

Punktskattning

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #statistik #metod

Kurs: S0008M Förkunskaper: Statistisk inferens

En punktskattning är ett enda tal, beräknat ur stickprovet, som utgör vår gissning på en okänd parameter. Skattningen är väntevärdesriktig om dess väntevärde är lika med den sanna parametern, alltså om den varken systematiskt över- eller underskattar.

1. Skattning och skattningsvariabel

Låt θ vara en okänd parameter, till exempel μ . En **skattning** av θ är en funktion av stickprovet. Vännman markerar den med stjärna:

- $\theta^* = g(\xi_1, \dots, \xi_n)$ är **stickprovsvariabeln** — slumpmässig, med en fördelning.
- $\theta_{\text{obs}}^* = g(x_1, \dots, x_n)$ är den **observerade skattningen** — ett tal.

Eftersom θ^* är en **stokastisk variabel** kan vi fråga efter dess **väntevärde** och **varians**, och det är så vi bedömer hur bra skattningen är.

2. Två kvalitetskrav

Väntevärdesriktig och effektiv

- θ^* är **väntevärdesriktig** om $E(\theta^*) = \theta$. Skattningen träffar rätt i genomsnitt.
- Av två väntevärdesriktiga skattningar är den med **minst varians** mest **effektiv**. Den hamnar i genomsnitt närmast θ .

Spridningen hos skattningen kallas dess **medelfel**, $D(\theta^*) = \sqrt{V(\theta^*)}$.

3. Skattning av μ

Den naturliga skattningen av väntevärdet är medelvärdet:

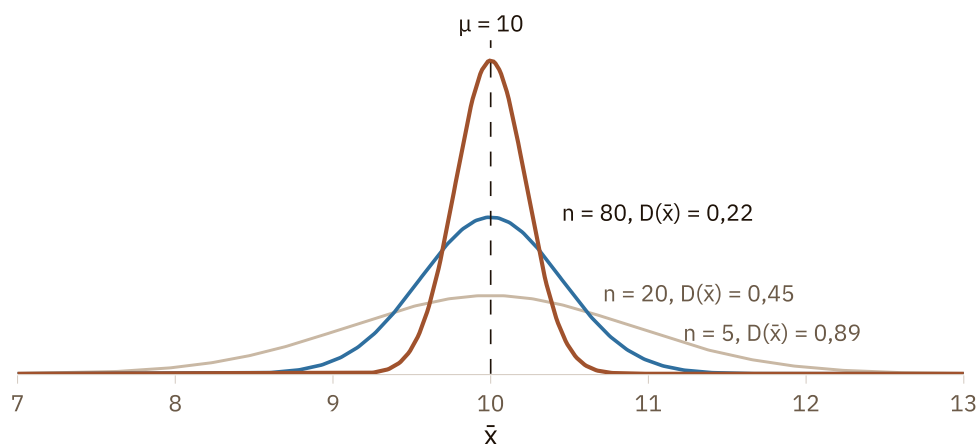
$$\mu^* = \bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$$

Den är väntevärdesriktig, och för oberoende ξ_i med standardavvikelse σ är

$$E(\bar{\xi}) = \mu, \quad D(\bar{\xi}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Medelfelet minskar som $1/\sqrt{n}$: fyra gånger så många observationer halverar osäkerheten. För normalfördelade observationer är $\bar{\xi}$ den mest effektiva skattningen av μ , och $\bar{\xi} \in N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.

Fördelningen för $\bar{x}$ när $\sigma = 2$: alla centrerade kring μ , smalare med större n



Figuren visar fördelningen för $\bar{\xi}$ vid tre stickprovsstorlekar. Alla tre är centrerade kring μ – skattningen är väntevärdesriktig oavsett n – men spridningen krymper, så en enskild observerad skattning hamnar närmare μ ju större stickprovet är.

4. Skattning av σ – s-metoden

Variansen skattas med stickprovsvariansen

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)$$

och σ med $s = \sqrt{s^2}$. Motsvarande stickprovsvariabel skrivs σ^* , så s är en observation av σ^* .

Varför $n - 1$?

Avvikelserna mäts från $\bar{x}$ och inte från det okända μ . Eftersom $\bar{x}$ ligger mitt i datamaterialet blir avvikelserna i genomsnitt lite för små. Att dela med $n - 1$ i stället för n kompenserar exakt för det: $(\sigma^*)^2$ blir väntevärdesriktig för σ^2 . På räknaren (One-Variable Statistics) är det **sx**, inte **ox**.

Härledning: $E((\sigma^*)^2) = \sigma^2$

Lägg till och dra ifrån μ i varje avvikelse. Korstermen summerar till $-2n(\bar{\xi} - \mu)^2$, och kvar blir

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2 = \sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu)^2 - n(\bar{\xi} - \mu)^2$$

Varje term i den första summan har väntevärdet $V(\xi_i) = \sigma^2$, och $E((\bar{\xi} - \mu)^2) = V(\bar{\xi}) = \sigma^2/n$. Alltså

$$E\left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2\right) = n\sigma^2 - n \cdot \frac{\sigma^2}{n} = (n-1)\sigma^2$$

Delar vi med $n - 1$ blir väntevärdet exakt σ^2 . Delar vi med n underskattar vi i genomsnitt variansen med faktorn $(n - 1)/n$.

Räkneformen

Den högra formen, med $\sum x_i^2$, är den som används när uppgiften ger summor i stället för rådata. Räkna med många decimaler i $\bar{x}$ – differensen $\sum x_i^2 - n\bar{x}^2$ är ofta liten jämfört med termerna.

Ersätter vi σ med s i medelfelet får vi det **skattade medelfelet** $d = s/\sqrt{n}$, som används i **t-intervallet**.

Exempel – Fem mätningar

Fem mätningar av en längd gav (mm)

12,1 11,8 12,4 12,0 12,2

Mätvärdena betraktas som observationer av oberoende $\xi_i \in N(\mu, \sigma)$. Skatta μ och σ , och beräkna det skattade medelfelet för μ^* .

Lösning

$$\mu_{\text{obs}}^* = \bar{x} = \frac{60,5}{5} = \boxed{12,1 \text{ mm}}$$

Avvikelserna från $\bar{x}$ är 0, -0,3, 0,3, -0,1 och 0,1, så

$$s^2 = \frac{0 + 0,09 + 0,09 + 0,01 + 0,01}{5 - 1} = 0,05, \quad s = \sqrt{0,05} \approx \boxed{0,224 \text{ mm}}$$

$$d = \frac{s}{\sqrt{5}} \approx \boxed{0,100 \text{ mm}}$$

En enskild mätning varierar alltså med omkring 0,22 mm, men medelvärdet av fem bara med omkring 0,10 mm.

På räknaren.  → Statistics → Stat Calculations → One-Variable Statistics på listan; läs av $\bar{x}$ och sx .

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Vanliga fel

- **sx i stället för sx .** Räknarens sx delar med n ; stickprovsstandardavvikelsen s är sx .
- **s eller $s/\sqrt{n}$.** s skattar spridningen hos en observation, $d = s/\sqrt{n}$ spridningen hos medelvärdet.
- **Avrunda $\bar{x}$ för tidigt** i räkneformen $\sum x_i^2 - n\bar{x}^2$; differensen blir då fel.

Se även

- Statistisk inferens
- Konfidensintervall
- t-fördelningen
- Väntevärde

- [Varians och standardavvikelse](#)

Resurser

- [Khan Academy: Sample variance](#) 
 - [Wikipedia: Bias of an estimator](#) 
-
-