

Parproduktion

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #kvantfysik #fenomen

Kurs: F0005T Förkunskaper: Fotonen, Relativitetsteori

En gammafoton som träffar ett material kan antingen spridas eller omvandlas till ett elektron-positronpar. Processen går inte att beskriva med vågmodellen för ljus över huvud taget. Den kräver en tröskelenergi motsvarande de två partiklarnas viloenenergi, vilket svarar mot en maximal våglängd $\lambda_{\max} = hc/E_{\min} = 1,213 \text{ pm}$. Den omvända processen, **Annihilation**, är grunden för PET.

$$E_{\min} = 2mc^2 = \frac{hc}{\lambda_{\max}} = 1,022 \text{ MeV}$$

Fysika: Fd1 (viloenergi), Fd3 (fotonenergi), Te (m_e)

Trick i beräkningar med fysika

m_e ges i tre enheter.

- kg
- u
- $\frac{MeV}{c^2}$

Så om man ska räkna ut $2mc^2$ så kan man räkna flytta över c^2 så får man $m_e c^2 = 0,510998950 MeV \Rightarrow 2m_e c^2 \approx 1,022 MeV$

Formeln, symbol för symbol

$$\underbrace{E_{\min}}_{\text{minsta foton-energin}} = 2 \underbrace{m_e c^2}_{\text{en partikels viloenenergi}} = \frac{hc}{\underbrace{\lambda_{\max}}_{\text{längsta våglängden}}}$$

$$\underbrace{E_\gamma}_{\text{fotonens energi}} = \underbrace{2m_e c^2}_{\text{skapar paret}} + \underbrace{K_- + K_+}_{\text{parets rörelseenergi}}$$

Fotonen måste minst bära viloenenergi för *två* partiklar, elektronen och positronen. Allt över tröskeln blir rörelseenergi, och eftersom hela energin sitter i en enda foton svarar tröskeln mot en största våglängd.

1. Varför bara fotonbilden fungerar

Tre krav måste uppfyllas samtidigt när en foton omvandlas till ett elektron-positronpar:

- **Laddning.** Fotonen är oladdad, så partiklarna måste komma i par med laddningarna $-e$ och $+e$.
- **Energi.** Fotonen måste minst bära parets viloenenergi $2m_e c^2$, vilket är gränsen i rutan ovan.
- **Rörelsemängd.** Fotonens rörelsemängd $p = E/c$ måste tas upp av något.

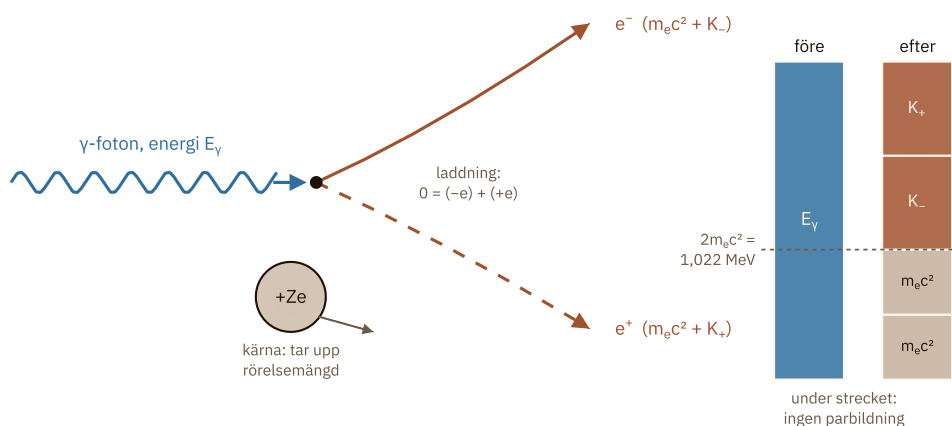
Vågmodellen har ingen mekanism för att en våg plötsligt ska försvinna och ersättas av två massiva partiklar, och ingen förklaring till varför det bara sker under en viss våglängd. I fotonbilden är det ren energibokföring: en enskild **foton** med $E = hc/\lambda$ räcker, eller räcker inte.

2. Varför det behövs en kärna i närheten

En ensam foton i vakuum kan inte bilda ett par, hur energirik den än är, eftersom energi och rörelsemängd då inte kan bevaras samtidigt. Kombinationen $E^2 - (pc)^2$ har samma värde i alla inertialsystem (se [Relativitetsteori](#)):

- för fotonen är $E^2 - (pc)^2 = 0$,
- för paret är $E^2 - (pc)^2 \geq (2m_e c^2)^2$, med likhet när båda partiklarna står stilla i sitt gemensamma tyngdpunktssystem.

Värdena kan aldrig vara lika, så processen är omöjlig. En atomkärna i närheten kan ta upp rörelsemängd, och då går det. Kärnan får samtidigt lite rörelseenergi, så tröskeln blir något högre än $2m_e c^2$.



En gammafoton omvandlas till ett elektron-positronpar i kärnans fält. Kärnan tar upp rörelsemängd men nästan ingen energi. Till höger energibokföringen: $2m_e c^2$ går åt till att skapa paret, och resten blir parets rörelseenergi.

Härledning av tröskeln när en kärna med massan M rekylar

Före. Fotonen har energin E och rörelsemängden E/c , och kärnan står still:

$$E_{\text{tot}} = E + Mc^2$$

$$p_{\text{tot}}c = E$$

Invarianten före stöten.

$$E_{\text{tot}}^2 - (p_{\text{tot}}c)^2 = (E + Mc^2)^2 - E^2 = 2EMc^2 + M^2c^4$$

Vid tröskeln. Kärnan, elektronen och positronen står alla still i tyngdpunktssystemet, så invarianten är kvadraten på den totala viloenenergin:

$$2EMc^2 + M^2c^4 = (M + 2m_e)^2c^4$$

$$2EMc^2 = 4Mm_e c^4 + 4m_e^2 c^4$$

$$E_{\text{th}} = 2m_e c^2 \left(1 + \frac{m_e}{M}\right)$$

Resultatet är

$$E_{\text{th}} = 2m_e c^2 \left(1 + \frac{m_e}{M}\right)$$

För en tung kärna är m_e/M av storleksordningen 10^{-6} och tillägget försumbart, så 1,022 MeV gäller i praktiken. Sker processen vid en elektron, $M = m_e$, blir tröskeln dubbelt så hög – se det andra exemplet.

3. Hur energin fördelas

Över tröskeln går överskottet till partiklarnas rörelseenergi. Med kärnans rekyl försummad ger energins bevarande

$$E_\gamma = (m_e c^2 + K_-) + (m_e c^2 + K_+)$$

$$K_- + K_+ = E_\gamma - 2m_e c^2$$

Hur summan delas mellan elektron och positron bestäms inte av bevarandelagarna, eftersom kärnan tar upp en okänd del av rörelsemängden. Rörelseenergin blir ofta jämförbar med $m_e c^2$, så farten måste räknas relativistiskt med $K = (\gamma - 1)m_e c^2$.

4. Den omvända processen: annihilation

När en positron möter en elektron försvinner båda och ersätts av fotoner, oftast två. En enda foton är omöjlig av samma skäl som i avsnitt 2, nu baklänges: i parets tyngdpunktssystem är rörelsemängden noll, men en ensam foton har aldrig rörelsemängden noll.

Är partiklarna nästan i vila är den totala rörelsemängden noll. De två fotonerna går då åt motsatta håll med lika stora energier:

$$2m_e c^2 = 2E_\gamma$$

$$E_\gamma = m_e c^2 = 511 \text{ keV}$$

Det är principen bakom PET. En positronsändande isotop i kroppen ger fotonpar på 511 keV som sänds ut rygg mot rygg, och två detektorer som slår till samtidigt anger en linje genom kroppen där annihilationen skedde.

Vanliga fel

- **Glömd faktor 2.** Tröskeln är $2m_e c^2 = 1,022 \text{ MeV}$ eftersom två partiklar ska skapas. $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$ är energin per foton vid annihilation i vila.
- **Minsta och största våglängd byts.** Tröskeln är en *minsta* energi och alltså en *största* våglängd, $\lambda_{\text{max}} = 1,213 \text{ pm}$. Kortare våglängd fungerar, längre gör det inte.
- **Klassisk rörelseenergi.** Partiklarna får ofta K av samma storlek som $m_e c^2$, och $v = \sqrt{2K/m_e}$ ger då en fart större än c . Använd $K = (\gamma - 1)m_e c^2$.
- **Parproduktion i tomma rummen.** Utan en kärna eller en annan partikel som tar upp rörelsemängd kan processen inte ske.
- **En foton vid annihilation.** Ett par i vila ger minst två fotoner, vars rörelsemängder tar ut varandra.

5. Lösta exempel

≡ Exempel – Paret från en 2,50 MeV-foton

En gammafoton med energin 2,50 MeV bildar ett elektron-positronpar nära en blykärna. Kärnans rekyl kan försummas, och elektronen och positronen får lika stor rörelseenergi. Bestäm fotonens våglängd, varje partikels rörelseenergi och partiklarnas fart.

Lösning

Våglängden. Med $hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{2,50 \cdot 10^6 \text{ eV}} = 4,96 \cdot 10^{-4} \text{ nm} = \boxed{0,496 \text{ pm}}$$

Den är kortare än $\lambda_{\text{max}} = 1,213 \text{ pm}$, så parproduktion är möjlig.

Rörelseenergin. Överskottet delas lika:

$$K = \frac{E_\gamma - 2m_e c^2}{2} = \frac{2,50 - 1,022}{2} \text{ MeV} = \boxed{0,739 \text{ MeV}}$$

Farten. K är större än $m_e c^2$, så vi räknar relativistiskt:

$$\gamma = 1 + \frac{K}{m_e c^2} = 1 + \frac{0,739}{0,511} = 2,45$$

Fysika: Fd1 (i formen $K = mc^2(\gamma - 1)$)

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2,45^2}} \approx \boxed{0,913}$$

Rimlighetskontroll. Den klassiska formeln hade gett $v = \sqrt{2K/m_e} \approx 1,70 c$, vilket är omöjligt.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

☰ Exempel – Tröskeln vid en blykärna och vid en elektron

Bestäm tröskelenergin för parproduktion (a) i närheten av en blykärna med massan 208 u och (b) vid en fri elektron i vila. Hur mycket skiljer sig (a) från $2m_e c^2$? Elektronens massa är $5,486 \cdot 10^{-4}$ u.

Lösning

a) Kvoten mellan massorna är

$$\frac{m_e}{M} = \frac{5,486 \cdot 10^{-4}}{208} = 2,64 \cdot 10^{-6}$$

så tillägget är

$$2m_e c^2 \cdot \frac{m_e}{M} = 1,022 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 2,64 \cdot 10^{-6} \approx \boxed{2,70 \text{ eV}}$$

Tröskeln är fortfarande $E_{\text{th}} = \boxed{1,022 \text{ MeV}}$ på fyra värdesiffror.

b) Med $M = m_e$ blir parenteserna 2:

$$E_{\text{th}} = 2m_e c^2 (1 + 1) = 4m_e c^2 = 4 \cdot 0,511 \text{ MeV} = \boxed{2,04 \text{ MeV}}$$

Den lätta elektronen rekylerar kraftigt och tar med sig en stor del av fotonens energi, så tröskeln fördubblas. Efteråt finns tre partiklar i rörelse: den ursprungliga elektronen och det nya paret.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 38.3 Light Scattered as Photons: Compton Scattering and Pair Production