

Normalapproximation

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #approximation

Kurs: S0008M Förkunskaper: Centrala gränsvärdessatsen, Binomialfördelning

Diskreta fördelningar som binomial- och Poissonfördelningen kan approximeras med normalfördelningen när väntevärdet och spridningen är tillräckligt stora. Approximationen följer av centrala gränsvärdessatsen och kan förbättras med halvkorrektion.

1. Binomialfördelningen

En **binomialfördelad** variabel $\xi \in \text{Bin}(n, p)$ är en summa av n oberoende variabler som var och en är 1 med sannolikheten p och 0 annars. **Centrala gränsvärdessatsen** ger därför, med samma väntevärde och standardavvikelse,

$$\xi \approx N(np, \sqrt{np(1-p)}) \quad \text{om } np(1-p) \geq 10$$

Villkoret säger att variansen ska vara stor nog. Är p nära 0 eller 1 är fördelningen skev, och då krävs ett större n .

2. Poissonfördelningen

En **Poissonfördelad** variabel $\xi \in \text{Po}(\lambda)$ har $E(\xi) = V(\xi) = \lambda$, och för stora λ gäller

$$\xi \approx N(\lambda, \sqrt{\lambda})$$

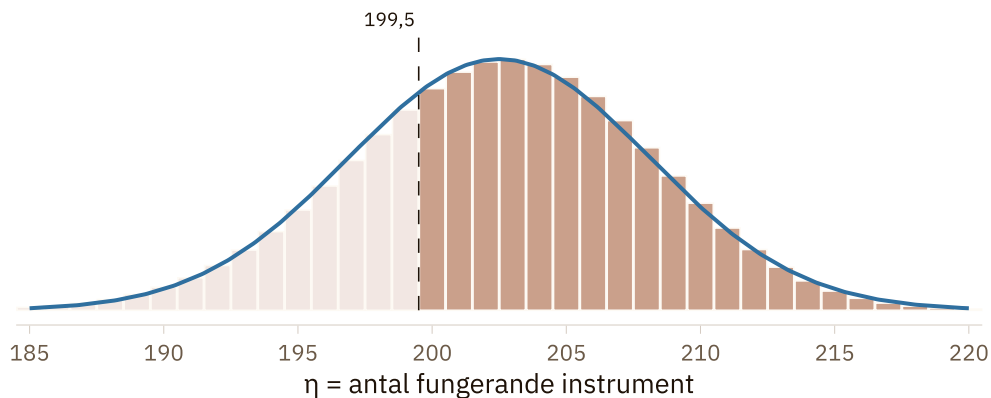
Som tumregel används approximationen när $\lambda \geq 15$; kontrollera gränsen mot kursens formelblad.

3. Halvkorrektion

En diskret variabel lägger all sin massa på heltalen, medan normalkurvan sprider den kontinuerligt. Stapeln för värdet k motsvaras av ytan under kurvan från $k - 0,5$ till $k + 0,5$. Därför blir approximationen bättre om vi flyttar gränsen ett halvt steg:

$$P(\xi \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0,5 - \mu}{\sigma}\right)$$

Bin(240, 0,84375) (staplar) och $N(202,5, 5,625)$: $\eta \geq 200$ räknas från 199,5



⚠ Samma händelse, olika svar utan halvkorrektion

För heltalsvärda ξ är $P(\xi \geq 200)$ och $1 - P(\xi \leq 199)$ samma sak. Utan halvkorrektion ger normalapproximationen ändå olika svar beroende på om gränsen sätts vid 200 eller 199. Halvkorrektionen lägger gränsen mitt emellan, vid 199,5.

I kursens facit används **inte** halvkorrektion, om inte annat anges.

4. Lösta lektionsuppgifter

☰ Lektion 10, övning 7 (Vännman 6.37) – Instrument i en förpackning

Ett instrument består av tre komponenter som var och en är defekt med sannolikheten 0,25, oberoende av varandra. Instrumentet fungerar om högst en av komponenterna är defekt. En förpackning innehåller 240 instrument, oberoende av varandra. Vad är sannolikheten att minst 200 av dem fungerar?

 Lösning

Ett instrument. Låt ξ_k = antal defekta komponenter i instrument k , $\xi_k \in \text{Bin}(3; 0,25)$.

$$P(\text{instrument } k \text{ fungerar}) = P(\xi_k \leq 1) = 0,75^3 + 3 \cdot 0,25 \cdot 0,75^2 = 0,84375$$

Förpackningen. Låt η = antal fungerande instrument, $\eta \in \text{Bin}(240; 0,84375)$, med

$$E(\eta) = 240 \cdot 0,84375 = 202,5, \quad V(\eta) = 202,5 \cdot 0,15625 \approx 31,64, \quad \sigma \approx 5,625$$

Eftersom $np(1-p) \approx 31,6 \geq 10$ är approximativt $\eta \approx N(202,5; 5,625)$.

Sannolikheten.

$$P(\eta \geq 200) \approx 1 - \Phi\left(\frac{200 - 202,5}{5,625}\right) = \Phi(0,444) \approx \boxed{0,67}$$

Känsligheten för gränsen. Skriver vi i stället $P(\eta \geq 200) = 1 - P(\eta \leq 199)$ ger samma approximation $\Phi(0,622) \approx 0,73$. Med halvkorrektion, gränsen vid 199,5, blir det $\Phi(0,533) \approx 0,703$. Den exakta binomialsannolikheten är 0,708 – halvkorrektionen hamnar klart närmast.

På räknaren. Det exakta värdet: `binomCdf(240, 0.84375, 200, 240)`.

Uppgiften (Vännman 6.37, i 2:a uppl. 6.36) är återgiven ur det handskrivna lösningsförslaget, och alla fyra värden stämmer med det.

Se även

- Centrala gränsvärdessatsen
- Binomialfördelning
- Poissonfördelning
- Normalfördelning
- Standardiserad normalfördelning

Resurser

- [Khan Academy: Normal approximation to binomial](#) 
 - [Wikipedia: Continuity correction](#) 
-
-