

Multiplikationsprincipen

19 okt. 2026, 4 min läsning

UTKAST

#matematik #kombinatorik #princip

Kurs: S0008M Förkunskaper: Klassiska sannolikhetsdefinitionen

Görs flera operationer i tur och ordning multipliceras antalet sätt att göra var och en. Principen räknar ordnade val och är grunden för all kombinatorik i kursen.

1. Principen

Definition 2.2. Ska vi göra k operationer i tur och ordning, där den första kan göras på n_1 sätt, den andra på n_2 sätt och så vidare, så är det totala antalet sätt

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$$

Väljer vi två dosor ur en förpackning med fem kan den första väljas på 5 sätt och den andra på 4, så det finns $5 \cdot 4 = 20$ möjliga utfall.

2. Träddiagram

Principen syns tydligast i ett **träddiagram**: varje nivå är en operation, och antalet grenar multipliceras nivå för nivå. En planka som bedöms på tre stationer med 3, 2 och 2 alternativ ger ett träd med $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ löv.

Trädet är också användbart för att *lista* utfallen och räkna de gynnsamma direkt, vilket ofta är säkrare än att räkna med formler när antalet utfall är litet.

3. Med hänsyn till ordning

Principen räknar ordnade val

Att först dra dosa 1 och sedan dosa 2 är ett annat utfall än att först dra dosa 2 och sedan dosa 1. Det är rätt när frågan gäller en ordning ("först en fungerande och sedan en trasig"), men dubbelräknar när ordningen inte spelar någon roll. Då delar vi bort de inbördes ordningarna, och det leder till **binomialkoefficienten**.

Att välja k element bland n kan göras på fyra sätt, beroende på två frågor: läggs det valda tillbaka, och spelar ordningen roll? Tre av dem förekommer i kursen:

	Ordningen spelar roll	Ordningen spelar ingen roll
Med återläggning	n^k	(förekommer inte i kursen)
Utan återläggning	$n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Båda talen i vänsterkolumnen är multiplikationsprincipen direkt: med återläggning har varje val n alternativ, utan återläggning ett färre för varje val. Specialfallet $k = n$ utan återläggning ger $n!$, antalet sätt att ordna n saker.

Exempel – Kod till ett cykellås

Ett cykellås har fyra ringar med siffrorna 0–9.

- Hur många koder finns?
- Hur många koder har fyra olika siffror?
- Vi väljer en kod på måfå. Vad är sannolikheten att alla fyra siffror är olika?

Lösning

a) Varje ring har 10 lägen oberoende av de andra, och ordningen spelar roll (1234 är inte 4321). Det är ordnat med återläggning:

$$10^4 = \boxed{10\,000}$$

b) Nu får en siffra som redan använts inte väljas igen: ordnat utan återläggning.

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \boxed{5040}$$

c) Alla 10 000 koder är lika sannolika, så **klassiska sannolikhetsdefinitionen** ger

$$P = \frac{5040}{10\,000} = \boxed{0,504}$$

Nästan varannan kod har alltså en upprepad siffra — fler än man kanske gissar.

På räknaren. $\text{nPr}(10,4)$ ger 5040.

Ej kontrollerat mot facit — två oberoende lösningar stämmer överens.

⚠ Vanliga fel

- **Blanda ihop kolumnerna.** Fråga dig om $\{A, B\}$ och $\{B, A\}$ är *samma* utfall. Är de det ska ordningen bort, annars inte.
- **Räkna m och g på olika sätt.** Räknas de möjliga utfallen som ordnade måste de gynnsamma också räknas som ordnade, se **Klassiska sannolikhetsdefinitionen**.
- **Glömma att ett val påverkar nästa.** Utan återläggning minskar antalet alternativ för varje val, $n(n-1) \dots$, inte $n \cdot n \dots$.

4. Lösta lektionsuppgifter

≡ Lektion 1, övning 2 — Tre schaktmaskiner

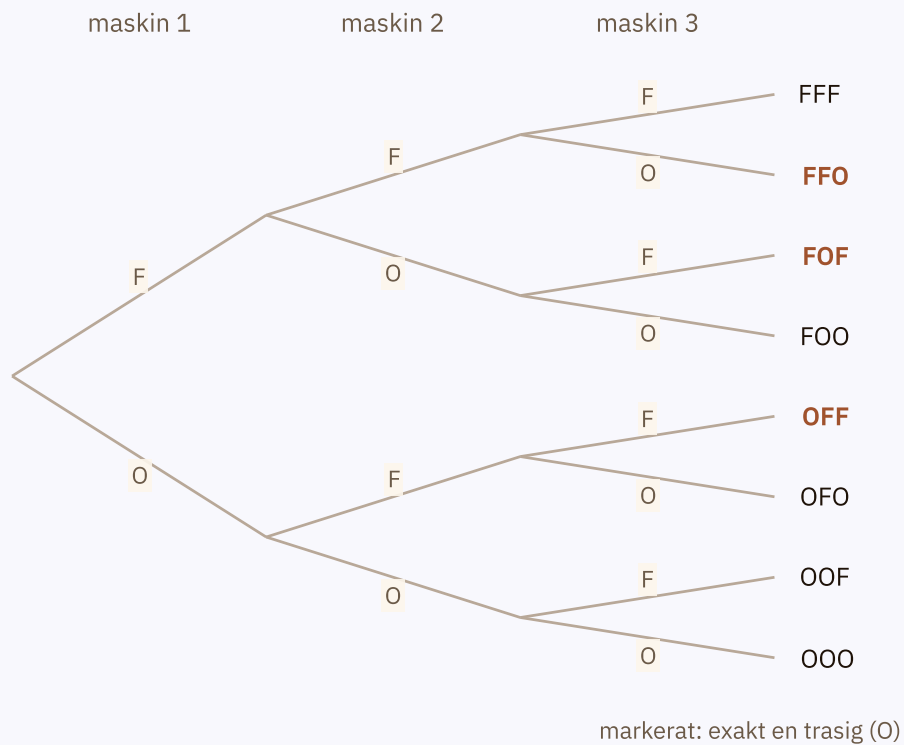
En maskintyp har 50 % chans att fungera i minst sex månader utan att några delar behöver bytas. Vi köper tre maskiner. Vad är sannolikheten att

- a) alla tre,
- b) exakt två

har fungerat utan delbyte efter sex månader?

 Lösung

Låt F = maskinen fungerar efter sex månader och O = den fungerar inte. Varje maskin ger F eller O, så enligt multiplikationsprincipen finns $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ utfall. Eftersom F och O är lika troliga är alla åtta lika sannolika.



a) Bara utfallet FFF ger att alla tre fungerar: $g = 1$.

$$P(\text{alla tre}) = \frac{1}{8} = \boxed{0,125}$$

b) Utfallen med exakt två F är FFO, FOF och OFF (markerade i trädet): $g = 3$.

$$P(\text{exakt två}) = \frac{3}{8} = \boxed{0,375}$$

Facit: a) 0,125, b) 0,375.

Se även

- [Klassiska sannolikhetsdefinitionen](#)
- [Binomialkoefficient](#)
- [Utfallsrum och händelser](#)

Resurser

- [Khan Academy: Counting, permutations, and combinations](#) 
 - [Wikipedia: Rule of product](#) 
-
-