

Oberoende upprepningar

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #sats

Kurs: S0008M Förkunskaper: **Oberoende händelser**, Binomialkoefficient

Upprepar vi samma delförsök n gånger oberoende av varandra, och händelsen A har samma sannolikhet p varje gång, är sannolikheten att A inträffar exakt k gånger $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Resultatet bär upp hela binomialfördelningen.

1. Oberoende upprepningar av ett delförsök

Ett slumpförsök kan ofta ses som en upprepning av n likadana **delförsök**, där händelserna i de olika delförsöken är **oberoende**. Vi säger då att försöket består av n **oberoende upprepningar av ett delförsök**. Att kasta en tärning fem gånger är ett sådant försök; delförsöket är ett kast.

2. Resonemanget

Kasta en tärning 5 gånger och sök sannolikheten att få exakt 3 ettor. Låt A = etta i ett kast, så $P(A) = 1/6$.

Varje kastserie med exakt 3 ettor är en följd som $AAAA^cA^c$ eller AA^cAA^cA . Två saker räknas:

- **Hur många följder?** Lika många som sätten att placera 3 stycken A på 5 platser, alltså $\binom{5}{3}$ enligt **Sats 2.1**.
- **Hur sannolik är var och en?** På grund av oberoendet multipliceras sannolikheterna: $(1/6)^3(5/6)^2$, samma för alla följder.

Alltså

$$P(\text{exakt 3 ettor}) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,032$$

3. Sats 2.8

Ersätt tärningskastet med ett godtyckligt delförsök och ettan med en godtycklig händelse A .

Sats 2.8. Betrakta ett försök som består av n oberoende upprepningar av ett delförsök, och låt A vara en händelse som inträffar vid varje delförsök med sannolikheten p . Då är sannolikheten att A inträffar exakt k gånger i försöket

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Två villkor

1. **Samma** p i varje upprepning.
2. **Oberoende** upprepningar.

Drar vi utan återläggning bryts båda: sannolikheten ändras efter varje dragning, och dragningarna beror av varandra. Då gäller i stället **urnmodellen**.

Sannolikheterna $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ kallas **binomialsannolikheter**, eftersom binomialkoefficienterna ingår. I kapitel 3 får de ett eget namn: **binomialfördelningen**.

4. Lösta lektionsuppgifter

Lektion 3, övning 6 – Fyra sexor på sju kast

Pitepilten Pelle kastar en symmetrisk tärning 7 gånger. Betrakta kasten som 7 oberoende upprepningar av att kasta en gång. Vad är sannolikheten att han får exakt 4 sexor? Var kommer oberoendeantagandet in? Generalisera sedan till n kast och k sexor, och därefter till en godtycklig händelse A med sannolikhet p .

Lösning

Låt A = sexa i ett kast, $P(A) = 1/6$.

Antalet följder. Antalet kastserier med 4 sexor och 3 icke-sexor är antalet sätt att välja vilka 4 av de 7 kasten som ger sexa: $\binom{7}{4} = 35$.

Sannolikheten för varje följd. Här kommer oberoendet in: sannolikheten för en viss följd är produkten av sannolikheterna i varje kast, $(1/6)^4(5/6)^3$.

$$P(\text{exakt 4 sexor}) = \binom{7}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx \boxed{0,0156}$$

Generalisering. Med n kast och k sexor blir samma resonemang $\binom{n}{k}(1/6)^k(5/6)^{n-k}$, och med godtyckligt A och p blir det Sats 2.8 ovan.

På räknaren. `binomPdf(7,1/6,4)`.

Facit: 0,0156. Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Lektion 3, övning 7 (Vännman 2.43) — Handbormaskiner

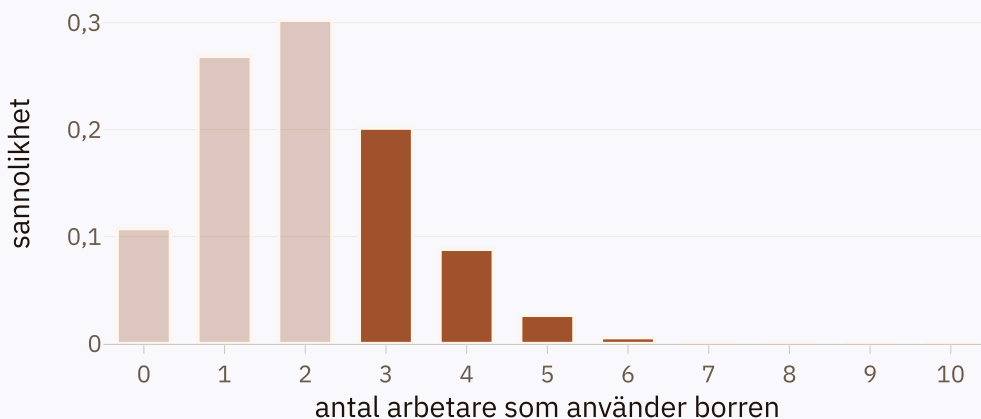
Vid ett monteringsband på en verkstad finns 10 arbetare. De använder alla under 20 % av arbetstiden en handbormaskin. Händelserna att olika arbetare i ett visst ögonblick använder sin handbormaskin antas vara oberoende. Vad är sannolikheten att minst tre av arbetarna i ett visst ögonblick använder sin handbormaskin?

Lösning

Varje arbetare är en oberoende upprepning med $p = 0,2$ och $n = 10$. Låt A_k = exakt k använder sin maskin. Via komplementet "högst 2":

10 arbetare, var och en med sannolikheten 0,2

■ minst 3 använder borsten $\approx 0,322$ ■ högst 2 (komplementet) $\approx 0,678$



$$P(A_0) = 0,8^{10} \approx 0,1074$$

$$P(A_1) = \binom{10}{1} 0,2 \cdot 0,8^9 \approx 0,2684$$

$$P(A_2) = \binom{10}{2} 0,2^2 \cdot 0,8^8 \approx 0,3020$$

$$P(\text{minst } 3) = 1 - (0,1074 + 0,2684 + 0,3020) \approx \boxed{0,322}$$

På räknaren. `binomCdf(10,0.2,3,10)`.

Svar i boken (2:a uppl., 2.42 = 3:e uppl. 2.43): 0,32.

Se även

- Oberoende händelser
- Binomialkoefficient
- Binomialfördelning
- Klassiska sannolikhetsdefinitionen

Resurser

- [3Blue1Brown: Binomial distributions](#) — samma räkning som här, med bra intuition för varför binomialkoefficienten dyker upp
- [Wikipedia: Bernoulli trial](#)