

Poissonfördelning

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#matematik #statistik #sannolikhetslära #fördelning

Kurs: S0008M Förkunskaper: Binomialfördelning

Poissonfördelningen beskriver antalet sällsynta, oberoende händelser under en viss tid eller i ett visst område, till exempel samtal till en växel per minut eller fel per meter kabel. Den har bara en parameter, väntevärdet λ .

1. Sannolikhetsfunktionen

Poissonfördelningen räknar **antalet händelser i ett fixt intervall** — per sekund, per kvadratmeter, per produktionsparti. Låt ξ vara det antalet och λ den genomsnittliga intensiteten. Då är $\xi \in \text{Po}(\lambda)$ med

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Till skillnad från **binomialfördelningen** finns ingen övre gräns för k : vi räknar händelser, inte lyckade försök av ett fixt antal.

Tre antaganden

1. **Konstant intensitet** λ över hela intervallet.
2. **Oberoende** — en händelse påverkar inte sannolikheten för nästa.
3. **Inga sammanfallande händelser** — två inträffar aldrig exakt samtidigt.

2. Väntevärde, varians och kopplingen till binomialfördelningen

$$E(\xi) = V(\xi) = \lambda$$

Att väntevärde och varians sammanfaller är fördelningens signum: har ett datamaterial ungefär lika stort medelvärde som varians är Poisson en rimlig första modell.

Fördelningen uppstår som **gränsfall av binomialfördelningen** när $n \rightarrow \infty$ och $p \rightarrow 0$ med produkten $np = \lambda$ konstant (härledningen nedan). Det förklarar dess räckvidd: många möjliga tillfällen, försumbar sannolikhet var för sig, måttligt förväntat antal. Summan av oberoende Poissonvariabler är dessutom själv Poissonfördelad, med λ adderade — därför spelar det ingen roll om vi räknar per sekund eller per minut, bara λ skalas med.

Härlledning: Poisson som gränsfall av binomialfördelningen

Sätt $p = \lambda/n$ i binomialfördelningen och låt $n \rightarrow \infty$ med k fixt:

$$\binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \rightarrow 1} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Mittfaktorn går mot $e^{-\lambda}$ enligt standardgränsvärdet $(1 + x/n)^n \rightarrow e^x$, se [Gränsvärden](#). Samma gränsövergång ger $E = np = \lambda$ och $V = np(1-p) \rightarrow \lambda$.

Exempel — sönderfall i en detektor

Ett preparat ger i genomsnitt 4 registrerade sönderfall per sekund. Vad är sannolikheten att exakt 2 registreras under en given sekund?

Lösning

Setup. Sönderfall är oberoende och intensiteten konstant, så $\xi \in \text{Po}(4)$ med $\lambda = 4$ och vi söker $k = 2$.

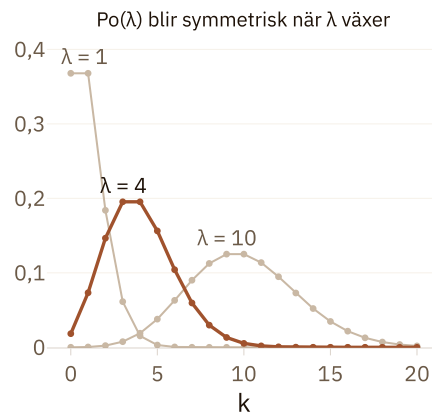
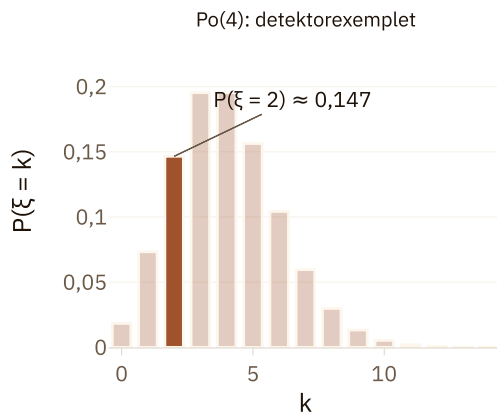
Räkningen.

$$P(\xi = 2) = \frac{4^2}{2!} e^{-4} = 8e^{-4} \approx \boxed{0,147}$$

Rimlighetskontroll. Väntevärdet är 4 och $\sigma = \sqrt{4} = 2$, så $k = 2$ ligger en standardavvikelse under medelvärdet — en dryg tiondel av massan är rimligt där. Binomialmodellen $\text{Bin}(1000, 0,004)$, alltså många små sönderfallschanser med samma $np = 4$, ger 0,146. Gränsövergången stämmer.

På räknaren. `poissPdf(4,2)`.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.



Till vänster detektorexemplet, med $k = 2$ markerat strax under toppen vid $\lambda = 4$. Till höger syns hur fördelningen ändrar karaktär med λ : vid $\lambda = 1$ är den kraftigt högersned med sin massa vid noll, medan den vid $\lambda = 10$ har blivit nästan symmetrisk — det är normalapproximationen som börjar gälla.

Radioaktivt sönderfall är standardexemplet just för att antagandena håller exakt — se [Kärnfysik](#).

3. Approximationer

Villkor	Approximation
$\xi \in \text{Bin}(n, p)$ med $p \leq 0,1$ och $n \geq 10$	$\xi \approx \text{Po}(np)$
$\xi \in \text{Hyp}(N, n, p)$ med $p + n/N \leq 0,1$ och $n \geq 10$	$\xi \approx \text{Po}(np)$

Poissontabellen i kursboken ger fördelningsfunktionen $P(\xi \leq x)$, precis som `poissCdf( $\lambda, \theta, x$ )` på räknaren.

⚠ Vanliga fel

- **Glömma att skala λ .** Är intensiteten 4 per timme blir antalet under 30 minuter $\text{Po}(2)$, inte $\text{Po}(4)$.
- **Ta roten ur fel storhet.** $V(\xi) = \lambda$, så standardavvikelsen är $\sqrt{\lambda}$, inte λ .
- **“Minst en” utan komplement.** $P(\xi \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}$ är enklast; att summera uppåt tar aldrig slut.

4. Lösta lektionsuppgifter

≡ Lektion 5, övning 1 — Kunder till ett systembolag

Antalet kunder som anländer till ett systembolag under en 3-minutersperiod antas vara $\xi \in \text{Po}(4)$. Beräkna sannolikheten att det under en 3-minutersperiod anländer

- a) högst 1 kund,
- b) minst 1 kund,
- c) mer än 5 kunder,
- d) exakt 4 kunder.

Lösning

$$P(\xi = k) = \frac{4^k}{k!} e^{-4}.$$

a)

$$P(\xi \leq 1) = e^{-4}(1 + 4) = 5e^{-4} \approx \boxed{0,092}$$

b) Komplementet till "ingen":

$$P(\xi \geq 1) = 1 - e^{-4} \approx \boxed{0,982}$$

c) Komplementet till "högst 5". Tabellen (eller `poissCdf(4,0,5)`) ger $F(5) \approx 0,785$:

$$P(\xi > 5) = 1 - F(5) \approx \boxed{0,215}$$

d)

$$P(\xi = 4) = \frac{4^4}{4!} e^{-4} = \frac{256}{24} e^{-4} \approx \boxed{0,195}$$

Facit: a) 0,092, b) 0,982, c) 0,215, d) 0,195.

≡ Lektion 4, övning 8 – Fartyg till en hamn

Antalet fartyg som anländer till en hamn under en dag är Poissonfördelat med $\lambda = 2$.

- a) Vad är sannolikheten att fler än 3 fartyg anländer en viss dag?
- b) Hur många fartyg måste hamnen ha kapacitet för att med minst 95 % sannolikhet kunna betjäna alla fartyg som anländer en bestämd dag?

Lösning

ξ = antal fartyg en dag, $\xi \in \text{Po}(2)$, $P(\xi = x) = \frac{2^x}{x!}e^{-2}$.

a)

$$P(\xi > 3) = 1 - P(\xi \leq 3) = 1 - e^{-2} \left(1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6}\right) \approx 1 - 0,857 = \boxed{0,143}$$

b) Vi söker minsta kapacitet c med $P(\xi \leq c) \geq 0,95$:

$$P(\xi \leq 3) \approx 0,857, \quad P(\xi \leq 4) \approx 0,947, \quad P(\xi \leq 5) \approx 0,983$$

Fyra räcker inte, fem gör det: kapacitet för $\boxed{5 \text{ fartyg}}$.

Svar i boken (2:a uppl., 3.19): a) 0,143, b) 5 fartyg. Uppgiften är återgiven ur det handskrivna lösningsförslaget, och svaret stämmer också med det.

Se även

- Binomialfördelning
- Stokastisk variabel
- Hypergeometrisk fördelning

- [Kärnfysik](#)

Resurser

- [Khan Academy: Poisson distribution](#)[↗]
 - [Wikipedia: Poissonfördelning](#)[↗]
-
-