Parametriserade kurvor

Jun 12, 2026, 3 min read

#matematik #analys #flervariabelanalys #parametriserad-kurva #vektorvärd-funktion

> **Kapitel:** AE 8.2, 12.1, 12.3 · **Kurs:** M0068M **Förkunskaper:** Funktioner av flera variabler

---

1. Parametriserade kurvor – översikt

En **parametriserad kurva** beskriver en kurva i planet eller rummet genom att uttrycka koordinaterna som funktioner av en gemensam **parameter** t.

> **Två sätt att beskriva kurvor**
>
> - **Nivåkurva:** $f(x, y) = c$ – implicit ekvation, till exempel $x^2 + y^2 = 1$.
> - **Parametrisering:** $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ – en explicit beskrivning av hur man rör sig längs kurvan.
>
> Båda beskrivningarna kan representera samma geometriska objekt.

Definition

En parametriserad kurva i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ ges av en **vektorvärd funktion**:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

i planet, och

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

i rummet.

2. Vanliga exempel

2.1 Cirkel i $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Denna parametrisering ritar enhetscirkeln **moturs** med start i punkten $(1, 0)$.

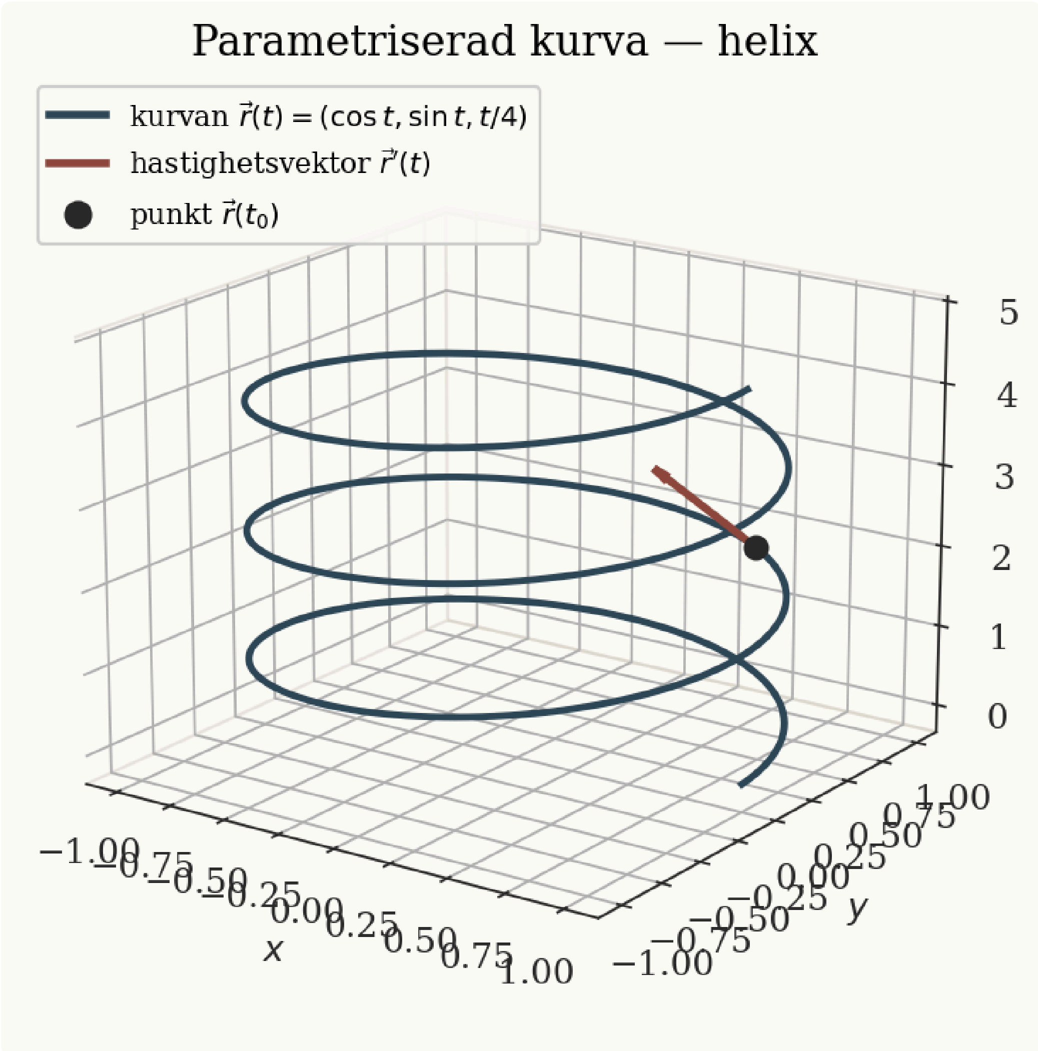
2.2 Ellips i $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

2.3 Helix i $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

En helix är en skruvlinje som rör sig uppåt längs z-axeln samtidigt som den cirklar i xy -planet.



Rita en helix >

2.4 Rät linje

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v} = (p_1 + tv_1,\ p_2 + tv_2,\ p_3 + tv_3)$$

---

3. Derivata av vektorvärda funktioner

Derivatan definieras komponentvis:

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

3.1 Hastighetsvektor

Om t tolkas som tid är $\mathbf{r}'(t)$ **hastighetsvektorn**:

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)}$$

3.2 Fart

Farten är hastighetsvektorns längd:

$$\boxed{|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}}$$

3.3 Accelerationsvektor

Accelerationen är andraderivatan:

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)}$$

Hastighet och acceleration för cirkelrörelse >

---

4. Båglängd

Båglängden längs kurvan $\mathbf{r}(t)$ för $t \in [a, b]$ ges av

$$\boxed{L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt}$$

I koordinatform blir detta

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.$$

Båglängd för en helix >

---

5. Derivataregler

Låt $\mathbf{u}(t)$ och $\mathbf{v}(t)$ vara vektorvärda funktioner och $f(t)$ en skalärvärd funktion.

Regel	Formel
Summa	$(\mathbf{u}+\mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$
Skalärmultiplikation	$(f\mathbf{u})' = f'\mathbf{u} + f\mathbf{u}'$
Punktprodukt	$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})' = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'$
Kryssprodukt	$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})' = \mathbf{u}'\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\mathbf{v}'$
Kedjeregel	$(\mathbf{u}(f(t)))' = f'(t)\,\mathbf{u}'(f(t))$

⚠ **Ordningen spelar roll i kryssprodukten**

$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -(\mathbf{v}\times\mathbf{u})$. Produktregeln gäller fortfarande, men ett ordningsbyte ändrar tecknet.

---

6. Projektilrörelse

Med enbart tyngdkraft ($g \approx 9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$) kan en projektil i planet beskrivas av

$$\mathbf{a}(t) = (0, -g).$$

Efter integrering fås

$$\mathbf{v}(t) = (v_{0x}, v_{0y} - gt)$$

och

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + v_{0x}t,\ y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2).$$

☰ **Räckvidd** ›

Läsning

- 8.2 Parametric Curves
- 8.3 Smooth Parametric Curves

Se även

- Funktioner av flera variabler
- Nivåkurvor och ytor
- Kryssprodukt
