

Oberoende händelser

19 okt. 2026, 8 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #definition

Kurs: S0008M Förkunskaper: Betingad sannolikhet

Två händelser är oberoende om vetskapen om att den ena har inträffat inte ändrar sannolikheten för den andra. Då är sannolikheten att båda inträffar produkten av de enskilda sannolikheterna.

1. Definitionen

Kastar vi en tärning två gånger och låter A = femma i första kastet och B = tvåa i andra är

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6} = P(B)$$

Informationen att A har inträffat ändrar inte vår kännedom om B . Multiplikationsformeln $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$ blir då $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, och det tar vi som definition.

Definition 2.5. Om

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

säger vi att A och B är **oberoende** händelser.

Två sätt att säga samma sak

Om $P(B) > 0$ gäller

$$P(A \mid B) = P(A) \iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Framåt: multiplicera $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A)$ med $P(B)$. Bakåt: dela produkten med $P(B)$. Produktformen är symmetrisk i A och B och kräver inte att någon sannolikhet är positiv, och därför används den som definition.

Är händelserna **beroende** måste vi känna till någon av de betingade sannolikheterna $P(A \mid B)$ eller $P(B \mid A)$ för att kunna räkna ut $P(A \cap B)$. Är de oberoende räcker $P(A)$ och $P(B)$.

2. Oberoende är inte disjunkt

Disjunkta händelser är beroende

Disjunkta händelser kan inte inträffa samtidigt, så $P(A \cap B) = 0$. Har båda positiv sannolikhet är $P(A)P(B) > 0$, och produktregeln bryts. Att veta att A inträffat säger tvärtom väldigt mycket om B : den inträffade *inte*.

Disjunkt är en egenskap hos mängderna och syns i ett mängddiagram. Oberoende är en egenskap hos sannolikheterna och syns inte i figuren.

3. Fler än två händelser

Tre händelser A , B och C är oberoende om produktregeln gäller för **alla** kombinationer:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

och motsvarande för fler händelser. Är $A, B, C, \dots$ oberoende så är också komplementen $A^c, B^c, C^c, \dots$ oberoende, liksom alla blandningar som $A, B^c, C, \dots$

"Minst en" för oberoende händelser

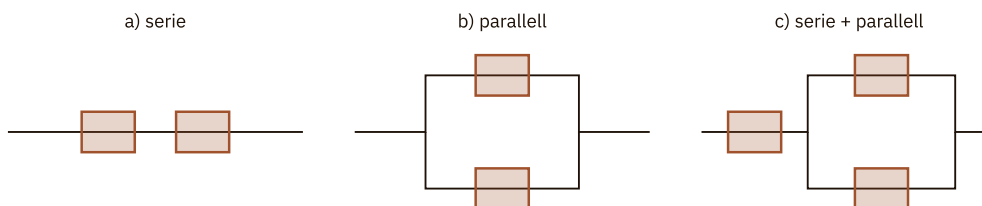
Kombinera komplementregeln med produktregeln:

$$P(\text{minst en av } A_1, \dots, A_n) = 1 - P(A_1^c \cap \dots \cap A_n^c) = 1 - P(A_1^c) \cdots P(A_n^c)$$

Det är standardgreppet i nästan varje uppgift om oberoende händelser.

4. Serie- och parallellsystem

Komponenter som fungerar oberoende av varandra kan kopplas på två grundsätt:



Koppling	Fungerar om	Sannolikhet, komponenter med p_1, p_2
Serie	alla komponenter fungerar	$p_1 p_2$
Parallell	minst en komponent fungerar	$1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$

Sammansatta system räknas inifrån och ut: ersätt varje parallellgren med dess sannolikhet och multiplicera sedan i serie.

5. Lösta lektionsuppgifter

≡ Lektion 3, övning 1–3 – Justering av utombordsmotorer

En tillverkare av utombordsmotorer vet av erfarenhet att 40 % av motorerna behöver justering av förgasaren, 30 % behöver justering av tändningen och 21 % behöver justering av båda. En slumpmässigt vald motor visade sig behöva justering av tändningen.

Övning 1. Givet den informationen, vad är sannolikheten att motorns förgasare behöver justering? Inför och definiera lämpliga händelser.

Övning 2. Lös samma uppgift men anta att 12 % av motorerna behöver justering av både förgasare och tändning. Jämför med sannolikheten att en slumpmässigt vald motor behöver justering av förgasaren. Vilken roll spelar informationen om tändningen här, och vilken roll spelade den i övning 1?

Övning 3. Är händelserna i övning 1 oberoende? Är de i övning 2 det?

 Lösning

Beteckningar. F = motorn behöver justering av förgasaren; T = motorn behöver justering av tändningen. $P(F) = 0,40$ och $P(T) = 0,30$.

Övning 1. $P(F \cap T) = 0,21$:

$$P(F \mid T) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} = \frac{0,21}{0,30} = \boxed{0,70}$$

Informationen höjer sannolikheten från 0,40 till 0,70: motorer som behöver ny tändinställning behöver oftare också förgasarjustering.

Övning 2. $P(F \cap T) = 0,12$:

$$P(F \mid T) = \frac{0,12}{0,30} = \boxed{0,40} = P(F)$$

Här spelar informationen om tändningen ingen roll alls.

Övning 3. I övning 1 är $P(F)P(T) = 0,40 \cdot 0,30 = 0,12 \neq 0,21 = P(F \cap T)$, så F och T är **beroende**. I övning 2 är $P(F \cap T) = 0,12 = P(F)P(T)$, så de är **oberoende** — samma slutsats som $P(F \mid T) = P(F)$.

Facit: övning 1: 0,70; övning 2: 0,40, informationen spelar ingen roll.

☰ Lektion 3, övning 4 (Vännman 2.30) — Disjunkt och oberoende?

Två händelser A och B har sannolikheter skilda från noll. A och B är disjunkta. Kan A och B vara oberoende?

 Lösning

Nej. Disjunkta händelser har $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. Eftersom båda sannolikheterna är skilda från noll är $P(A)P(B) > 0$. Alltså är

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$$

och produktregeln gäller inte. I figuren: om A har inträffat ligger utfallet utanför B , så $P(B \mid A) = 0$, vilket skiljer sig från $P(B) > 0$.

Svar i boken (2:a uppl., 2.29 = 3:e uppl. 2.30): Nej.

≡ Lektion 3, övning 5 (Vännman 2.34) – Maskin med tre delar

En maskin består av tre delar som är felfria med sannolikheterna 0,9, 0,85 respektive 0,95. Delarnas funktionsduglighet antas oberoende av varandra. Bestäm sannolikheten att maskinen fungerar, om den fungerar

- a) endast om alla tre delarna fungerar,
- b) om minst en av de tre delarna fungerar.

Lösning

Låt A_i = del i fungerar; A_1, A_2, A_3 är oberoende.

a) Seriesystem — alla måste fungera:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0,9 \cdot 0,85 \cdot 0,95 \approx \boxed{0,727}$$

b) Parallellsystem — minst en ska fungera. Via komplementet, där komplementen också är oberoende:

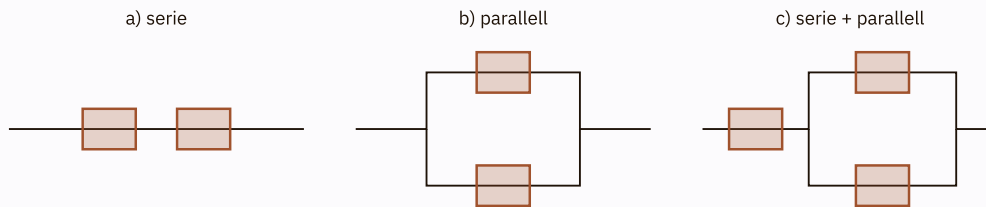
$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c) = 1 - 0,1 \cdot 0,15 \cdot 0,05 = 1 - 0,00075 \approx \boxed{0,99925}$$

Tolkning. a) motsvarar figur a) i avsnitt 4 med tre block i rad; b) motsvarar figur b) med tre block parallellt. Serie gör systemet sämre än varje enskild del, parallell gör det bättre.

Svar i boken (2:a uppl., 2.33 = 3:e uppl. 2.34): a) 0,73, b) 0,9993.

≡ Lektion 3, övning 11 (Vännman 2.36) — Tre systemkopplingar

Varje komponent i systemen nedan fungerar med sannolikheten p , oberoende av de andra. Hur stor är sannolikheten att systemet fungerar?



Lösning

a) Två komponenter i serie:

$$P = p \cdot p = p^2$$

b) Två komponenter parallellt — systemet går bara sönder om båda går sönder:

$$P = 1 - (1 - p)^2 = 2p - p^2$$

c) En komponent i serie med parallellgrenen från b):

$$P = p(1 - (1 - p)^2) = 2p^2 - p^3$$

Rimlighetskontroll. Med $p = 0,9$: a) 0,81, b) 0,99, c) 0,891. Parallellkopplingen är bäst och c) ligger mellan a) och b), som väntat.

Svar i boken (2:a uppl., 2.35 = 3:e uppl. 2.36): a) p^2 , b) $2p - p^2$, c) $2p^2 - p^3$.

≡ Lektion 3, övning 8 — Minst en dubbelsexa

Vad är sannolikheten att få minst en dubbelsexa vid 24 kast med två tärningar?

a) Bestäm sannolikheten.

b) Bestäm det minsta antal kast som krävs för att sannolikheten att få minst en dubbelsexa ska bli större än 0,5.

Lösning

Låt A_i = dubbelsexa i kast i . $P(A_i) = 1/36$ och kasten är oberoende.

a) Via komplementet:

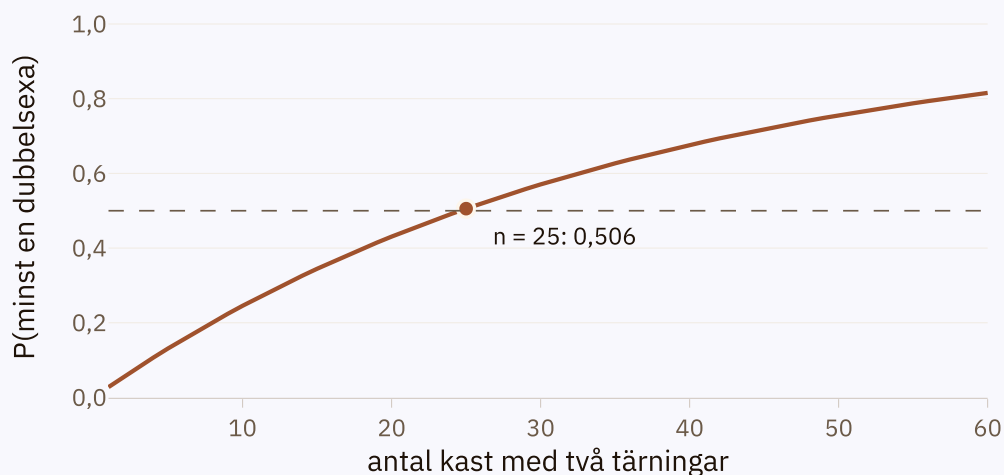
$$P(\text{minst en}) = 1 - P(A_1^c \cap \dots \cap A_{24}^c) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx \boxed{0,4914}$$

b) Vi söker minsta n med

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > 0,5 \iff \left(\frac{35}{36}\right)^n < 0,5 \iff n > \frac{\ln 0,5}{\ln(35/36)} \approx 24,6$$

Olikheten vänder när vi delar med $\ln(35/36) < 0$. Alltså krävs $\boxed{n = 25}$ kast.

Sannolikheten passerar 0,5 först vid 25 kast



På räknaren. `solve(1 - (35/36)^n > 0.5, n)` ger $n > 24,6$.

Facit: a) 0,4914, b) $n = 25$. Stämmer med det handskrivna lösningsförslaget.

≡ Lektion 3, övning 9 (Vännman 2.45) — Kasserade byggelement

Byggelement kan vara behäftade med fel av tre typer: typ I med sannolikheten 0,05, typ II med 0,10 och typ III med 0,03. Ett element kan ha flera feltyper samtidigt, och feltyperna förekommer oberoende av varandra. Ett element måste kasseras om minst ett fel förekommer.

- Bestäm sannolikheten att ett element måste kasseras.
- En byggmästare köper 20 element. Vad är sannolikheten att han måste kassera minst 2?

Lösning

a) "Minst ett fel" via komplementet, med oberoende feltyper:

$$p = 1 - 0,95 \cdot 0,90 \cdot 0,97 = 1 - 0,82935 \approx \boxed{0,171}$$

b) De 20 elementen är **oberoende upprepningar** där varje element kasseras med sannolikheten $p = 0,17065$. Låt A_k = exakt k kasseras. Via komplementet "högst 1":

$$P(\text{minst } 2) = 1 - P(A_0) - P(A_1) = 1 - (1 - p)^{20} - 20p(1 - p)^{19} \approx \boxed{0,88}$$

På räknaren. `binomCdf(20, 0.17065, 2, 20)`.

Svar i boken (2:a uppl., 2.44 = 3:e uppl. 2.45): a) 0,17, b) 0,88.

≡ Lektion 3, övning 10 — Födelsedagsproblemet

Vad är det minsta antal studenter som behövs i en klass för att det ska vara mer än 50 % chans att minst två fyller år på samma dag? Gör lämpliga antaganden och ställ upp den olikhet som löser problemet.

Lösning

Antaganden. Inga tvillingar eller trillingar i klassen, ingen är född den 29 februari, och var och en av årets 365 dagar är en lika sannolik födelsedag, oberoende mellan studenterna.

Komplementet. “Minst två delar födelsedag” är komplementet till “alla har olika födelsedagar”. Ta studenterna en i taget: den första kan ha vilken dag som helst, den andra måste undvika 1 dag, den tredje 2 dagar och så vidare. Med n studenter:

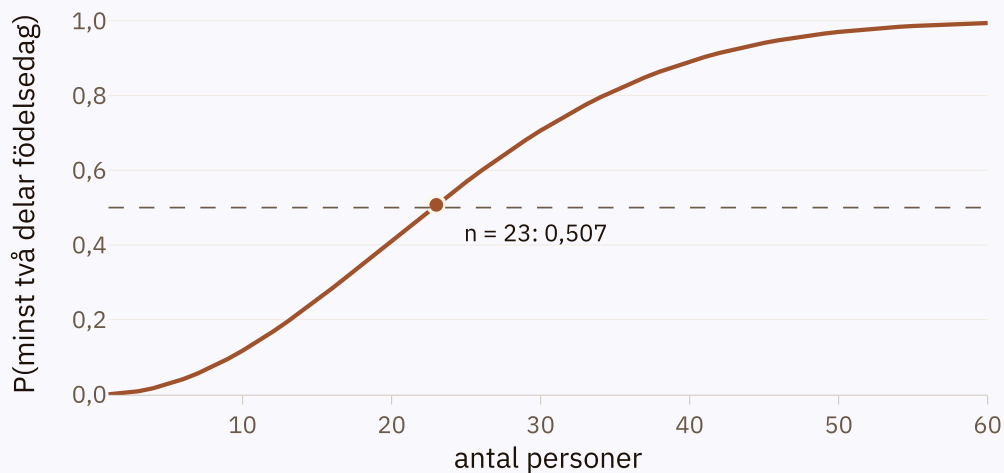
$$P(\text{alla olika}) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{366-n}{365}$$

Olikheten. Vi söker minsta heltal n med

$$1 - 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{366-n}{365} > 0,5$$

Räknar vi faktor för faktor passeras 0,5 först vid $n = 23$, där sannolikheten blir 0,507. Svaret är 23 studenter.

Redan 23 personer räcker för mer än 50 %



På räknaren. $1 - \Pi((365-i)/365, i, 0, 22)$ ger 0,507 och samma med 21 i stället för 22 ger 0,476.

Facit: olikheten ovan med samma antaganden; lektionsbladet anger svaret 23.

Se även

- Betingad sannolikhet
- Sannolikhetsmått

- Oberoende upprepningar
- Binomialfördelning
- Oberoende stokastiska variabler

Resurser

- [Khan Academy: Probability](#) 
 - [Wikipedia: Oberoende \(sannolikhets-teori\)](#) 
 - [Wikipedia: Birthday problem](#) 
-
-