Partiella derivator

Jun 12, 2026, 10 min read

#matematik #analys #flervariabelanalys #partiell-derivata

> **Kapitel:** 13.3 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Funktioner av flera variabler, Gränsvärden och kontinuitet

---

1. Partiell derivata

En partiell derivata beskriver hur snabbt en funktion av flera variabler förändras när **en variabel i taget** varieras, medan de övriga hålls konstanta.

1.1 Definition

För en funktion $f(x, y)$ definieras de partiella derivatorna i punkten (x_0, y_0) som:

$$f_1(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h,\, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$f_2(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0,\, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

1.2 Alternativ beteckning

Om $z = f(x, y)$ skrivs de partiella derivatorna ofta som:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, y) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f_2(x, y)$$

Symbolen ∂ (rund d) används för att skilja partiell derivering från vanlig derivering.

1.3 Beräkningsregel

> **Kom ihåg — hur man räknar**

- f_x: derivera m.a.p. x, behandla y **som en konstant** (frys den).
- f_y: derivera m.a.p. y, behandla x **som en konstant** (frys den).

Det är exakt envariabelderivering — fast med de övriga variablerna "frysta".

Exempel a) Polynom

Exempel b) Kvotregeln

Exempel c) Derivering och insättning

---

2. Tangentvektorer

I en punkt (a, b) på ytan $z = f(x, y)$ kan man bilda två tangentvektorer — en längs x-riktningen och en längs y-riktningen.

$$\vec{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_1(a,b) \end{bmatrix}, \qquad \vec{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_2(a,b) \end{bmatrix}$$

- $\vec{T}_1$ är tangent till kurvan som uppstår när $y = b$ hålls fast och x varierar.
- $\vec{T}_2$ är tangent till kurvan som uppstår när $x = a$ hålls fast och y varierar.

Dessa två vektorer spänner upp tangentplanet i punkten $(a, b, f(a, b))$.

---

3. Normalvektor

Normalvektorn till ytan i punkten $(a, b, f(a, b))$ fås via **kryssprodukten** av tangentvektorerna:

$$\vec{n} = \vec{T}_1 \times \vec{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_1(a,b) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_2(a,b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(a,b) \\ -f_2(a,b) \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.1 Normalvektor till en nivåyta

För en yta definierad implicit som $g(x, y, z) = C$ ges normalvektorn av **gradienten**:

$$\vec{n} = \nabla g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}$$

---

4. Tangentplan

4.1 Tangentplanets ekvation

Tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$ ges av:

$$\boxed{z - f(a, b) = f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)}$$

Ekvationen följer direkt av att planet ska innehålla punkten $(a, b, f(a, b))$ och ha normalvektorn $\vec{n} = [-f_1(a, b),\ -f_2(a, b),\ 1]^\top$.

Exempel — Tangentplan till en paraboloid

Läsning

- 13.3 Partial Derivatives

Se även

- Funktioner av flera variabler
- Gränsvärden och kontinuitet
- Nivåkurvor och ytor
- Gradient och riktningsderivata

Resurser

Videor

- 3Blue1Brown: Partial derivatives, visually — geometrisk tolkning av partiella derivator
- Khan Academy: Partial derivatives — introduktion med exempel

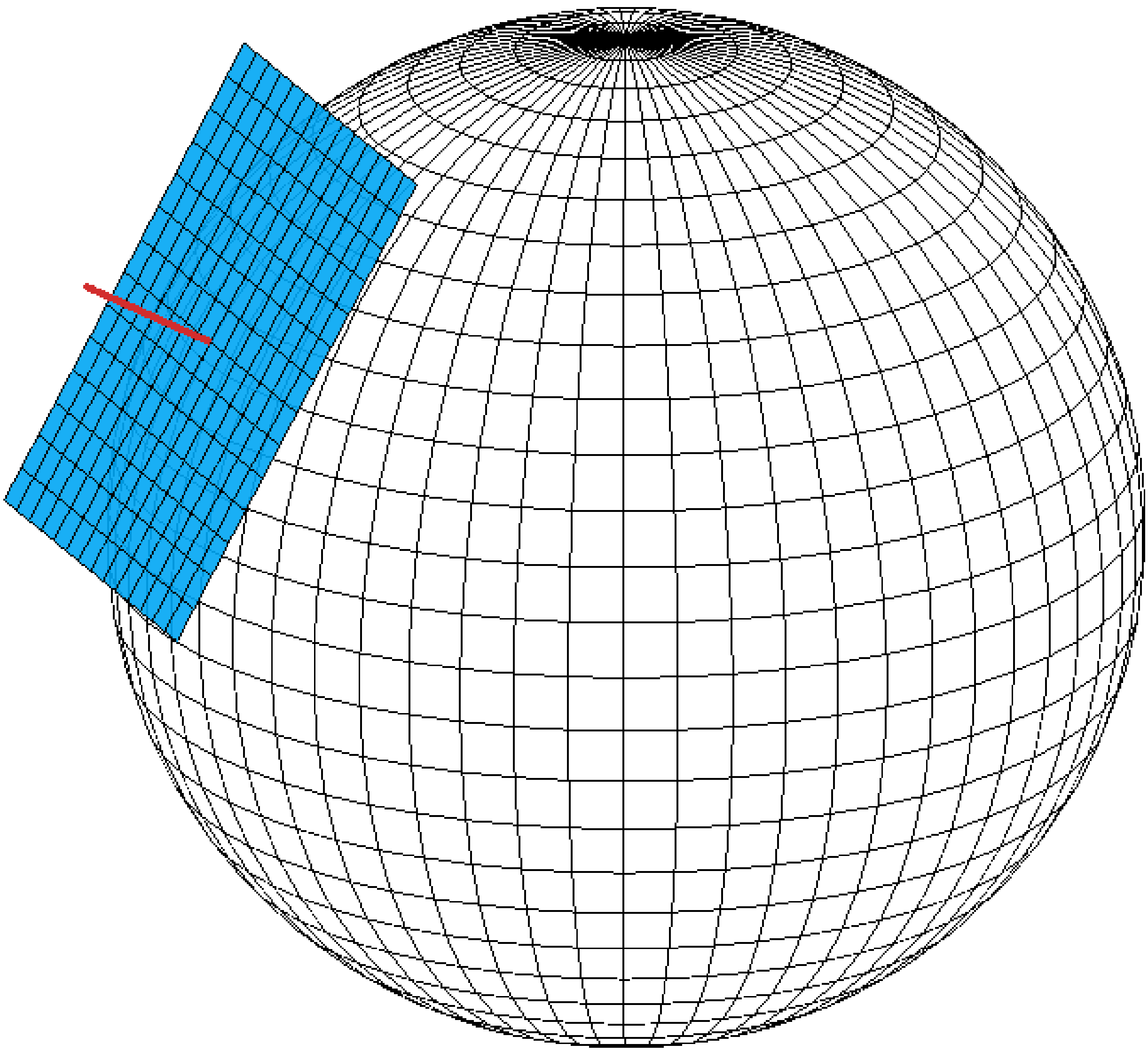
Interaktiva verktyg

- GeoGebra: Tangent Plane — visualisera tangentplan i 3D
- Wolfram Alpha — beräkna partiella derivator med `partial derivative of f(x,y) with respect to x`

Wikipedia

- Partial derivative
- Tangent plane
- Normal vector

Illustrationer



Tangentplan till en sfär

Räkneregler

> **Kapitel:** 13.3–13.5 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Partiella derivator, Kedjeregeln

---

1. Grundläggande regler

Principen: en variabel i taget

Alla vanliga derivationsregler från envariabelanalys gäller för partiella derivator — man deriverar med avseende på **en variabel** och behandlar alla **övriga variabler som konstanter**.

1.1 Linjäritet

Om f och g är deriverbara och α, β är konstanter:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}[\alpha f + \beta g] = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial g}{\partial x}}$$

1.2 Konstant faktor

$$\frac{\partial}{\partial x}[c \cdot f(x, y)] = c \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Obs — y är en konstant!

När du deriverar m.a.p. x är y konstant. Det innebär att t.ex. y^3, e^y och $\sin(y)$ alla är konstanta faktorer och deriveras som noll om de saknar x.

---

2. Produktregeln

Sats

Om $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$ är partiellt deriverbara gäller:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}[u \cdot v] = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}$$

och analogt för derivering m.a.p. y.

Schema — kom ihåg

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Exakt samma form som i envariabelanalys — håll bara koll på vilken variabel du deriverar m.a.p.

Exempel a) Enkel produkt

Exempel b) Produkt av funktioner i båda variablerna

Exempel c) Tre faktorer

---

3. Kvotregeln

Sats

Om $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$ är partiellt deriverbara och $v \neq 0$:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot v - u \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}}{v^2}}$$

Minnesbild

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Alternativ — skriv om som produkt

Ofta enklare att skriva $\dfrac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$ och använda produktregeln tillsammans med kedjeregeln: $\frac{\partial}{\partial x}\left[u \cdot v^{-1}\right] = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v^{-1} + u \cdot (-1)v^{-2}\frac{\partial v}{\partial x}$

Exempel a) Grundfall

Exempel b) Blandad kvot

4. Kedjeregeln – snabbreferens

Fullständig genomgång

Se Kedjeregeln för detaljer, variabelträd och variabelbyten.

Fall 1 – ett oberoende variabel

$z = f(x, y), x = x(t), y = y(t)$:

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

Fall 2 – två oberoende variabler

$z = f(x, y), x = x(s, t), y = y(s, t)$:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}}$$

Kedjeregeln för sammansatt funktion

Om $h(x, y) = f(g(x, y))$ – alltså f av en skalär:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x} = f'(g(x, y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}$$

Exempel – kedjeregel på skalär funktion

5. Implicit derivering

Om $F(x, y, z) = 0$ definierar z implicit som funktion av x och y:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}}$$

Förutsättning

Formeln kräver att $F_z \neq 0$ i punkten. Om $F_z = 0$ kan man inte lösa ut z lokalt.

Exempel — implicit derivering >

---

6. Snabbtabell – räkneregler

Regel	Formel
Summa	$\partial_x(f+g) = f_x + g_x$
Konstant	$\partial_x(c) = 0$
Konstant faktor	$\partial_x(cf) = cf_x$
Produkt	$\partial_x(fg) = f_x g + f g_x$
Kvot	$\partial_x(f/g) = (f_x g - f g_x)/g^2$
Kedja (skalär)	$\partial_x f(g) = f'(g)\, g_x$
Kedja (vektor)	$\partial_t f(x(t), y(t)) = f_x \dot{x} + f_y \dot{y}$
Implicit	$\partial_x z = -F_x/F_z$
Potens	$\partial_x(x^n) = nx^{n-1}$

---

7. Tips och vanliga misstag

Tips 1 — se alltid vilken variabel du deriverar m.a.p.

Skriv ut $\frac{\partial}{\partial x}$ eller $\frac{\partial}{\partial y}$ tydligt i varje steg. Det är lätt att missa att byta derivatavariabel mitt i en beräkning.

Tips 2 — faktorisera gärna ut konstanter

Om $f(x,y) = e^y \cdot g(x)$, så är $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \cdot g'(x)$ direkt — ingen produktregel behövs.

Tips 3 — skriv om kvoten som produkt vid komplexa uttryck

$\frac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$ och tillämpa produktregel + kedjeregel. Minskar risken för teckenmissar.

Tips 4 — kontrollera med mixed partials

För tillräckligt snälla funktioner gäller **Clairauts sats**: $f_{xy} = f_{yx}$. Stämmer inte det, har du räknat fel.

Vanligt misstag 1 — glömmer kedjeregeln

$\frac{\partial}{\partial x} \sin(xy) = \cos(xy)$ är **fel**.

Korrekt: $\frac{\partial}{\partial x} \sin(xy) = y \cos(xy)$ — inre derivatan y måste multipliceras in.

Vanligt misstag 2 — deriverar y m.a.p. x

$\frac{\partial}{\partial x}(y^3) = 3y^2$ är **fel** (y är konstant!).

Korrekt: $\frac{\partial}{\partial x}(y^3) = 0.$

⚠ **Vanligt misstag 3 — blandar d och ∂**

Använd ∂ för partiella derivator (flera variabler) och d för vanliga derivator (en variabel eller total derivata). Fel symbol signalerar fel tänk.

Träningsuppgift — identifiera räknereglerna ›

Se även

- Partiella derivator
- Kedjeregeln
- Högre ordningens derivator
- Gradient och riktningsderivata

Resurser

Videor

- Khan Academy: Partial derivative rules — regler och exempel
- Professor Leonard: Partial Derivatives — produkt- och kvotregel i flervariabelfall
- 3Blue1Brown: Implicit differentiation — intuition för implicit derivering

Interaktiva verktyg

- Wolfram Alpha — `partial derivative of f(x,y) with respect to x` för symbolisk beräkning
- Desmos 3D — visualisera funktioner och deras derivator

Wikipedia

- Partial derivative — Wikipedia
- Product rule — Wikipedia
- Implicit function theorem — Wikipedia

Fördjupning

- Adams & Essex, *Calculus: A Complete Course*, avsnitt 13.3–13.5

Föreläsningsanteckningar

> Från föreläsning: 2026-03-25, M0068M

2026-03-25 – Föreläsning 3 (Partiella derivator, tangentplan)

Definition

$f_1(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$

$f_2(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$

Alternativ beteckning om $z = f(x, y)$: $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_2(x, y)$

Beräkningsexempel

a) $f(x, y) = x^2 + 5x^3y^2$: $f_1 = 2x + 15x^2y^2, \quad f_2 = 10x^3y$

b) $z = \frac{x}{x^2+e^{xy}}$: $f_1 = \frac{-x^2+e^{xy}-xye^{xy}}{(x^2+e^{xy})^2}, \quad f_2 = -\frac{x^2e^{xy}}{(x^2+e^{xy})^2}$

c) $z = e^{2x}\cos(xy)$: derivering och insättning $(x, y) = (1, 0)$: $f_1(1, 0) = 2e^2, \quad f_2(1, 0) = 0$

Tangentvektorer och tangentplan

Tangentvektorer i (a, b): $\vec{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_1(a, b) \end{bmatrix}, \quad \vec{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_2(a, b) \end{bmatrix}$

Normalvektor: $\vec{T_1} \times \vec{T_2} = \begin{bmatrix} -f_1(a,b) \\ -f_2(a,b) \\ 1 \end{bmatrix}$

Tangentplanets ekvation**:** $z - f(a,b) = f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$

Exempel: $f(x,y) = 2x^2 + y^2$, tangentplan i $(1,2)$:

- Punkt: $(1,2,6)$; $f_1(1,2) = 4$; $f_2(1,2) = 4$
- Tangentplan: $z - 6 = 4(x-1) + 4(y-2)$
