

Median och kvantiler

19 okt. 2026, 3 min läsning

UTKAST

#matematik #sannolikhetslära #storhet

Kurs: S0008M Förkunskaper: Fördelningsfunktion, Frekvensfunktion

Medianen är det värde som delar sannolikhetsmassan i två lika stora delar. Mer allmänt anger en kvantil var en viss andel av massan har passerats, och kvartilavståndet mäter hur utspridd den mittersta hälften av fördelningen är.

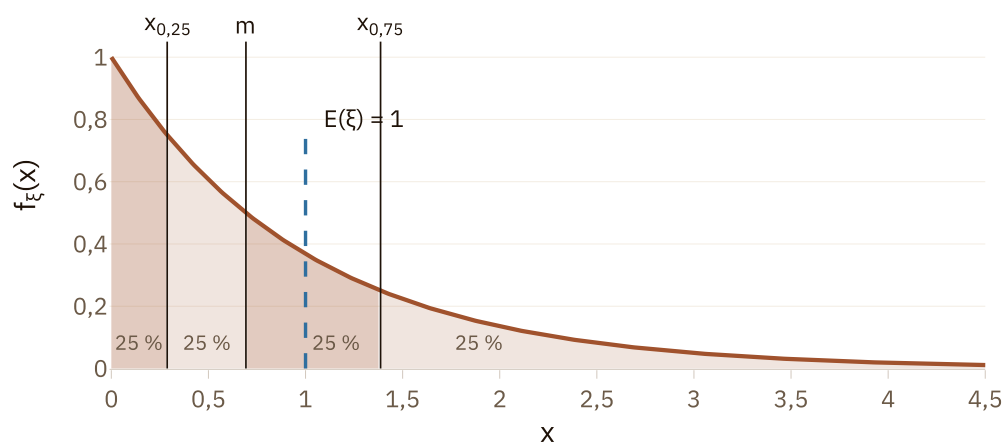
1. Medianen

För en **kontinuerlig stokastisk variabel** ξ är **medianen** m det värde som uppfyller

$$F_{\xi}(m) = P(\xi \leq m) = 0,5$$

Hälften av sannolikhetsmassan ligger till vänster om m och hälften till höger, så $P(\xi < m) = P(\xi > m) = 0,5$. I en figur delar medianen arean under **frekvensfunktionen** i två lika stora delar.

Exp(1): kvartilerna delar arean i fyra delar om 25 % var



För $\text{Exp}(1)$ är medianen $m = \ln 2 \approx 0,69$ men väntevärdet 1: den långa svansen åt höger drar väntevärdet med sig.

Medianen är ett **lägesmått**, precis som **väntevärdet**. För en symmetrisk fördelning sammanfaller de; för en sned fördelning drar en lång svans väntevärdet med sig, men inte medianen.

2. Kvantiler

Medianen är ett specialfall av en **kvantil**: det värde x där fördelningsfunktionen har nått en viss nivå. De vanligaste är

Kvantil	Uppfyller
nedre kvartilen	$F_{\xi}(x) = 0,25$
medianen	$F_{\xi}(x) = 0,50$
övre kvartilen	$F_{\xi}(x) = 0,75$

För att hitta en kvantil löser vi ekvationen $F_{\xi}(x) = q$ för x . På räknaren gör `invNorm(q,μ,σ)` just det för normalfördelningen.

Övre kvantiler i inferensdelen

För $N(0, 1)$ och t -fördelningen använder kursen i stället **övre** kvantiler: λ_{α} är det värde som har sannolikheten α till höger om sig, $P(\xi > \lambda_{\alpha}) = \alpha$. Det är samma sak som att $F(\lambda_{\alpha}) = 1 - \alpha$.

3. Kvartilavståndet

Skillnaden mellan övre och nedre kvartilen kallas **kvartilavståndet**:

$$\text{kvartilavstånd} = x_{0,75} - x_{0,25}$$

där x_q betecknar lösningen till $F_{\xi}(x) = q$. Det är ett **spridningsmått**, precis som **standardavvikelsen**: det mellersta halvan av massan ligger inom ett intervall av den längden.

Samma mått som i beskrivande statistik

Median, kvantiler och kvartilavstånd för en stokastisk variabel är fördelningens motsvarighet till de mått vi räknar på ett datamaterial i laboration 1, med Tukeys definitioner; se **Beskrivande statistik**. Där räknar vi på observerade värden; här är det egenskaper hos modellen.

Exempel – Median och kvartiler för $f(x) = 2x$

ξ har frekvensfunktionen $f_\xi(x) = 2x$ för $0 \leq x \leq 1$ och 0 annars. Bestäm medianen, kvartilerna och kvartilavståndet, och jämför medianen med väntevärdet.

Lösning

Fördelningsfunktionen på $[0, 1]$ är

$$F_\xi(x) = \int_0^x 2t \, dt = x^2$$

Varje kvantil löser $x^2 = q$, alltså $x_q = \sqrt{q}$:

$$x_{0,25} = \boxed{0,5}, \quad m = x_{0,5} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \boxed{0,707}, \quad x_{0,75} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \boxed{0,866}$$

$$\text{kvartilavstånd} = 0,866 - 0,5 \approx \boxed{0,366}$$

Väntevärdet är $E(\xi) = \int_0^1 2x^2 \, dx = 2/3 \approx 0,667$, alltså lite mindre än medianen. Massan ligger tätast nära 1, och den tunnare svansen mot 0 drar väntevärdet åt vänster.

På räknaren. `solve(x^2=0.75, x)` ger båda rötterna $\pm 0,866$; bara den i $[0, 1]$ gäller.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Vanliga fel

- **Lösa $f(x) = 0,5$ i stället för $F(x) = 0,5$.** Medianen hittas med fördelningsfunktionen, inte frekvensfunktionen.
- **Behålla fel rot.** Ekvationen $F(x) = q$ kan ha lösningar utanför definitionsmängden; välj den där F faktiskt gäller.
- **Övre och nedre kvantil.** $\lambda_{0,05}$ i inferensdelen har 0,05 till höger, alltså $F(\lambda_{0,05}) = 0,95$.

Se även

- [Fördelningsfunktion](#)
- [Frekvensfunktion](#)
- [Väntevärde](#)
- [Varians och standardavvikelse](#)
- [Mest sannolika värde](#)
- [Teckenintervall](#)

Resurser

- [Wikipedia: Kvantil](#)[↗]
 - [Wikipedia: Interquartile range](#)[↗]
-
-