

Plancks strålningslag

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #samband

Kurs: F0005T **Förkunskaper:** Svartkroppsstrålning, Fotonen

Klassisk fysik kunde varken förklara varför det finns ett $\lambda_{\max}$ eller kurvornas form. Planck löste det år 1900 genom att anta att energin utbyts i kvanta hf – *an act of desperation*, som han själv kallade det, och första gången Plancks konstant dyker upp. Einstein använde samma hypotes fem år senare för att förklara fotoelektriska effekten. Derivering av lagen ger Wiens förskjutningslag, integration ger Stefan-Boltzmanns lag.

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)}$$

Fysika: Fd4 (Plancks strålningslag, i formen $I(\lambda, T) = c_1 / (\lambda^5 (e^{c_2/\lambda T} - 1))$)

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{I(\lambda)}_{\text{spektral-emittans}} = \underbrace{\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}}_{\text{växer mot korta } \lambda} \cdot \underbrace{\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}}_{\text{kvantspärren: dör ut vid korta } \lambda}$$
$$\frac{hc}{\lambda kT} = \frac{\overbrace{hf}^{\text{ett kvantum}}}{\underbrace{kT}_{\text{termisk energi}}}$$

Den första faktorn växer utan gräns mot korta våglängder, precis som den klassiska förutsägelsen. Den andra är Plancks bidrag: när ett kvantum hf är mycket större än kT blir den exponentiellt liten, och den ultravioletta katastrofen uteblir.

1. Kvanthypotesen

Rayleigh lät varje svängningsmod i hålrummet ha medelenergin $k_B T$, oberoende av frekvensen, och fick den ultravioletta katastrofen (se [Svartkroppsstrålning](#)). Planck antog i stället att svängarna i väggarna bara kan ha energierna

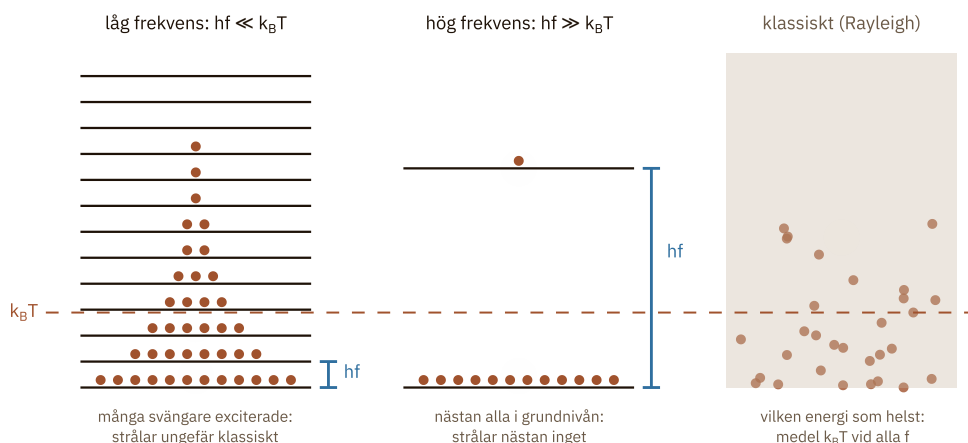
$$E_n = nhf \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nivåerna ligger på avståndet hf från varandra, och energi kan bara tas upp och avges i hela kvanta hf . I jämvikt vid temperaturen T är andelen svängare i första exciterade nivån jämfört med grundnivån Boltzmannfaktorn

$$\frac{n_1}{n_0} = e^{-hf/k_B T}$$

- **Låg frekvens, $hf \ll k_B T$:** många svängare är exciterade, och strålningen blir ungefär som Rayleigh förutsade.
- **Hög frekvens, $hf \gg k_B T$:** nästan alla svängare ligger i grundnivån och kan inte stråla. Därför dör spektrumet ut vid korta våglängder.

Gränsen går där $hf \approx k_B T$, alltså vid $\lambda \approx hc/(k_B T)$. Vid 3000 K är det ungefär 4,8 μm .



Plancks svängare som energitrappor med stegen hf , där varje prick är en svängare i jämvikt. Vid låg frekvens är stegen små mot $k_B T$ och många svängare är exciterade; vid hög frekvens är redan första steget för högt och nästan alla ligger kvar i grundnivån. Klassiskt finns inga steg, och varje mod får medelenergin $k_B T$ oavsett frekvens.

2. Gränsfallen

Det är lättast att se hur lagen beter sig med den dimensionslösa exponenten

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$$

Långa våglängder, $x \ll 1$. Då är $e^x \approx 1 + x$, så

$$e^x - 1 \approx \frac{hc}{\lambda k_B T}$$

$$I(\lambda) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{\lambda k_B T}{hc} = \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4}$$

Det är Rayleighs uttryck. h har försvunnit, vilket betyder att kvanteffekterna inte spelar någon roll när fotonenergin är liten jämfört med $k_B T$.

Korta våglängder, $x \gg 1$. Då är $e^x - 1 \approx e^x$, så

$$I(\lambda) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda k_B T}$$

Exponentialfaktorn trycker ner kurvan mot noll mycket snabbare än λ^{-5} växer, och den ultravioletta katastrofen försvinner. Figuren i [Svartkroppsstrålning](#) visar båda gränfallen.

3. Följder av lagen

- **Derivering** ger toppens läge $\lambda_{\max} = hc/(4,965 k_B T)$, alltså [Wiens förskjutningslag](#).
- **Integration** över alla våglängder ger $I = \sigma T^4$ med $\sigma = 2\pi^5 k_B^4/(15c^2 h^3)$, alltså [Stefan-Boltzmanns lag](#).
- **Samma form vid alla temperaturer.** $I(\lambda)$ beror på λ och T bara genom kombinationen λT , bortsett från en skalfaktor. Därför kan kurvorna läggas på varandra om axlarna skalas om.

4. Att räkna med lagen

Räkna först ut exponenten x och sedan resten. Konstanterna

$$2\pi hc^2 = 3,742 \cdot 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{m}^2 \quad \frac{hc}{k_B} = 1,439 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Fysika: Te ($c_1 = 2\pi hc^2$, $c_2 = hc/k$)

sparar mycket räknande. Intensiteten i ett smalt intervall är $I(\lambda) \Delta\lambda$. Kvoten mellan två våglängder vid samma temperatur blir

$$\frac{I(\lambda_1)}{I(\lambda_2)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 \frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_1} - 1}$$

där konstanterna framför har tagit ut varandra.

⚠ Vanliga fel

- **Blandade enheter i exponenten.** λ ska vara i meter om h , c och k_B är i SI. Med λ i nm blir exponenten fel med en faktor 10^9 .
- **$I(\lambda)$ tolkas som en intensitet.** $I(\lambda)$ har enheten W/m^3 . Multiplicera med $\Delta\lambda$ i meter för att få W/m^2 .
- **k blandas ihop med vågtalet.** I lagen är $k = k_B$ Boltzmanns konstant.
- **Ettan i nämnaren stryks alltid.** Approximationen $e^x - 1 \approx e^x$ gäller bara när $x \gg 1$. Vid långa våglängder ger den helt fel svar.

5. Lösta exempel

☰ Exempel – Spektrumet från en glödtråd

En glödtråd strålar som en svartkropp vid 2800 K. a) Beräkna spektralemittansen vid 500 nm och vid 1,00 μm . b) Beräkna ungefär den intensitet som strålas ut mellan 995 och 1005 nm, och jämför med den totala intensiteten.

✎ Lösning

Exponenterna.

$$x_{500} = \frac{1,439 \cdot 10^{-2}}{500 \cdot 10^{-9} \cdot 2800} = 10,28 \quad x_{1000} = \frac{1,439 \cdot 10^{-2}}{1,00 \cdot 10^{-6} \cdot 2800} = 5,138$$

a) Vid 500 nm:

$$I = \frac{3,742 \cdot 10^{-16}}{(500 \cdot 10^{-9})^5 (e^{10,28} - 1)} = \frac{3,742 \cdot 10^{-16}}{3,125 \cdot 10^{-32} \cdot 2,905 \cdot 10^4} \approx \boxed{4,12 \cdot 10^{11} \text{ W/m}^3}$$

Vid 1,00 μm :

$$I = \frac{3,742 \cdot 10^{-16}}{(1,00 \cdot 10^{-6})^5 (e^{5,138} - 1)} = \frac{3,742 \cdot 10^{-16}}{1,00 \cdot 10^{-30} \cdot 169,5} \approx \boxed{2,21 \cdot 10^{12} \text{ W/m}^3}$$

Spektralemittansen är drygt fem gånger större i det nära infraröda än i det gröna.

b) Intervallet är smalt, $\Delta\lambda = 10,0$ nm, så

$$\Delta I \approx I(\lambda) \Delta\lambda = 2,21 \cdot 10^{12} \cdot 10,0 \cdot 10^{-9} \approx \boxed{2,21 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2}$$

Den totala intensiteten är

$$I = \sigma T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 2800^4 = 3,49 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2$$

Fysika: Fd4 (Stefan-Boltzmanns lag), $Te(\sigma)$ så andelen är $2,21 \cdot 10^4 / 3,49 \cdot 10^6 \approx \boxed{0,63\%}$.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

≡ Exempel – Lika stark vid två våglängder

Vid vilken temperatur har en svartkropp samma spektralemittans vid 500 nm som vid 1000 nm?

Lösning

Sätt upp villkoret. Låt $a = hc/(\lambda_2 k_B T)$ med $\lambda_2 = 1000$ nm. Eftersom $\lambda_1 = \lambda_2/2$ är exponenten vid λ_1 lika med $2a$. Villkoret $I(\lambda_1) = I(\lambda_2)$ blir

$$\frac{1}{\lambda_1^5 (e^{2a} - 1)} = \frac{1}{\lambda_2^5 (e^a - 1)}$$

$$e^{2a} - 1 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 (e^a - 1) = 32 (e^a - 1)$$

Faktorisera. $e^{2a} - 1 = (e^a - 1)(e^a + 1)$, och $e^a - 1 \neq 0$, så

$$e^a + 1 = 32 \quad \implies \quad a = \ln 31 = 3,434$$

Temperaturen.

$$T = \frac{hc}{\lambda_2 k_B a} = \frac{1,439 \cdot 10^{-2}}{1,00 \cdot 10^{-6} \cdot 3,434} \approx \boxed{4190 \text{ K}}$$

Rimlighetskontroll. Wiens lag ger $\lambda_{\text{max}} = 2,90 \cdot 10^{-3} / 4190 = 692 \text{ nm}$, alltså mellan de två våglängderna, som sig bör.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 39.5 Continuous Spectra