12 + 8 + 6 - 7 - 4,5 - 1 + 0,5}{30} = \frac{14}{30} = \boxed{\frac{7}{15}} \approx 0,47$$

b) Komplementet till a):

$$P((A \cup B \cup C)^c) = 1 - \frac{7}{15} = \boxed{\frac{8}{15}} \approx 0,53$$

c) Fyll i mängddiagrammet inifrån och ut: trippelsnittet först, sedan de parvisa snitten minus trippelsnittet, sist de tre ytterområdena.



De som läser exakt en tidning är de tre ytterområdena: $1000 + 500 + 1000 = 2500$.

$$P(\text{exakt en}) = \frac{2500}{30\,000} = \boxed{\frac{1}{12}} \approx 0,083$$

Rimlighetskontroll. Summan av alla sju områden i figuren är 14 000, samma tal som gav 7/15 i a).

Svar i boken (2:a uppl., 2.16): a) 0,47, b) 0,53, c) 0,08. Stämmer också med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Lektion 2, övning 2 (Vännman 2.10 och 2.11) – Disjunkta händelser

2.10 Beräkna $P(B)$ om A och B är disjunkta händelser sådana att $P(A) = 0,25$ och $P(A \cup B) = 0,75$.

2.11 Två händelser A och B har sannolikheterna 0,6 respektive 0,7. Kan händelserna vara disjunkta?

 Lösning

2.10 Disjunkta händelser har $P(A \cap B) = 0$, så egenskap c) i definitionen ger $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$:

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,75 - 0,25 = \boxed{0,5}$$

2.11 Om de vore disjunkta skulle $P(A \cup B) = 0,6 + 0,7 = 1,3 > 1$, vilket strider mot $P(A \cup B) \leq 1$. **Nej**, de kan inte vara disjunkta. Additionssatsen ger dessutom att snittet måste väga minst $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq 1,3 - 1 = 0,3$.

I masstolkningen: två bitar med massorna 0,6 och 0,7 får inte plats i en total massa 1 utan att överlappa.

Svar i boken (2:a uppl., 2.10 och 2.11): 0,5 och Nej.

 Lektion 2, övning 3 – Fel på växellådor

Vid tillverkning av växellådor kan två typer av fel uppkomma, fel A och fel B . Sannolikheten för fel A är 0,03 och för fel B är den 0,05. Båda felen kan uppkomma samtidigt, med sannolikheten 0,015. Vad är sannolikheten att en slumpmässigt utvald växellåda har

- a) minst ett av felen,
- b) inte något fel,
- c) exakt ett fel?

 Lösning

Givet: $P(A) = 0,03$, $P(B) = 0,05$, $P(A \cap B) = 0,015$.

a) Additionssatsen:

$$P(A \cup B) = 0,03 + 0,05 - 0,015 = \boxed{0,065}$$

b) Komplementet till a):

$$P((A \cup B)^c) = 1 - 0,065 = \boxed{0,935}$$

c) "Exakt ett" är "minst ett" minus "båda":

$$P(\text{exakt ett}) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,065 - 0,015 = \boxed{0,05}$$

Ett annat sätt, via månskärorna: $P(A \cap B^c) + P(B \cap A^c) = (0,03 - 0,015) + (0,05 - 0,015) = 0,015 + 0,035 = 0,05$.

Facit: a) 0,065, b) 0,935, c) 0,05.

Se även

- Utfallsrum och händelser
- Klassiska sannolikhetsdefinitionen
- Betingad sannolikhet
- Oberoende händelser
- Mängdlära

Resurser

- [Khan Academy: Probability](#)
- [Wikipedia: Probability axioms](#)