

Oberoende stokastiska variabler

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #definition

Kurs: S0008M Förkunskaper: Oberoende händelser, Stokastisk variabel

Stokastiska variabler är oberoende om vetskap om värdet på den ena inte ändrar fördelningen för den andra. Begreppet är samma som för oberoende händelser, men krävs för alla händelser som variablerna kan ge upphov till.

1. Definitionen

Två stokastiska variabler ξ och η är **oberoende** om händelserna $\{\xi \leq x\}$ och $\{\eta \leq y\}$ är oberoende för alla x och y :

$$P(\xi \leq x, \eta \leq y) = P(\xi \leq x)P(\eta \leq y)$$

Kommatecknet betyder "och", alltså snitt. Definitionen utvidgas på samma sätt till $\xi_1, \dots, \xi_n$: sannolikheten att alla ligger under sina gränser är produkten av de enskilda sannolikheterna.

För diskreta variabler är det samma sak som att sannolikhetsfunktionerna multipliceras,

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y) \quad \text{för alla } x, y$$

och för kontinuerliga att frekvensfunktionerna gör det. Den simultana fördelningen behandlas utförligt i [Flerdimensionella fördelningar](#).

2. När antar vi oberoende?

Oberoende är nästan alltid ett **modellantagande**, inte något vi räknar fram. Det är rimligt när variablerna kommer från fysiskt åtskilda försök: två olika tärningskast, mätningar på olika enheter, tiderna för två etapper som inte påverkar varandra. Det är inte rimligt när en gemensam orsak styr båda, till exempel längd och vikt hos samma person.

Oberoende likafördelade

När $\xi_1, \dots, \xi_n$ är oberoende och har **samma fördelning** kallas de *oberoende likafördelade*. Det är standardmodellen för ett stickprov: n upprepade mätningar av samma storhet under samma förhållanden. Engelska texter förkortar det i.i.d.

3. Vad oberoendet ger

Oberoende behövs framför allt för variansen. Väntevärdet av en summa är alltid summan av väntevärdena, men

$$V(\xi_1 + \xi_2) = V(\xi_1) + V(\xi_2) \quad \text{om } \xi_1, \xi_2 \text{ är oberoende}$$

Utan oberoende tillkommer en term som mäter samvariationen, **kovariansen**. Se [Linjära funktioner av stokastiska variabler](#).

Samma variabel två gånger är inte två oberoende variabler

$\xi_1 + \xi_1 = 2\xi_1$ har variansen $4V(\xi_1)$, medan $\xi_1 + \xi_2$ med två oberoende kopior har $2V(\xi_1)$. Att skriva $\xi + \xi$ när man menar två oberoende mätningar är ett vanligt fel.

Exempel – Två växlar

Antalet samtal per minut till två växlar är $\xi \in \text{Po}(2)$ och $\eta \in \text{Po}(3)$, oberoende av varandra.

a) Vad är sannolikheten att ingen av växlarna får något samtal under en minut?

b) Beräkna $E(\xi - \eta)$ och $V(\xi - \eta)$.

Lösning

a) Oberoendet låter oss multiplicera:

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = P(\xi = 0)P(\eta = 0) = e^{-2}e^{-3} = e^{-5} \approx \boxed{0,0067}$$

Det stämmer med att $\xi + \eta \in \text{Po}(5)$, där $P(\xi + \eta = 0) = e^{-5}$ (summan av oberoende Poissonvariabler).

b) Väntevärdet kräver inget oberoende:

$$E(\xi - \eta) = 2 - 3 = \boxed{-1}$$

Variansen gör det, och minustecknet försvinner eftersom $V(-\eta) = (-1)^2 V(\eta)$:

$$V(\xi - \eta) = V(\xi) + V(\eta) = 2 + 3 = \boxed{5}$$

På räknaren. a) `poissPdf(2,0)*poissPdf(3,0)`.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

⚠ Vanliga fel

- **Subtrahera varianser.** $V(\xi - \eta) = V(\xi) + V(\eta)$, aldrig $V(\xi) - V(\eta)$.
- **Addera standardavvikelser.** $D(\xi + \eta) = \sqrt{V(\xi) + V(\eta)}$, inte $D(\xi) + D(\eta)$.
- **Multiplitera utan oberoende.** $P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$ gäller bara om variablerna är oberoende.

Se även

- Oberoende händelser
- Linjära funktioner av stokastiska variabler
- Flerdimensionella fördelningar
- Kovarians
- Stokastisk variabel

Resurser

- [Wikipedia: Independence \(probability theory\)](#) 