

Parametriserade ytor

Jun 12, 2026, 4 min read

#matematik

#flervariabelanalys

#yta

Kurs: M0068M Förkunskaper: Parametriserade kurvor, Partiella derivator, Kryssprodukt

1. Från kurvor till ytor

En parametriserad kurva beskriver en endimensionell väg i rummet via en parameter t . Att parametrisera en yta är samma idé, men man behöver två parametrar – en längs varje "riktning" på ytan. Resultatet är en avbildning

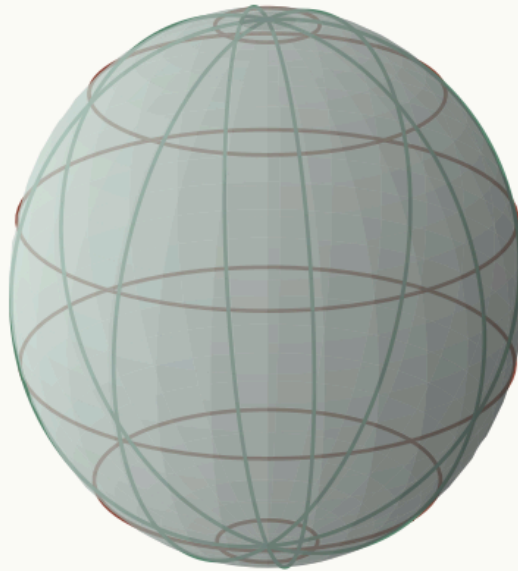
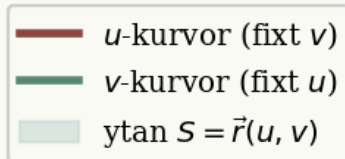
$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

som rullar ut det plana området D till en yta S i \mathbb{R}^3 .

Grundtanken

Tänk på (u, v) som "koordinater på ytan". När u varierar med v fastnat ritas du en kurva som löper i en riktning över ytan, och tvärtom när v varierar. Ytan är hela bunten av sådana kurvor.

Parametrisering av sfär — koordinatkurvor



I bilden ser man en sfär parametriserad med polvinkel och azimut — meridianerna är v -kurvor (varierar u) och parallellerna är u -kurvor (varierar v).

2. Standardexempel

2.1 Graf av en funktion

Om ytan är grafen $z = f(x, y)$ är parametriseringen självskriven:

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}.$$

2.2 Sfär av radie R

$$\vec{r}(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} R \sin \phi \cos \theta \\ R \sin \phi \sin \theta \\ R \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi).$$

Här är ϕ polvinkel och θ azimut – samma struktur som **sfäriska koordinater**.

2.3 Cylinder av radie R

$$\vec{r}(\theta, z) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ z \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi), z \in [a, b].$$

2.4 Rotationsyta

Om en kurva $z = g(r)$, $r \in [r_0, r_1]$ roteras kring z -axeln blir ytan

$$\vec{r}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ g(r) \end{pmatrix}.$$

Paraboloiden $z = x^2 + y^2$ är detta med $g(r) = r^2$.

3. Tangentvektorer och normal

I varje punkt på ytan har man två naturliga tangentvektorer – en längs varje parameterriktning:

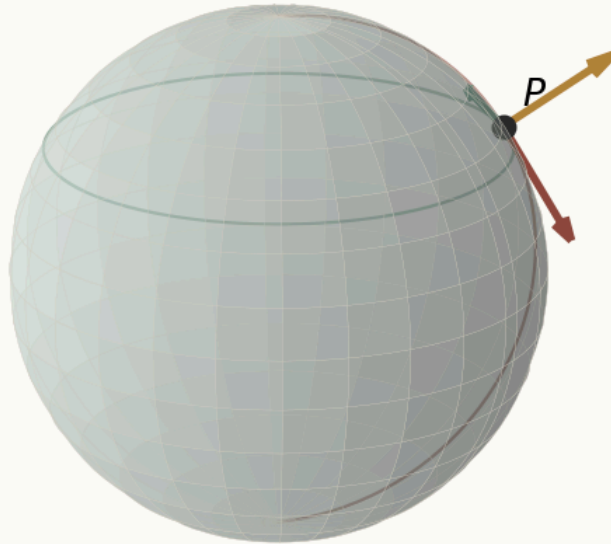
$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.$$

De spänner upp **tangentplanet** till ytan i punkten. Deras **kryssprodukt** ger en normalvektor:

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

Tangentvektorer och normal vid P

- \vec{r}_u — tangent längs u -kurvan
- \vec{r}_v — tangent längs v -kurvan
- normal $\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$
- $P = \vec{r}(u_0, v_0)$



🔗 Kryssproduktens längd är arean

$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$ är arean av den lilla parallelogram som de två tangentvektorerna spänner upp. Det är detta som blir **arealelementet** dS när man integrerar över ytan — se [Ytintegraler](#).

⚠️ Singulära punkter

Om $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{0}$ någonstans är parametriseringen *degenererad* där. Det händer t.ex. vid sfärens poler. Det är inget allvarligt om det bara sker på en mängd med area noll — integraler bryr sig inte om sådana punkter — men man bör vara medveten om det när man räknar.

4. Arealelementet

Den lokala "areavikten" som följer med en parametrisering är

$$dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

Specialfall – graf $z = f(x, y)$

Med $\vec{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ blir

$$\vec{r}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix},$$

och en direkt räkning ger

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}.$$

Alltså

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy \quad (\text{graf-fallet})$$

Det är värt att lägga på minnet – det dyker upp i alla ytintegraler över en graf.

Specialfall – sfär av radie R

För sfärparametriseringen i §2.2:

$$\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = R^2 \sin \phi \hat{r}, \quad dS = R^2 \sin \phi d\phi d\theta.$$

Det stämmer med **sfäriska koordinaters** vinkeldel.

5. Orientering

Valet av parametrisering bestämmer också ytans **orientering** – riktningen på normalvektorn. Om man byter parameterordningen från (u, v) till (v, u) vänder normalvektorn (eftersom $\vec{r}_v \times \vec{r}_u = -\vec{r}_u \times \vec{r}_v$).

Detta är viktigt för [flödesintegraler](#) och för [Stokes sats](#); se [Orientering \(kurvor och ytor\)](#) för detaljer.

6. Räknetod

Hur du jobbar med en parametriserad yta

1. **Skriv ner** $\vec{r}(u, v)$ och (u, v) -området D .
2. **Räkna** \vec{r}_u och \vec{r}_v komponentvis.
3. **Räkna kryssprodukten** $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$.
4. **Ta längden** för dS , eller behåll vektorn för flödesintegraler.
5. **Sätt upp dubbelintegralen** över D med rätt arealvikt.

 [Exempel – area av en paraboloid-cap](#) >

 [Exempel – area av en sfär \(sanity check\)](#) >



Läsning

- [16.5 Surfaces and Surface Integrals](#)

Se även

- [Parametriserade kurvor](#)
- [Ytintegraler](#)
- [Flödesintegraler](#)
- [Orientering \(kurvor och ytor\)](#)
- [Kryssprodukt](#)

Resurser

- [Khan Academy: Surfaces and parametrizations](#) 
- [3Blue1Brown: Manifolds and parametrizations](#)  – generell intuition.

- [Wikipedia: Parametric surface](#) 
-