

Reducerad massa

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #mekanik #storhet

Kurs: F0005T Förkunskaper: Masscentrum

I ett tvåkropparssystem rör sig båda kropparna kring det gemensamma masscentrumet, och problemet kan skrivas om till en enda kropp med den reducerade massan. För väte är korrektionen liten eftersom protonen är 1836,2 gånger tyngre än elektronen, men den räcker för att skilja väte från deuterium spektroskopiskt – så upptäcktes deuterium år 1932. Samma storhet återkommer i molekylers rotation och vibration.

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{m_r}_{\text{ersättnings-}} = \underbrace{m_1}_{\text{ena}} \cdot \underbrace{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}_{\text{en andel, alltid } < 1}$$

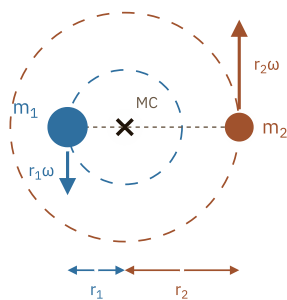
kroppens massa

Den reducerade massan är den ena massan gånger en faktor som alltid är mindre än ett. Är den andra kroppen mycket tyngre går faktorn mot ett, och vi får tillbaka bilden med en orörlig kärna.

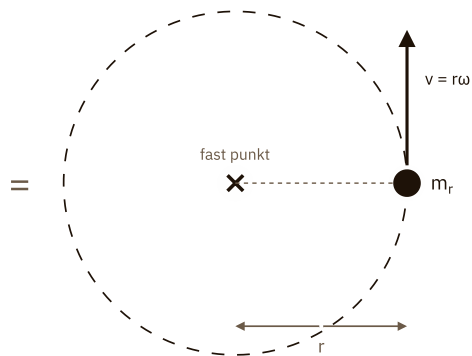
1. Två kroppar blir en

Två kroppar som bara påverkar varandra kretsar båda kring sitt gemensamma masscentrum. Låt r vara avståndet mellan dem och r_1, r_2 deras avstånd till masscentrum. Båda har samma vinkelhastighet ω , och den relativa farten är $v = r\omega$. Det visar sig att rörelsen beskrivs exakt som om en enda kropp med massan m_r kretsade på avståndet r kring en fast punkt.

två kroppar kring masscentrum



$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad r_1 + r_2 = r$$

en kropp med massan m_r 

$$m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$$

Vänster: två kroppar kretsar kring sitt gemensamma masscentrum med samma vinkelhastighet, och den tyngre går i den mindre cirkeln. Höger: samma rörelse som en enda kropp med massan m_r på det relativa avståndet r kring en fast punkt.

Härledning av enkropps bilden

Masscentrum. $m_1 r_1 = m_2 r_2$ och $r_1 + r_2 = r$ ger

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$$

Kraften på kropp 1. Den håller kropp 1 i en cirkel med radien r_1 :

$$F = m_1 r_1 \omega^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r \omega^2 = m_r \frac{v^2}{r}$$

Rörelsemängdsmomentet. Summan för båda kropparna:

$$L = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega = \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} r^2 \omega$$

$$L = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \omega = m_r v r$$

Kinetiska energin. På samma sätt:

$$K = \frac{1}{2} m_1 (r_1 \omega)^2 + \frac{1}{2} m_2 (r_2 \omega)^2 = \frac{1}{2} m_r (r \omega)^2 = \frac{1}{2} m_r v^2$$

$$F = m_r \frac{v^2}{r} \quad L = m_r v r \quad K = \frac{1}{2} m_r v^2$$

Två gränsfall är värda att komma ihåg:

- **En kropp mycket tyngre**, $m_2 \gg m_1$: $m_r \rightarrow m_1$. Den tunga kroppen står i praktiken still.
- **Lika massor**, $m_1 = m_2 = m$: $m_r = m/2$.

Den reducerade massan är alltid mindre än den minsta av de två massorna.

2. Korrektionen i Bohrs modell

I **Bohrs modell för väteatomen** antog vi att protonen står still. Eftersom kraftekvationen, kvantiseringsvillkoret och energin har exakt samma form med m_r och det relativa avståndet r , räcker det att byta m_e mot m_r i alla formler. Energierna och Rydbergkonstanten är proportionella mot massan, banradierna omvänt proportionella:

$$E_n \propto m_r \quad r_n \propto \frac{1}{m_r}$$

$$R_M = R_\infty \frac{m_r}{m_e} = \frac{R_\infty}{1 + m_e/M}$$

där $R_\infty = 1,0974 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ är värdet för en oändligt tung kärna och M kärnans massa. För väte är $M = 1836,2 m_e$, så

$$m_r = \frac{1836,2}{1837,2} m_e = 0,99946 m_e$$

Fysika: Te (m_p/m_e)

Joniseringsenergin blir då $0,99946 \cdot 13,606 \text{ eV} = 13,599 \text{ eV}$ i stället för $13,606 \text{ eV}$, i överensstämmelse med mätvärdet $13,60 \text{ eV}$. Korrektionen är ungefär $0,05 \%$ — liten, men mycket större än spektroskopins mätosäkerhet.

3. Isotopförskjutning: väte och deuterium

Deuteriumkärnan består av en proton och en neutron och är ungefär dubbelt så tung som protonen. Kemiskt är deuterium väte ($Z = 1$), men den reducerade massan skiljer sig:

$$m_{r,H} = 0,99946 m_e \quad m_{r,D} = 0,99973 m_e$$

Alla våglängder är omvänt proportionella mot m_r , så varje deuteriumlinje ligger något kortare än motsvarande vätelinje:

$$\frac{\lambda_D}{\lambda_H} = \frac{m_{r,H}}{m_{r,D}} = 0,99973$$

Den relativa förskjutningen är 0,027 %, eller omkring 0,18 nm för den röda Balmerlinjen. Det var den förskjutningen som avslöjade deuterium år 1932.

4. Exotiska tvåkropparssystem

När de två massorna är jämförbara är korrektionen inte längre liten:

- **Positronium** är en elektron bunden till en positron – samma massa, motsatt laddning. Med $m_r = m_e/2$ halveras alla energier, $E_n = -6,80 \text{ eV}/n^2$, och avståndet mellan partiklarna dubblas.
- **Myoniskt väte** är en proton med en myon, 207 gånger tyngre än elektronen, i stället för en elektron. Då är $m_r = 186 m_e$, så grundtillståndets energi blir $-2,53 \text{ keV}$ och radien 186 gånger mindre än a_0 .

Vanliga fel

- **Massan byts ut på fel ställen.** Bara massan byts mot m_r ; laddningarna och Z är desamma.
- **Fel radie i positronium.** Bohrformeln med m_r ger *avståndet mellan partiklarna*, $r = 2a_0$. Varje partikel kretsar på avståndet a_0 från masscentrum.
- **För få värdesiffror.** Isotopeffekten ligger på fjärde decimalen; avrundas λ_H och λ_D till tre värdesiffror blir de lika. Räkna skillnaden via kvoten $m_{r,H}/m_{r,D}$.
- **m_r större än den minsta massan.** Den reducerade massan är alltid mindre än både m_1 och m_2 – en snabb kontroll av räkningen.

5. Lösta exempel

Exempel – H-alfa i väte och deuterium

Beräkna våglängden för Balmerlinjen H_α ($3 \rightarrow 2$) i väte och i deuterium med hänsyn till den reducerade massan, och bestäm skillnaden mellan dem. Använd $R_\infty = 1,0974 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$, protonens massa $1836,2 m_e$ och deutronens massa $3670,5 m_e$.

Lösning

Reducerade massor.

$$\frac{m_{r,H}}{m_e} = \frac{1836,2}{1837,2} = 0,999456 \quad \frac{m_{r,D}}{m_e} = \frac{3670,5}{3671,5} = 0,999728$$

Väte. $R_H = 0,999456 \cdot 1,0974 \cdot 10^7 = 1,09680 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$:

$$\lambda_H = \frac{1}{R_H (1/4 - 1/9)} = \frac{36}{5 \cdot 1,09680 \cdot 10^7} = \boxed{656,45 \text{ nm}}$$

Deuterium.

$$\lambda_D = \lambda_H \cdot \frac{0,999456}{0,999728} = \boxed{656,27 \text{ nm}}$$

Skillnaden.

$$\Delta\lambda = \lambda_H \left(1 - \frac{0,999456}{0,999728}\right) = 656,45 \cdot 2,72 \cdot 10^{-4} = \boxed{0,179 \text{ nm}}$$

Här krävs fem värdesiffror i våglängderna för att skillnaden alls ska synas.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

☰ Exempel – Positronium

Positronium är ett bundet system av en elektron och en positron, som har samma massa som elektronen men positiv laddning. Bestäm med Bohrs modell och reducerad massa joniseringsenergin, avståndet mellan partiklarna i grundtillståndet och våglängden för fotonen vid övergången $2 \rightarrow 1$.

Lösning

Reducerad massa.

$$m_r = \frac{m_e m_e}{m_e + m_e} = \frac{m_e}{2}$$

Joniseringsenergin. $E_n \propto m_r$:

$$E_{\text{jon}} = \frac{13,6 \text{ eV}}{2} = \boxed{6,80 \text{ eV}}$$

Avståndet. $r_n \propto 1/m_r$, och Bohrradien avser nu avståndet mellan partiklarna:

$$r = 2a_0 = 2 \cdot 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m} = \boxed{1,06 \cdot 10^{-10} \text{ m}}$$

Övergången $2 \rightarrow 1$.

$$\Delta E = 6,80 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 5,10 \text{ eV} \quad \lambda = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{5,10 \text{ eV}} = \boxed{243 \text{ nm}}$$

Det är dubbelt så lång våglängd som väteets Lyman- α , eftersom alla energier är halverade.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.3 Energy Levels and the Bohr Model of the Atom