

Normalfördelning

19 okt. 2026, 6 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #fördelning

Kurs: S0008M Förkunskaper: Kontinuerliga stokastiska variabler

Normalfördelningen är den klockformade fördelning som bestäms helt av sitt väntevärde μ och sin standardavvikelse σ . Den är den viktigaste fördelningen i kursen, eftersom summor av många oberoende bidrag blir approximativt normalfördelade.

1. Frekvensfunktionen

En kontinuerlig stokastisk variabel ξ är **normalfördelad**, $\xi \in N(\mu, \sigma)$, om dess frekvensfunktion är

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

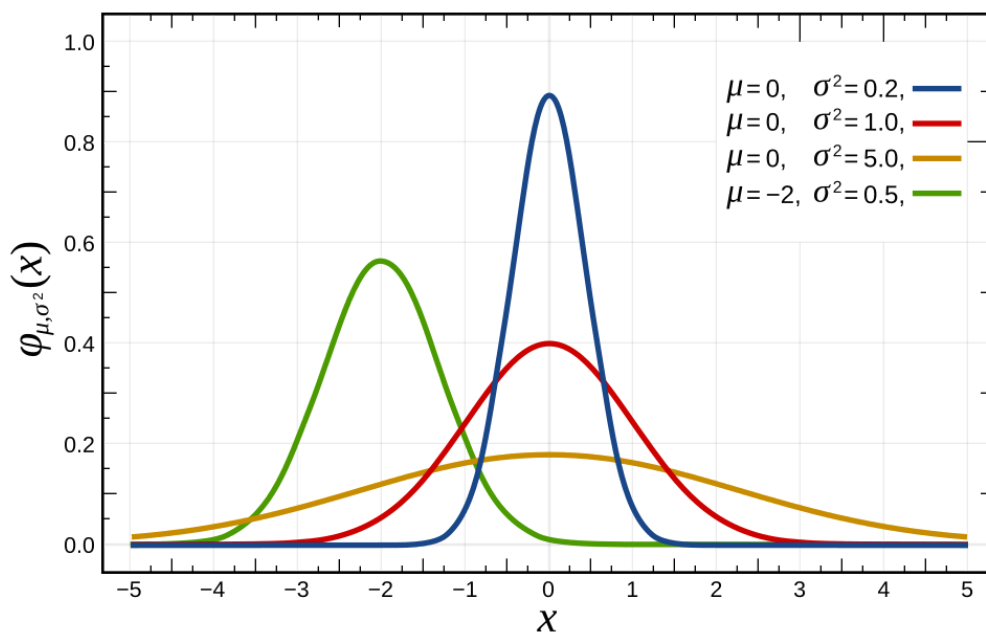
⚠ $N(\mu, \sigma)$ hos Vännman, $N(\mu, \sigma^2)$ nästan överallt annars

Kursen följer Vännman och skriver $\xi \in N(\mu, \sigma)$ med **standardavvikelsen** som andra parameter. De flesta andra böcker, Wikipedia, Python och R skriver $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, med tilde och **varians**. Det är inte bara skrivsättet som skiljer: $N(170, 10)$ här är samma fördelning som $N(170, 100)$ där. Kontrollera alltid vilken konvention en källa använder innan du stoppar in siffror.

Två parametrar räcker för att fastställa hela fördelningen, och de gör var sin sak:

- μ – **väntevärdet**. Flyttar klockan i sidled utan att ändra formen.
- σ – **standardavvikelsen**. Styr bredden; hög σ ger en låg och bred klocka, låg σ en smal och hög.

Faktorn $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ är bara normeringen som gör att arean under kurvan blir 1. Kurvan är symmetrisk kring μ , så μ är också median och **mest sannolika värde**.



Normaliserade gaussianer med väntevärde μ och varians σ^2 . Bild från Wikipedia, som använder variansen som parameter.

2. Sannolikheter via standardisering

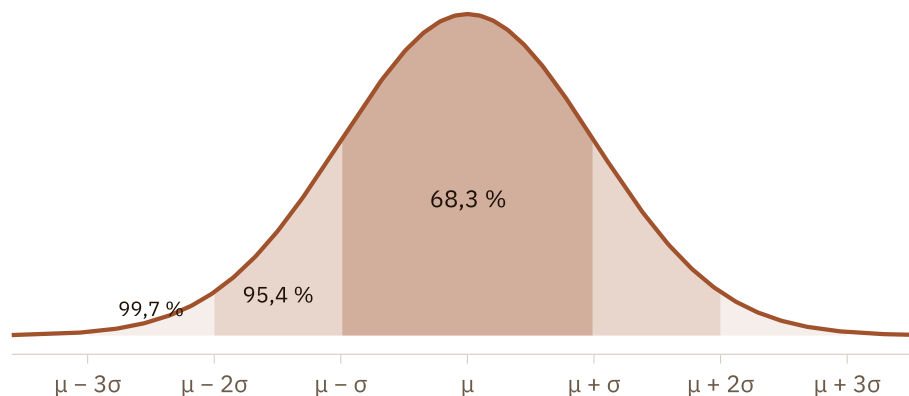
Frekvensfunktionen går inte att integrera i slutna funktioner, så alla sannolikheter slås upp i tabell över $N(0, 1)$. **Sats 4.2** säger att om $\xi \in N(\mu, \sigma)$ så är

$$P(\xi \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

där Φ är fördelningsfunktionen för **den standardiserade normalfördelningen**. Vi mäter alltså avståndet från väntevärdet i antal standardavvikelser. Samma sak på räknaren: `normCdf(-inf, x, mu, sigma)`.

🔗 68–95–99,7

Andelen av massan som ligger inom 1, 2 respektive 3 standardavvikelser från väntevärdet är ungefär 68 %, 95 % och 99,7 % – oavsett vilka μ och σ som gäller. Det är den snabbaste rimlighetskollen som finns när man räknat fram en normalsannolikhet.



3. Varför den dyker upp överallt

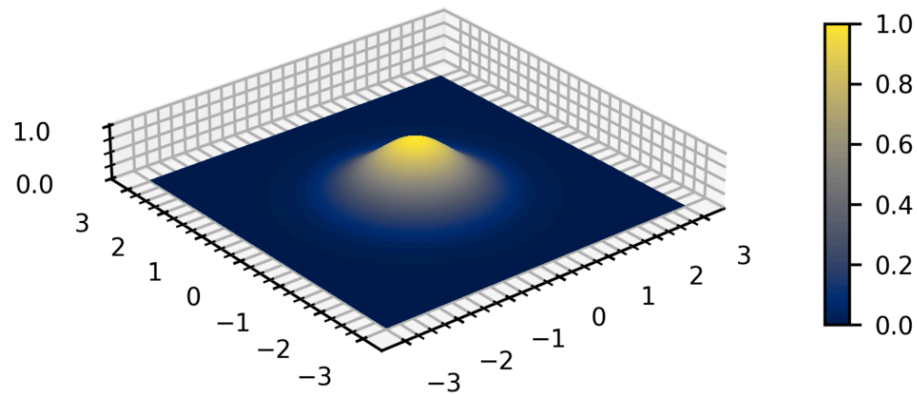
Normalfördelningen är inte vanlig för att naturen råkar tycka om klockkurvor, utan för att den är en **gränsfördelning**: summerar man många oberoende bidrag går resultatet mot en normalfördelning oavsett hur de enskilda bidragen är fördelade. Det är innehållet i **centrala gränsvärdessatsen**, och det är därför mätfel, längder och brus så ofta modelleras normalt.

Situation	Vad som händer
Summa av många oberoende termer	Går mot normalfördelning — Centrala gränsvärdessatsen
Binomial med $np(1 - p) \geq 10$	Approximeras av $N(np, \sqrt{np(1 - p)})$
Poissonfördelning med stort λ	Approximeras av $N(\lambda, \sqrt{\lambda})$
Linjärkombination av oberoende normalfördelade	Är exakt normalfördelad — se Summor av normalfördelade stokastiska variabler

Den bevarar sig själv

Att en summa av normalfördelade variabler *själv* är normalfördelad är ovanligt bland fördelningar och gör räkningarna lätta: det räcker att hålla reda på väntevärde och standardavvikelse, så är hela fördelningen känd.

4. Två dimensioner



Gaussisk funktion över en tvådimensionell **domän**. Bild från Wikipedia.

Med två variabler samtidigt bestäms fördelningen av två väntevärden, två standardavvikelser och korrelationen mellan variablerna — se **Tvådimensionell normalfördelning**.

5. Lösta lektionsuppgifter

☰ Exempel — sannolikheten för en avvikelse uppåt

Längden hos en population är normalfördelad med $\mu = 170$ cm och $\sigma = 10$ cm. Hur stor andel är längre än 185 cm?

Lösning

Setup. Vi söker $P(\xi > 185)$ där $\xi \in N(170, 10)$. Standardisera först.

Räkningen.

$$P(\xi > 185) = 1 - \Phi\left(\frac{185 - 170}{10}\right) = 1 - \Phi(1,5) = 1 - 0,9332 = \boxed{0,0668}$$

Rimlighetskontroll. 185 cm ligger 1,5 standardavvikelser över medelvärdet. Enligt 68–95-regeln ligger 16 % ovanför 1σ och 2,5 % ovanför 2σ , så svaret ska hamna mellan dessa. Knappt 7 % gör det.

På räknaren. `normCdf(185,∞,170,10)`.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

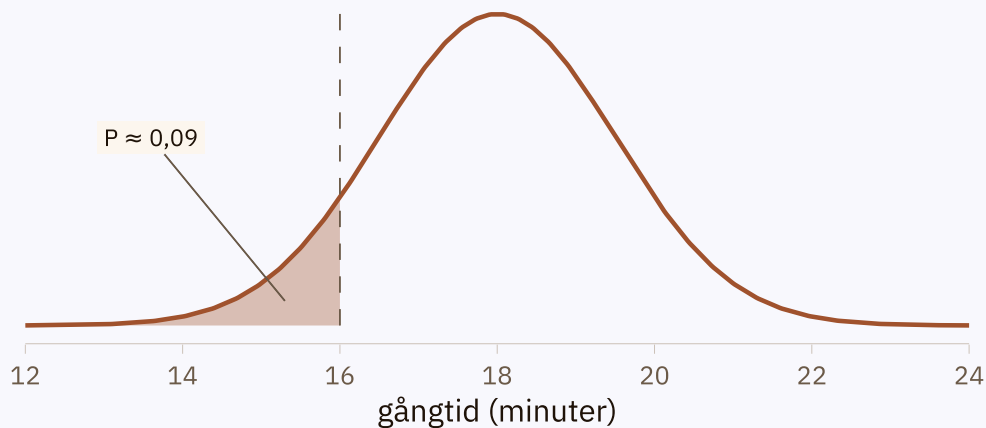
≡ Lektion 7, övning 5 – Gångtid till universitetet

Gångtiden ξ (minuter) vintertid mellan hemmet och Luleå tekniska universitet för en viss statistiklärare är normalfördelad med $\mu = 18$ och $\sigma = 1,5$. Beräkna sannolikheten att gångtiden en slumpmässigt vald vinterdag understiger 16 minuter.

Lösning

$\xi \in N(18, 1,5)$. Den sökta sannolikheten är den skuggade svansen:

$N(18, 1,5)$: gångtid under 16 minuter



Sats 4.2:

$$P(\xi < 16) = \Phi\left(\frac{16 - 18}{1,5}\right) = \Phi(-1,33) = 1 - \Phi(1,33) \approx 1 - 0,9082 \approx \boxed{0,09}$$

Rimlighetskontroll. 16 minuter ligger 1,33 standardavvikelser under medelvärdet – mellan 1σ (16 % under) och 2σ (2,5 % under).

På räknaren. `normCdf(-∞,16,18,1.5)` — bocka i **Draw** så ritas den skuggade svansen.

Facit: 0,09.

≡ Lektion 7, övning 7 (Vännman 4.29) — Symmetri kring μ

Låt $\xi \in N(\mu, \sigma)$. Beräkna

- a) $P(\xi < \mu)$,
- b) $P(\xi < \mu - \sigma)$,
- c) $P(\xi > \mu + \sigma)$,
- d) $P(\xi < \mu - 2\sigma)$,
- e) $P(\xi > \mu + 2\sigma)$.

Diskutera vad resultaten säger om μ och σ för en symmetrisk fördelning.

Lösning

Standardisera med $\eta = (\xi - \mu)/\sigma \in N(0, 1)$.

a) Kurvan är symmetrisk kring μ , så hälften av massan ligger till vänster:

$$P(\xi < \mu) = \Phi(0) = \boxed{0,5}$$

b)

$$P(\xi < \mu - \sigma) = P(\eta < -1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0,8413 = \boxed{0,1587}$$

c) Samma svans på andra sidan:

$$P(\xi > \mu + \sigma) = P(\eta > 1) = \boxed{0,1587}$$

d) och e) På samma sätt:

$$P(\xi < \mu - 2\sigma) = P(\xi > \mu + 2\sigma) = 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0,9772 = \boxed{0,0228}$$

Tolkning. μ är symmetricentrum och delar massan mitt itu. σ är en naturlig längdskala: ungefär 16 % av massan ligger mer än en standardavvikelse ut åt varje håll, och drygt 2 % mer än två.

Uppgiften (Vännman 4.29) är återgiven ur det handskrivna lösningsförslaget, och svaren stämmer med det.

≡ Lektion 8, övning 1 – Inom en och tre standardavvikelser

Antag att $\xi \in N(\mu, \sigma)$. Beräkna

a) $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma),$

b) $P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma).$

Tolka i ord betydelsen av σ i normalfördelningen med hjälp av sannolikheterna.

Lösning

Efter standardisering beror svaren inte på μ och σ :

a)

$$P(-1 < \eta < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 2 \cdot 0,8413 - 1 = \boxed{0,683}$$

b)

$$P(-3 < \eta < 3) = 2\Phi(3) - 1 \approx 2 \cdot 0,99865 - 1 = \boxed{0,997}$$

Tolkning. Ungefär två tredjedelar av alla observationer hamnar inom en standardavvikelse från väntevärdet, och praktiskt taget alla inom tre. Ett värde mer än 3σ från μ är så ovanligt att det bör väcka misstanke om att modellen inte stämmer.

På räknaren. `normCdf(-1,1)` och `normCdf(-3,3)`.

Facit: a) 0,683, b) 0,997.

Se även

- Standardiserad normalfördelning
- Kontinuerliga stokastiska variabler
- Linjära funktioner av stokastiska variabler
- Summor av normalfördelade stokastiska variabler
- Centrala gränsvärdessatsen
- Tvådimensionell normalfördelning

Resurser

- [3Blue1Brown: But what is the Central Limit Theorem?](#) — varför just den här kurvan dyker upp överallt
- [Khan Academy: Normal distributions](#)
- [Wikipedia: Normalfördelning](#)