

Packningstäthet

19 okt. 2026, 5 min läsning

UTKAST

#fysik #fasta-tillståndets-fysik #storhet

Kurs: F0005T Förkunskaper: Kristallgitter

Packningstätheten är kvoten mellan atomernas volym och enhetscellens volym. Den beräknas genom att räkna hur många atomer som faktiskt tillhör cellen – en hörnatom delas av åtta celler, en sidatom av två – och sedan koppla atomradien r till gitterkonstanten a genom inspektion av geometrin. Simple cubic ger $a = 2r$ och tätheten 0,52, bcc ger $a = 4r/\sqrt{3}$ och 0,68, fcc ger $a = \sqrt{8}r$ och 0,74. Hcp har samma täthet som fcc.

$$\text{Packningstäthet} = \frac{N \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}$$

Översikt över alla strukturer: [Kristallstrukturer](#).

Formeln, symbol för symbol

$$\text{Packningstäthet} = \frac{\overbrace{N}^{\text{atomer/cell}} \cdot \overbrace{\frac{4}{3}\pi r^3}^{\text{volym/atom}}}{\underbrace{a^3}_{\text{cellens volym}}}$$

Kvoten är den andel av cellen som atomerna fyller. a skrivs om i r via riktningen där atomerna rör vid varandra, och då förkortas r bort.

1. Receptet

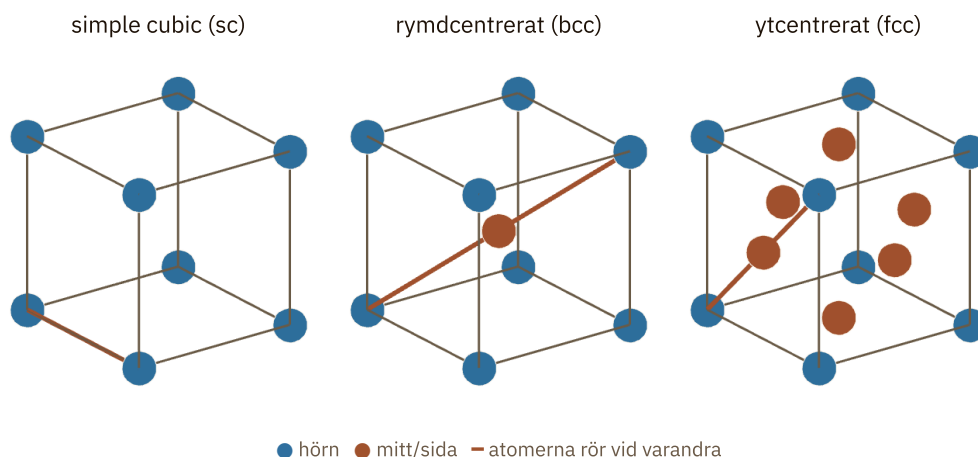
Varje beräkning följer samma tre steg, och alla tre finns i formeln i rutan:

1. **Räkna N** , antalet atomer som hör till cellen (hörn $\frac{1}{8}$, sida $\frac{1}{2}$, inuti 1), se [Kristallgitter](#).

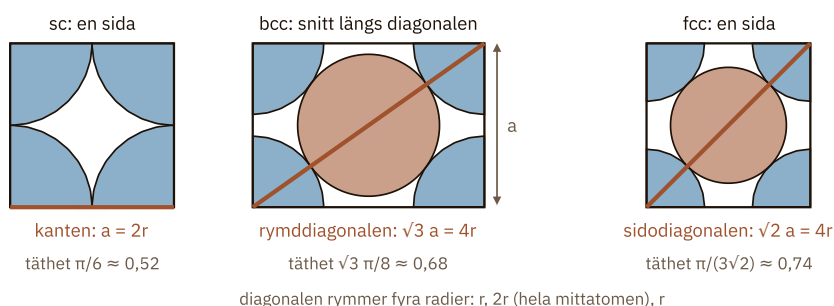
2. Hitta riktningen där atomerna rör vid varandra, och skriv längden av den riktningen på två sätt: i a och i r .

3. Sätt in a uttryckt i r i formeln. Radien förkortas bort, så tätheten beror bara på geometrin.

Att r förkortas bort betyder att packningstätheten är densamma för alla ämnen med samma struktur, oavsett hur stora atomerna är.



De tre kubiska enhetscellerna (vrid med musen). Den orange linjen är steg 2 i receptet: riktningen där atomerna rör vid varandra, längs kanten i sc, rymddiagonalen i bcc och sidodiagonalen i fcc.



Snitten där atomerna rör vid varandra: en sida i sc, planet genom rymddiagonalen i bcc och en sida i fcc. Den orange linjen är $2r$ i sc och $4r$ i bcc och fcc, och det ger sambandet mellan a och r .

2. Simple cubic

Atomerna rör vid varandra längs kanten.

Härledning av packningstätheten för sc

Åtta hörnatomer ger $N = 1$. Längs kanten ligger två halva atomer:

$$a = 2r$$

$$\frac{N \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{8r^3}$$

$$= \frac{\pi}{6} \approx 0,524$$

Nästan hälften av volymen är tom, och det är därför så nästan aldrig förekommer i naturen.

3. Rymdcentrerat, bcc

Hörnatomena rör inte vid varandra längs kanten. I stället rör de vid atomerna i mitten, längs rymddiagonalen.

Härledning av packningstätheten för bcc

$N = 8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2$. Rymddiagonalen har längden $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$ och rymmer en halv hörnatom, hela mittatomen och en halv hörnatom till, alltså fyra radier:

$$\sqrt{3}a = 4r$$

$$a = \frac{4r}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\left(\frac{4r}{\sqrt{3}}\right)^3} = \frac{\frac{8}{3}\pi r^3 \cdot 3\sqrt{3}}{64r^3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{8} \approx 0,680$$

4. Ytcentrerat, fcc

Atomerna rör vid varandra längs sidodiagonalen: hörn, sidans mitt, hörn.

 Härledning av packningstätheten för fcc

$N = 8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4$. Sidodiagonalen har längden $\sqrt{2}a$ och rymmer fyra radier:

$$\sqrt{2}a = 4r$$

$$a = \frac{4r}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}r = \sqrt{8}r$$

$$\frac{4 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{(2\sqrt{2}r)^3} = \frac{\frac{16}{3}\pi r^3}{16\sqrt{2}r^3}$$

$$= \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,740$$

5. Varför metaller väljer fcc och hcp

Lägger vi lika stora kuler i ett plant lager blir det tätast om varje kula har sex grannar i lagret. Nästa lager lägger sig i gropar i det första. För det tredje lagret finns två val: rakt över det första (ABAB..., **hcp**) eller i de gropar som inte används (ABCABC..., **fcc**). Båda ger tolv grannar och tätheten 0,740, den största möjliga för lika stora kuler.

Metallbindningen är inte riktad (se **Metallisk bindning**). Jonerna vill bara ha så många grannar som möjligt, och därför är de flesta metaller fcc, hcp eller bcc. Kovalenta kristaller gör tvärtom. I diamantstrukturen har varje atom bara fyra grannar, eftersom bindingarna pekar mot hörnen av en tetraeder. Med $N = 8$ och närmaste avståndet $\sqrt{3}a/4 = 2r$ blir

$$\frac{8 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{32\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^3$$

diamant: $\frac{\sqrt{3}\pi}{16} \approx 0,340$

Två tredjedelar av en diamant är alltså tom, men den är ändå det hårdaste naturliga materialet. Packningstätheten säger ingenting om bindingarnas styrka.

⚠ Vanliga fel

- **Fel diagonal.** I bcc rör atomerna vid varandra längs *rymddiagonalen* $\sqrt{3}a$, i fcc längs *sidodiagonalen* $\sqrt{2}a$. Byter vi dem blir a fel och tätheten orimlig, ibland större än 1.
- **Diametern i stället för radien.** Diagonalen rymmer fyra *radier*. Den som skriver $\sqrt{3}a = 4d$ får en atom som är dubbelt så stor som cellen tillåter.
- **Fel N .** Hörnatomerna räknas som $\frac{1}{8}$ var, och bcc har $N = 2$, fcc $N = 4$.
- **Tätheten jämförs med densiteten.** Packningstätheten är ett rent tal utan enhet. Två metaller med samma struktur har samma packningstäthet men olika densitet.

6. Lösta exempel

☰ Exempel – Atomradien i järn

Järn har bcc-struktur vid rumstemperatur, med $a = 0,2866$ nm och molmassan 55,85 g/mol. Bestäm atomradien, densiteten och packningstätheten.

✎ Lösning

Atomradien. I bcc är $\sqrt{3}a = 4r$:

$$r = \frac{\sqrt{3}a}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot 0,2866}{4} \text{ nm} = \boxed{0,124 \text{ nm}}$$

Densiteten. $N = 2$:

$$\rho = \frac{N M}{N_A a^3} = \frac{2 \cdot 55,85 \cdot 10^{-3}}{6,022 \cdot 10^{23} \cdot (0,2866 \cdot 10^{-9})^3} = \boxed{7,88 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3}$$

Fysika: Te

Packningstätheten. Direkt ur siffrorna:

$$\frac{2 \cdot \frac{4}{3}\pi (0,1241)^3}{(0,2866)^3} = \boxed{0,680}$$

vilket är bcc-värdet $\sqrt{3}\pi/8$, som det ska.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

☰ Exempel – Järn blir fcc vid 912 °C

Vid 912 °C övergår järn till fcc-struktur. Anta att atomradien är densamma som i föregående exempel, $r = 0,1241$ nm. Bestäm den nya gitterkonstanten och hur många procent densiteten ändras.

Lösning

Gitterkonstanten. I fcc är $\sqrt{2}a = 4r$:

$$a_{\text{fcc}} = 2\sqrt{2}r = 2\sqrt{2} \cdot 0,1241 \text{ nm} = \boxed{0,351 \text{ nm}}$$

Densiteten. $N = 4$:

$$\rho_{\text{fcc}} = \frac{4 \cdot 55,85 \cdot 10^{-3}}{6,022 \cdot 10^{23} \cdot (0,3510 \cdot 10^{-9})^3} = 8,58 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Ändringen.

$$\frac{\rho_{\text{fcc}}}{\rho_{\text{bcc}}} = \frac{8,58}{7,88} = 1,089$$

Densiteten **ökar** med $\boxed{8,9 \%}$.

Kontroll med packningstätheterna. Med samma atomer och samma radie är densiteten proportionell mot packningstätheten, så kvoten ska vara

$$\frac{0,740}{0,680} = 1,089$$

vilket stämmer.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Läsning

- 42.3 Structure of Solids