

Sammansatta hypoteser

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#matematik #statistik #metod

Kurs: S0008M Förekunskaper: Enkla hypoteser

En sammansatt hypotes omfattar ett helt intervall av parametervärden, till exempel $\mu > \mu_0$. Testets förmåga att upptäcka en avvikelse beror då på var i intervallet det sanna värdet ligger, och beskrivs av en styrkefunktion.

1. Tre mothypoteser

Nollhypotesen är fortfarande enkel, $H_0 : \mu = \mu_0$, men mothypotesen innehåller ett helt intervall. Vilket kritiskt område vi väljer beror på vad vi vill kunna upptäcka:

Mothypotes	Vi vill upptäcka att $\mu \dots$	Förkasta H_0 om (σ känd)
$H_1 : \mu > \mu_0$	har ökat	$\bar{x} > \mu_0 + \lambda_\alpha \sigma / \sqrt{n}$
$H_1 : \mu < \mu_0$	har minskat	$\bar{x} < \mu_0 - \lambda_\alpha \sigma / \sqrt{n}$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	har ändrats åt något håll	$ \bar{x} - \mu_0 > \lambda_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$

De två första testen är **ensidiga**, det tredje är **tvåsidigt**: där delas α lika mellan de två svansarna. Gränserna härleds som i [Enkla hypoteser](#), eftersom signifikansnivån bara beror på fördelningen under H_0 .

Styrkan har nu ett värde för varje μ i mothypotesen och blir en **styrkefunktion** $S(\mu)$.

2. Standardiserad testvariabel

Att förkasta när $\bar{x} > \mu_0 + \lambda_\alpha \sigma / \sqrt{n}$ är samma sak som att förkasta när

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \lambda_\alpha$$

Vi kan alltså lika gärna använda z som testvariabel. Den är en observation från $N(0, 1)$ när H_0 är sann, och den kritiska gränsen blir λ_α oavsett μ_0 , σ och n .

3. Okänd σ – t -test

Oftast känner vi inte σ i förväg utan måste skatta den med stickprovets standardavvikelse s . Vi ersätter då σ med s i z :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Den här testvariabeln är en observation från **t -fördelningen** med $n - 1$ frihetsgrader när H_0 är sann. Den kritiska gränsen tas därför ur t -tabellen i stället för ur normalfördelningstabellen:

Mothypotes **Förkasta H_0 om (σ okänd)**

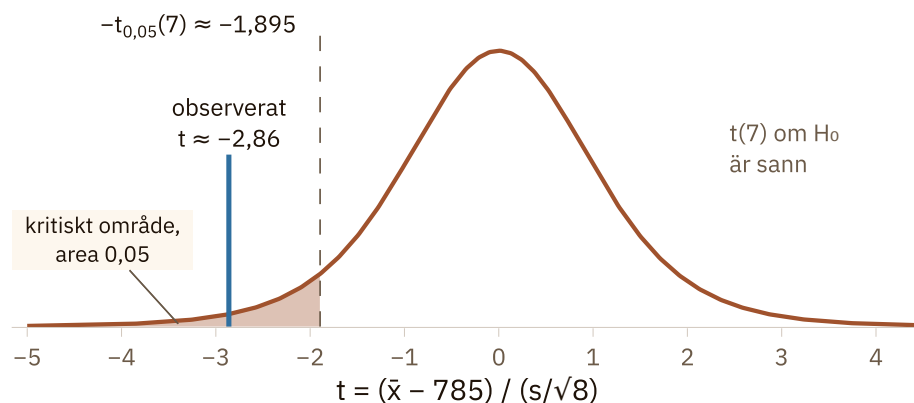
$$H_1 : \mu > \mu_0 \quad t > t_\alpha(n-1)$$

$$H_1 : \mu < \mu_0 \quad t < -t_\alpha(n-1)$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad |t| > t_{\alpha/2}(n-1)$$

På räknaren: **menu** → **Statistics** → **Stat Tests** → **z Test** när σ är känd och **t Test** när den är okänd. Välj **Stats** om du har $\bar{x}$ och s , **Data** om du har mätvärdena i en lista, och **Alternate Hyp** efter H_1 . De kritiska gränserna är $\lambda_\alpha = \text{invNorm}(1-\alpha)$ och $t_\alpha(f) = \text{invT}(1-\alpha, f)$.

Figuren visar det kritiska området för det ensidiga t -testet i övning 6 nedan, där $t(7)$ är fördelningen för testvariabeln om H_0 är sann:



 Vanliga fel

- λ när σ är skattad. Med s i stället för σ blir testvariabeln t -fördelad med $n - 1$ frihetsgrader.
- **Absolutbelopp i ensidigt test.** $|t| > t_{\alpha/2}$ gäller bara $H_1 : \mu \neq \mu_0$; ensidiga test jämför t med $\pm t_{\alpha}$ utan belopp.

4. Lösta lektionsuppgifter

 Lektion 15, övning 1 – Coca-Colaburkar

Låt $x_1, \dots, x_{10}$ vara observerade värden på $\xi_1, \dots, \xi_{10}$, där $\xi_i \in N(\mu, 1,72)$. Enheten är ml. Väntevärdet bör vara 330. Bestäm ett test som ska upptäcka om $\mu < 330$ och som har 5 % felrisk om μ är 330.

- Sätt upp noll- och mothypotes.
- Bestäm testet (strategin).
- Vad blir slutsatsen om $\bar{x} = 329,4$?
- Vad blir slutsatsen om $\bar{x} = 328,5$?

 Lösning

a) Vi vill kunna påvisa att burkarna innehåller för lite, så det läggs i mothypotesen:

$$H_0 : \mu = 330, \quad H_1 : \mu < 330$$

b) Små värden på $\bar{x}$ talar för H_1 : förkasta H_0 om $\bar{x} < k$. Under H_0 är $\bar{\xi} \in N(330, 1,72/\sqrt{10}) = N(330, 0,544)$, och

$$0,05 = P(\bar{\xi} < k \mid \mu = 330) \implies k = 330 - \lambda_{0,05} \cdot \frac{1,72}{\sqrt{10}} = 330 - 1,6449 \cdot 0,544 \approx 329,1$$

Testet: förkasta H_0 om $\bar{x} < 329,1$.

c) $\bar{x} = 329,4$ ligger inte under 329,1. H_0 **kan inte förkastas** på 5 % signifikansnivå — vi har inte påvisat att burkarna innehåller för lite.

d) $\bar{x} = 328,5 < 329,1$. H_0 **förkastas** på 5 % signifikansnivå: med 5 % felrisk kan vi påstå att $\mu < 330$.

På räknaren. k direkt: `invNorm(0.05, 330, 1.72/sqrt(10))` ≈ 329.105 . Eller z Test med **Stats**: $\mu_0: 330$, $\sigma: 1.72$, $\bar{x}: 328.5$, $n: 10$, **Alternate Hyp** $\mu < \mu_0$ ger $z \approx -2,76$ och $P_{val} \approx 0,003 < 0,05$ — samma slutsats som d), se **Direktmetoden**.

Facit: a) $H_0 : \mu = 330$, $H_1 : \mu < 330$; b) förkasta H_0 om $\bar{x} < 329,1$; c) kan inte förkastas; d) förkastas.

≡ Lektion 15, övning 6 (Vännman 9.16) — t -test med åtta mätvärden

Åtta oberoende mätvärden, $\xi_i \in N(\mu, \sigma)$ med okänt σ , gav $\bar{x} = 782,875$ och $s = 2,1002$. Pröva $H_0 : \mu = 785$ mot $H_1 : \mu < 785$ på signifikansnivån 5 %.

Lösning

Testvariabel. σ är okänd, så vi använder

$$t = \frac{\bar{x} - 785}{s/\sqrt{8}}$$

som är en observation från $t(7)$ om H_0 är sann.

Strategi. Små värden talar för H_1 : förkasta H_0 om $t < -t_{0,05}(7) \approx -1,895$.

Slutsats.

$$t = \frac{782,875 - 785}{2,1002/\sqrt{8}} \approx -2,86 < -1,895$$

H_0 förkastas på 5 % signifikansnivå: vi har påvisat att $\mu < 785$.

På räknaren. t Test med Stats: μ_0 : 785, $\bar{x}$: 782.875, s_x : 2.1002, n : 8, **Alternate Hyp** $\mu < \mu_0$. Räknaren ger $t \approx -2,86$ och $p\text{Val} \approx 0,012$. Gränsen: $\text{inv}t(0.05, 7) \approx -1.895$.

Uppgiften (Vännman 9.16) är återgiven ur det handskrivna lösningsförslaget ($t \approx -2,86 < -1,895$), och slutsatsen stämmer med det.

≡ Lektion 16, övning 1 – Enheter som ska väga 500 gram

En maskin tillverkar enheter som bör väga 500 gram. För att se att den genomsnittliga vikten håller sig på 500 gram tas regelbundet ett stickprov av storlek 8. Bilda ett test baserat på 8 mätvärden $x_1, \dots, x_8$ som ska upptäcka en genomsnittlig systematisk avvikelse från 500, alltså om $\mu \neq 500$. Använd 5 % signifikansnivå och anta att mätvärdena är normalfördelade.

- Ange fullständiga modellantaganden och hypoteser.
- Bestäm testet, det vill säga beslutsstrategin.
- Ett stickprov gav $\bar{x} = 497,8$ gram och $s = 2,1$. Vad blir slutsatsen?

Lösning

a) ξ_i = vikten hos enhet nummer i , $i = 1, \dots, 8$. De är oberoende och $\xi_i \in N(\mu, \sigma)$ med både μ och σ okända.

$$H_0 : \mu = 500, \quad H_1 : \mu \neq 500$$

b) σ är okänd och mothypotesen tvåsidig. Med $t_{0,025}(7) \approx 2,365$:

$$\text{förkasta } H_0 \text{ om } \left| \frac{\bar{x} - 500}{s/\sqrt{8}} \right| > 2,365$$

c)

$$\left| \frac{497,8 - 500}{2,1/\sqrt{8}} \right| \approx |-2,96| = 2,96 > 2,365$$

H_0 förkastas på 5 % signifikansnivå: det finns en genomsnittlig systematisk avvikelse från 500 gram.

Samma slutsats med ett konfidensintervall finns i [Konfidensintervall och hypotesprövning](#).

På räknaren. t Test med **Stats:** $\mu_0: 500$, $\bar{x}: 497.8$, $s_x: 2.1$, $n: 8$, **Alternate Hyp** $\mu \neq \mu_0$.
Räknaren ger $t \approx -2,96$ och $p\text{Va}1 \approx 0,021 < 0,05$. Gränsen: $\text{inv}t(0.975, 7) \approx 2.365$.

Facit: a) $\xi_i \in N(\mu, \sigma)$, $H_0: \mu = 500$, $H_1: \mu \neq 500$; b) förkasta H_0 om $|\bar{x} - 500|/(s/\sqrt{8}) > 2,365$; c) H_0 förkastas.

Se även

- [Hypotesprövning](#)
- [Enkla hypoteser](#)
- [Styrkefunktion](#)
- [Direktmetoden](#)
- [t-fördelningen](#)
- [Konfidensintervall och hypotesprövning](#)

Resurser

- [Khan Academy: Tests about a population mean](#)
- [Wikipedia: Student's t-test](#)