

Partikel i tvådimensionell låda

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #modell

Kurs: F0005T Förkunskaper: Partikel i låda

Utvidgningen till två dimensioner separeras genom ansatsen $\psi = \psi_x \psi_y$, så att randvillkoren i x- och y-led kan behandlas var för sig. Varje riktning ger sitt eget kvanttal ur sitt eget randvillkor, och den totala energin blir summan av bidragen, $E = E_x + E_y$. Med olika sidlängder L_x och L_y ligger nivåerna oregelbundet, så vilket tillstånd som är närmast under ett givet måste avgöras genom att räkna på kandidaterna.

$$E_{n_x, n_y} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right)$$

Fysika: Fd3 (i formen för en endimensionell låda, $E_n = n^2 \pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$; här en sådan term per riktning)

Formeln, symbol för symbol

$$E_{n_x, n_y} = \underbrace{\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m}}_{\text{samma för båda leden}} \left(\underbrace{\frac{n_x^2}{L_x^2}}_{\text{rörelsen i x-led}} + \underbrace{\frac{n_y^2}{L_y^2}}_{\text{rörelsen i y-led}} \right)$$

Varje riktning är en egen endimensionell låda med sitt eget kvanttal, och energierna adderas: $E = E_x + E_y$. En kort sida ger stora energisteg i sin riktning, eftersom sidlängden står i nämnaren.

1. Separation av variabler

Lådan är en rektangel $0 < x < L_x$, $0 < y < L_y$ med $U = 0$ inuti och oändligt utanför. Precis som i den endimensionella lådan måste ψ vara noll på hela randen. Inuti lyder Schrödingerekvationen

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = E \psi$$

Poängen med ansatsen $\psi(x, y) = X(x) Y(y)$ är att en partiell differentialekvation i två variabler delas upp i två vanliga ekvationer, en per riktning.

Härledning av vågfunktionerna

Sätt in ansatsen. Derivatans med avseende på x verkar bara på X , och den med avseende på y bara på Y :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (X'' Y + X Y'') = E X Y$$

Dela med XY .

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{X''}{X} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{Y''}{Y} = E$$

Första termen beror bara på x och andra bara på y . Summan är konstant för alla x och y , så varje term måste vara konstant för sig:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} X'' = E_x X \quad -\frac{\hbar^2}{2m} Y'' = E_y Y \quad E = E_x + E_y$$

Randvillkoren. $\psi = 0$ på $x = 0$ och $x = L_x$ för alla y kräver $X(0) = X(L_x) = 0$, och på samma sätt $Y(0) = Y(L_y) = 0$. Varje ekvation är alltså en endimensionell låda:

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin \frac{n_x \pi x}{L_x} \quad E_x = \frac{n_x^2 \pi^2 \hbar^2}{2m L_x^2}$$

$$Y(y) = \sqrt{\frac{2}{L_y}} \sin \frac{n_y \pi y}{L_y} \quad E_y = \frac{n_y^2 \pi^2 \hbar^2}{2m L_y^2}$$

Normering. Integralen av $|\psi|^2$ över rektangeln delas upp i en x -integral gånger en y -integral, och var och en är redan 1. Produkten är därför normerad.

Resultatet är ett tillstånd per talpar (n_x, n_y) med $n_x, n_y = 1, 2, 3, \dots$:

$$\psi_{n_x, n_y}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \sin \frac{n_x \pi x}{L_x} \sin \frac{n_y \pi y}{L_y}$$

Fysika: Fd3 (i formen $\psi_n(x) = \sqrt{2/a} \sin(n\pi x/a)$; här en sådan faktor per riktning)

Energien $E = E_x + E_y$ är formeln i rutan överst. Två dimensioner kräver två **kvanttal**, ett per riktning.

2. Kvadratisk låda och degeneration

Med $L_x = L_y = L$ blir energin ett heltal gånger en grundenhet:

$$E_{n_x, n_y} = E_0 (n_x^2 + n_y^2) \quad E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

Grundtillståndet är $(1, 1)$ med $E = 2E_0$, alltså inte E_0 . De lägsta nivåerna:

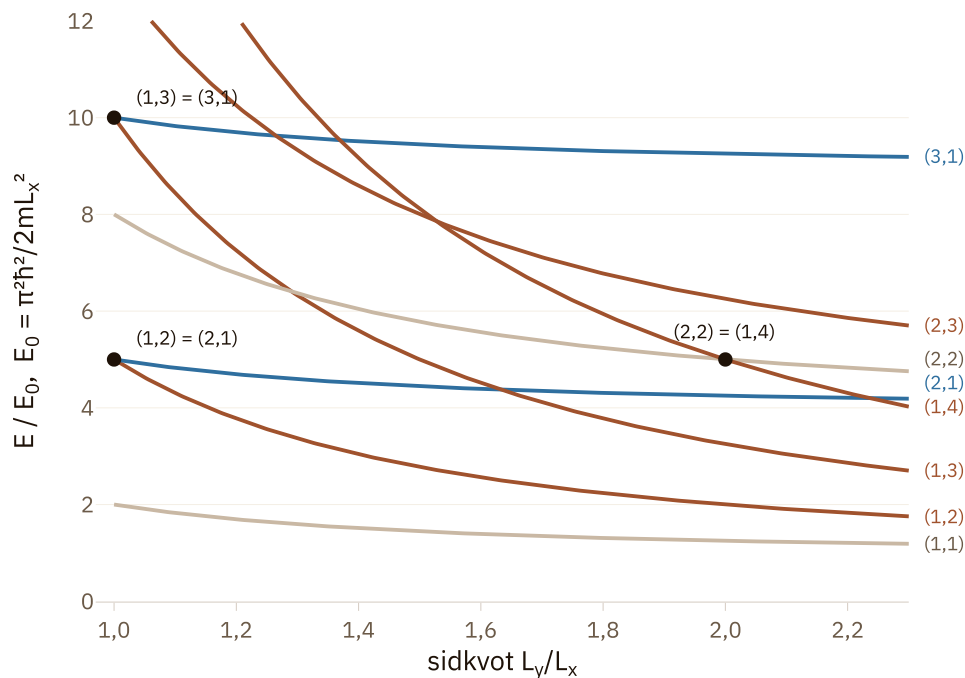
$n_x^2 + n_y^2$	tillstånd	degenerationsgrad
2	(1, 1)	1
5	(1, 2), (2, 1)	2
8	(2, 2)	1
10	(1, 3), (3, 1)	2
13	(2, 3), (3, 2)	2
17	(1, 4), (4, 1)	2

Tillstånden $(1, 2)$ och $(2, 1)$ är olika vågfunktioner med samma energi. En nivå med flera oberoende tillstånd kallas **degenererad**, och antalet tillstånd är nivåns **degenerationsgrad**. Här kommer degenerationen från symmetrin: att vrida kvadraten 90° byter x mot y och därmed (n_x, n_y) mot (n_y, n_x) .

Det finns också **tillfällig** degeneration, som inte följer av någon symmetri. Talet 50 kan skrivas både som $1^2 + 7^2$ och som $5^2 + 5^2$, så nivå $50E_0$ har de tre tillstånden $(1, 7)$, $(7, 1)$ och $(5, 5)$.

3. Rektangulär låda

Med $L_x \neq L_y$ är symmetrin borta, och $(1, 2)$ och $(2, 1)$ får olika energi: degenerationen **hävs**. Figuren visar hur nivåerna delar sig när lådan dras ut i y -led.



Energinivåerna i enheter av $E_0 = \pi^2 \hbar^2 / 2mL_x^2$ när L_y växer från L_x till $2,3L_x$. Vid kvadraten sammanfaller (1, 2) och (2, 1), och (1, 3) och (3, 1). Tillstånd med stort n_y sjunker snabbast. Vid $L_y = 2L_x$ korsas (2, 2) och (1, 4), och ger en ny, tillfällig degenerering.

Två följder:

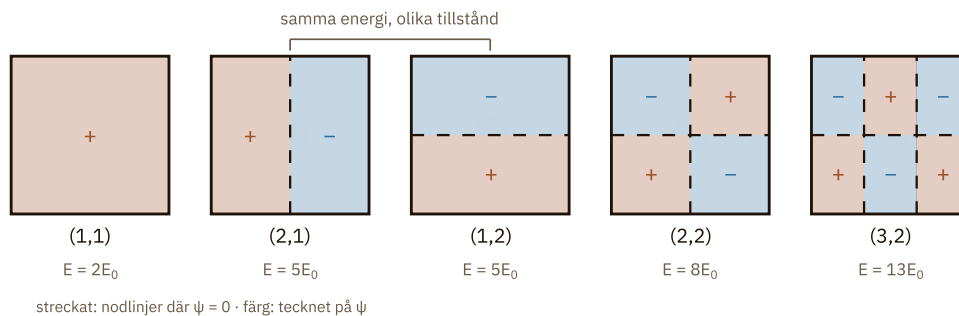
- **Ordningen måste räknas fram.** Det lägsta exciterade tillståndet är det med $n = 2$ längs den **längsta** sidan, eftersom n^2/L^2 ökar minst där. Nivåerna högre upp hamnar i en ordning som inte går att gissa.
- **Heltalskvoter ger nya sammanfall.** Om $L_y = 2L_x$ blir $E \propto 4n_x^2 + n_y^2$, och då ger till exempel (2, 2) och (1, 4) båda 20.

4. Sannolikhetstäthet och nodlinjer

Sannolikhetstätheten är en produkt av två endimensionella tätheter:

$$|\psi_{n_x, n_y}|^2 = \frac{4}{L_x L_y} \sin^2 \frac{n_x \pi x}{L_x} \sin^2 \frac{n_y \pi y}{L_y}$$

Där $|\psi|^2 = 0$ inne i lådan ligger **nodlinjer**, räta linjer parallella med sidorna. Tillståndet (n_x, n_y) har $n_x - 1$ lodräta och $n_y - 1$ vågräta nodlinjer, och delar därför lådan i $n_x n_y$ rutor med ψ av växlande tecken.



Tecknet på ψ i fem tillstånd i en kvadratisk låda. De streckade linjerna är nodlinjer: (n_x, n_y) har $n_x - 1$ lodräta och $n_y - 1$ vågräta, som delar lådan i $n_x n_y$ rutor. (2, 1) och (1, 2) har samma energi men är olika tillstånd.

- (1, 1): ingen nodlinje, en enda puckel mitt i lådan.
- (2, 1): en lodrät nodlinje vid $x = L_x/2$, två pucklar bredvid varandra.
- (1, 2): en vågrät nodlinje vid $y = L_y/2$, två pucklar ovanför varandra.

De två sista har samma energi i en kvadratisk låda men olika täthet. Degenererade tillstånd är alltså fysikaliskt olika tillstånd, inte samma tillstånd räknat två gånger. Samma sak i tre dimensioner, med tre kvanttal, ger den degeneration som bygger upp skalen i atomer.

⚠ Vanliga fel

- **Ett kvanttal sätts till noll.** Både n_x och n_y börjar på 1. Med $n_x = 0$ blir $\psi \equiv 0$. Grundnivån i en kvadratisk låda är därför $2E_0$, inte E_0 .
- **(1, 2) och (2, 1) räknas som ett tillstånd.** De är två olika vågfunktioner, och nivån har degenerationsgrad 2. Det spelar roll när elektroner fylls på enligt [Paulis uteslutningsprincip](#).
- **Nivåordningen gissas.** I en rektangulär låda ska kandidaterna räknas ut. Med $L_y = 2L_x$ ligger till exempel (1, 3) under (2, 1).
- **L_x och L_y byts.** n_x hör ihop med L_x . Ett byte ger fel energi så fort sidorna är olika.
- **Degenerationen tros försvinna helt i en rektangel.** Vid heltalskvoter som $L_y = 2L_x$ kan nivåer åter sammanfalla.

5. Lösta exempel

≡ Exempel — Elektron i kvadratisk låda

En elektron är instängd i en kvadratisk tvådimensionell låda med sidan 0,500 nm. Bestäm de fyra lägsta energinivåerna och deras degenerationsgrad (utan spinn). Bestäm också våglängden hos den foton som lyfter elektronen från grundtillståndet till den första exciterade nivån.

Lösning

Grundenheten.

$$E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e L^2} = \frac{\pi^2 (1,055 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot (0,500 \cdot 10^{-9})^2} = 2,41 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,504 \text{ eV}$$

Fysika: Te ($\hbar$, m_e)

Nivåerna. De minsta värdena på $n_x^2 + n_y^2$ är 2, 5, 8 och 10:

$$E_{1,1} = 2E_0 = \boxed{3,01 \text{ eV}} \quad (1 \text{ tillstånd})$$

$$E_{1,2} = E_{2,1} = 5E_0 = \boxed{7,52 \text{ eV}} \quad (2 \text{ tillstånd})$$

$$E_{2,2} = 8E_0 = \boxed{12,0 \text{ eV}} \quad (1 \text{ tillstånd})$$

$$E_{1,3} = E_{3,1} = 10E_0 = \boxed{15,0 \text{ eV}} \quad (2 \text{ tillstånd})$$

Fotonen. $\Delta E = 5E_0 - 2E_0 = 3E_0 = 4,51 \text{ eV}$:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{4,51 \text{ eV}} \approx \boxed{275 \text{ nm}}$$

Det är ultraviolett ljus.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

Exempel – Rektangulär låda med dold degeneration

En elektron sitter i en rektangulär låda med $L_x = 0,400$ nm och $L_y = 0,800$ nm. Bestäm de sex lägsta tillstånden och deras energier, och avgör om någon nivå är degenererad. Vilken våglängd har fotonen som sänds ut vid övergången från det första exciterade tillståndet till grundtillståndet?

Lösning

Skriv energin med en enhet. Med $L_y = 2L_x$:

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e L_x^2} (n_x^2 + \frac{n_y^2}{4}) = E_{0x} (n_x^2 + \frac{n_y^2}{4})$$

$$E_{0x} = \frac{\pi^2 (1,055 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot (0,400 \cdot 10^{-9})^2} \text{ J} = 2,350 \text{ eV}$$

Räkna kandidaterna. Värdet av $n_x^2 + n_y^2/4$:

(n_x, n_y)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(1, 4)
$n_x^2 + n_y^2/4$	1,25	2	3,25	4,25	5
E (eV)	2,94	4,70	7,64	9,99	11,8

Nästa kandidat är (2, 3) med 6,25, alltså högre.

Degeneration. (1, 4) och (2, 2) har båda $5E_{0x}$:

$$E_{1,4} = E_{2,2} = 11,8 \text{ eV}$$

Det är en tillfällig degeneration som beror på att sidkvoten är ett heltal. Övriga nivåer är icke-degenererade.

Fotonen. Första exciterade tillståndet är (1, 2), med $\Delta E = (2 - 1,25)E_{0x} = 1,763$ eV:

$$\lambda = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{1,763 \text{ eV}} \approx \boxed{703 \text{ nm}}$$

Det är rött ljus. Observera att $(2, 1)$ ligger först på femte plats.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 41.2 Particle in a Three-dimensional Box